

# BLIOTHECA MA

ZEITSCHRIFT FÜR GESC

MATHEMATISCHEN WISSEN

CABEN VON

ENESTRÖM

DRUCK UND



# BIBLIOTHECA MATHEMATICA.

## ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN.

HERAUSGEGEBEN VON

GUSTAF ENESTRÖM
IN STOCKHOLM.

DRITTE FOLGE. SECHSTER BAND.

MIT DEM BILDNISSE VON P. TANNERY ALS TITELBILD, DEM IN DEN TEXT GEDRUCKTEN BILDNISSE VON W. SCHMIDT SOWIE 15 TEXTFIGUREN

LEIPZIG
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1905.

# Inhaltsverzeichnis.

## Autoren-Register.



## Sach-Register.

## Allgemeines über Geschichte der Mathematik.



## Geschichte des Altertums.



## Geschichte des Mittelalters.

**Geschichte der neueren Zeit.**

Das 1. Heft dieses Bandes wurde am 16. Mai 1905 ausgegeben.
„ 2. „ „ „ „ „ 8. August „ „
„ 3. „ „ „ „ „ 28. Dezember „ „
„ 4. „ „ „ „ „ 4. Mai 1906 „

**Remarque.** A la page 290, l. 5 de mon article sur Paul Tannery j'aurais dû citer l'édition nationale des Œuvres de Galilei à côté de l'édition nouvelle de la Correspondance de Huygens. H. G. Zeuthen.

# Über die Bedeutung historischer Hypothesen für die mathematische Geschichtsschreibung.

Von G. ENESTRÖM in Stockholm.

Es ist mit vollem Rechte bemerkt worden,[1]) daß mathematische Geschichtsschreibung überhaupt nicht möglich ist, ohne daß man in gewissen Fällen seine Zuflucht zu Hypothesen nimmt. Dringt man etwas tiefer in die Frage ein, so wird man sogar finden, daß für die mathematische Geschichtsschreibung, ebenso wie für jede andere Art von Geschichtsschreibung, historische Hypothesen eine weit größere Rolle spielen, als man bei einer oberflächlichen Überlegung geneigt ist anzunehmen. Schon ein chronologisches Verzeichnis von Notizen, die anscheinend als nackte Tatsachen bezeichnet werden können, birgt in den meisten Fällen eine große Anzahl solcher Hypothesen. In der Tat trifft es nur selten ein, daß man in der Lage ist, die Richtigkeit aller Angaben, die man für eine besondere Arbeit braucht, selbst zu kontrollieren. Vielmehr wird man gewöhnlich gezwungen, eine größere oder kleinere Anzahl von Notizen aus zweiter Hand zu entnehmen, und wenn man keinen besonderen Grund hat zu vermuten, daß diese Notizen unzuverlässig sind, so benutzt man sie natürlich für seinen Zweck, indem man stillschweigend die Hypothese aufstellt, daß sie zuverlässig sind. Wollte man versuchen, Hypothesen dieser Art vollständig zu vermeiden, so würde fast jede umfassendere Einzeluntersuchung und gewiss jede zusammenfassende mathematisch-historische Arbeit unmöglich werden, und das einzige, das hier getan werden kann, ist, daß jeder Forscher soweit möglich die anderswo entnommenen Angaben vor der Benutzung kritisch prüft.

Wie schwierig es zuweilen ist, zu entscheiden, ob die Richtigkeit einer Angabe geprüft werden soll, erlaube ich mir an einem kleinen Beispiel zu zeigen. In meinem Artikel über JORDANUS NEMORARIUS[2]) hatte

1) Siehe P. STÄCKEL, Göttingische gelehrte Anzeigen 1900, S. 262.

2) G. ENESTRÖM, *Ist JORDANUS NEMORARIUS Verfasser des „Algorithmus demonstratus“?*; Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, S. 10.

ich die Handschriften des *Algorithmus demonstratus* verzeichnet, die meines Wissens damals von einem Fachmanne näher untersucht worden waren, und dabei in zweiter Stelle den cod. Dresd. Db. 86 aufgeführt. Ich konnte mich in dieser Hinsicht auf die bestimmte Behauptung von Max Curtze[1]) berufen, der ja als eine Autorität auf dem Gebiete der mittelalterlichen Mathematik anerkannt worden ist. Aber nichtsdestoweniger ist meine Angabe falsch, denn nach einer freundlichen Mitteilung des Herrn A. A. Björnbo enthält der cod. Dresd. Db. 86 tatsächlich einen anderen Algorismus als den von J. Schöner 1534 herausgegebenen *Algorithmus demonstratus.* Wäre mir die sehr seltene Druckausgabe dieser Schrift zugänglich gewesen, so hätte ich leicht entdecken können, daß die Richtigkeit der Curtzeschen Behauptung[2]) verdächtig ist, aber die Druckausgabe stand mir nicht zur Verfügung, und ich hatte gar keinen Anlaß, die Behauptung als bisher unbestätigt hervorzuheben.

Die Hypothesen, von denen ich soeben gesprochen habe, können also unter Umständen sehr schwierig zu vermeiden sein, daß sie aber wenn irgend möglich vermieden werden sollen, darüber gibt es wohl unter den Fachgenossen keine Meinungsverschiedenheit, und Arbeiten, wo sie *unnötigerweise* vorkommen, nennt man mit gutem Rechte unkritisch.

Anders liegt die Sache in betreff einer Art von Hypothesen, an die man gewohnt ist in erster Linie zu denken, wenn man das Wort „Hypothese“ hört, nämlich die Annahmen, die man macht, um eine Reihe von Tatsachen für einen gewissen Zweck zu ordnen oder zu ergänzen. Stellen wir uns vor, daß einmal in der Zukunft der literarische Verkehr soweit entwickelt worden ist, daß ein mathematisch-historischer Forscher ohne Schwierigkeit jede Angabe, die sich in einer gedruckten Schrift oder in einem Manuskripte findet, mit der ursprünglichen Quelle dieser Angabe

1) M. Curtze, *Über eine Handschrift der königlichen Bibliothek zu Dresden;* Zeitschr. für Mathem. **28**, 1883; Hist. Abt. S. 4. Vgl. auch M. Curtze, *Eine Studienreise;* Centralbl. für Bibliotheksw. **16**, 1899, S. 284.

2) Möglicherweise ist der Inhalt des Algorismus des cod. Dresd. Db. 86 hauptsächlich derselbe wie der Inhalt des gedruckten *Algorithmus demonstratus*, so daß Curtzes Versehen leicht erklärlich ist. Dann liegt auch die Annahme nahe, daß gerade der cod. Dresd Db. 86 den echten Algorismus des Jordanus enthält, aber gegen diese Annahme spricht der von Herrn Duhem (Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, S. 13) hervorgehobene Umstand, daß Chasles einen von Jordanus verfaßten Algorismus (vielleicht cod. Mazarin. 1250?) erwähnt, der eine Behandlung der praktischen Arithmetik, im arabischen Stil, enthält. In der Tat scheint aus der Curtzeschen Notiz hervorzugehen, daß der Algorismus des cod. Dresd. Db. 86 am Ende den Satz $(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$ hat, und dieser allgemeine Satz gehört kaum einer praktischen Arithmetik im arabischen Stil. Hierzu kommt noch, daß Wappler in den Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **5**, 1890, S. 161 ein Fragment eines angeblich Jordanischen Algorismus erwähnt, der ein anderer als der des cod. Dresd. Db. 86 zu sein scheint.

vergleichen kann, so wird dadurch wenigstens theoretisch die im Vorhergehenden berücksichtigte Art von Hypothesen überflüssig werden. Dagegen wird es immer Fälle geben, wo das mathematisch-historische Material lückenhaft ist, so dass man die Ordnungsfolge oder den inneren Zusammenhang der einzelnen Tatsachen nicht aktenmäßig feststellen kann. In betreff der älteren Mathematik kommt es z. B. sehr oft vor, daß man in einer Schrift Sätze findet, die, soweit bekannt, in keiner früheren Arbeit erwähnt werden, ohne daß man irgend einen Grund hat anzunehmen, daß der erste Mitteiler der Sätze zugleich deren Erfinder ist. In solchen Fällen ist es also nicht einmal möglich, eine chronologisch geordnete Aufzählung der Entdeckungen zu geben, wenn man nicht seine Zuflucht zu einer Hypothese nimmt.

In der Geschichte der neueren Mathematik kann man freilich im allgemeinen ermitteln, von wem eine Entdeckung herrührt, aber auf welchem Wege sie erlangt wurde, ist oft nicht möglich genau festzustellen. Nun hat man ja den Ausweg in solchen Fällen auf die Erforschung des Zusammenhanges zu verzichten, und höchstens auf die verschiedenen Möglichkeiten, die sich von selbst darbieten, aufmerksam zu machen In der Tat ist ein solches Verfahren meines Erachtens zuweilen angebracht, aber wenn man es überall anwendet, so bekommt man keine Entwickelungsgeschichte sondern wesentlich nur eine Entdeckungsgeschichte der Mathematik. Ist man nun der Ansicht, die ich früher vielfach ausgesprochen habe, nämlich daß der eigentliche Zweck der mathematischen Geschichtsschreibung ist, eine Entwickelungsgeschichte zu bearbeiten, so folgt daraus um so sicherer, daß historische Hypothesen unvermeidlich sind.

Aber auch in Fällen, wo die Hypothesen nicht bestimmt notwendig sind, können sie sehr nützlich sein. Herr M. CANTOR hat vor ein paar Jahren hervorgehoben,[1] daß sie „der Spezialforschung, welche um so häufiger, je älteren Datums die vermuteten Tatsachen sind, von Nichtmathematikern geübt wird, einen Fingerzeig geben, worauf diese etwa achten sollen“. Zuweilen wird der Bericht über eine größere Anzahl zusammengehörender Tatsachen viel übersichtlicher, wenn man dieselben unter Bezugnahme auf eine besondere Hypothese ordnet. Als Beispiel eines solchen Falles möchte ich auf die von Herrn CANTOR benutzte Hypothese[2]) hinsichtlich der Entstehung und der Verbreitung der indischen Zahlzeichen hinweisen.

Aus dem soeben Gesagten geht hervor, daß Hypothesen der zweiten

---

1) M. CANTOR, *Wie soll man die Geschichte der Mathematik behandeln?;* Biblioth. Mathem. $4_3$, 1903, S. 116.

2) M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* I², Leipzig 1894, S. 669.

Art meines Erachtens nicht nur berechtigt, sondern auch nützlich und zuweilen sogar notwendig sind bei der Behandlung der Geschichte der Mathematik. Auf der anderen Seite muß ich betonen, daß die Berechtigung nur unter gewissen Bedingungen anerkannt werden soll.

Von diesen Bedingungen setze ich in erster Linie die rein formale, daß jede Hypothese ausdrücklich als solche bezeichnet werden wird. Wenn also ein Verfasser in betreff des Satzes $\sum x^3 = \left(\frac{x(x+1)}{2}\right)^2$ sagt:[1]) „nous avons *montré* comment les Grecs connaissaient ce théorème," so halte ich diese Redeweise für durchaus unangebracht, da der fragliche Satz zuerst bei einem römischen Mathematiker vorkommt. Kaum richtiger finde ich die Ausdrucksweise, wenn ein anderer Verfasser in betreff desselben Satzes bemerkt,[2]) daß er *natürlich* von keinem Römer entdeckt worden ist, und hinzufügt, es sei *allgemein anerkannt*, daß die Römer nichts schufen. Ich kann sehr wohl zugeben, daß die Hypothese, um die es sich hier handelt, nämlich daß die Griechen den Satz $\sum x^3 = \left(\frac{x(x+1)}{2}\right)^2$ gekannt haben, sehr wahrscheinlich wird, wenn man die von Herrn H. G. Zeuthen neuerdings[3]) angeführten Gründe in Betracht zieht, aber eine Hypothese bleibt sie jedenfalls, bis der fragliche Satz bei einem griechischen Verfasser angetroffen wird, und auch dann wäre es sehr wohl möglich, daß ein römischer Mathematiker den Satz auf empirischem Wege nachentdeckt hätte.[4]) Man könnte ja meinen, daß es ziemlich gleichgiltig ist, welche sprachliche Form ein Verfasser seiner Hypothese gibt, sofern er die Tatsachen erwähnt, worauf er die Hypothese stützt, aber in Wirklichkeit ist es nicht so, denn die bestimmte Behauptung eines hervorragenden Verfassers, etwas sei bewiesen oder etwas gelte als allgemein anerkannt, hat auf die meisten Leser eine fast hypnotische Wirkung, und nachdem die Hypothese in der Fachliteratur den Rang einer Tatsache erworben hat, erfordert es viel Mühe um eine Berichtigung des Fehlers zu erzielen.

Eine zweite sehr wesentliche Bedingung für die Berechtigung einer Hypothese ist meiner Ansicht nach, daß diese erst nach eingehendem Studium der Tatsachen, um deren Erklärung es sich handelt, aufgestellt wird. Sonst kann es nämlich leicht eintreffen, daß die Hypothese zu Resultaten führt, deren Unrichtigkeit durch Benutzung des vorhandenen

1) Siehe Biblioth. Mathem. $3_3$, 1902, S. 146.

2) Siehe Biblioth. Mathem. $4_3$, 1903, S. 231.

3) H. G. Zeuthen, *Sur l'arithmétique géométrique des Grecs et des Indiens;* Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, S. 97—112.

4) Vgl. G. Eneström, *Über kulturhistorische und rein fachmäßige Behandlung der Geschichte der Mathematik;* Biblioth. Mathem. $4_3$, 1903, S. 5.

Quellenmaterials unmittelbar nachgewiesen werden kann, so daß die Hypothese nicht nur unnütz sondern direkt irreleitend ist. Auch hier erlaube ich mir ein Beispiel anzuführen. Im zweiten Bande seiner *Vorlesungen*[1]) berichtet Herr CANTOR über eine Algorismusschrift, die sich in einem vatikanischen Manuskripte aus der zweiten Hälfte des 14. Jahrhunderts findet, und die nach E. NARDUCCI, der Auszüge aus der Schrift veröffentlicht hat, den Titel *Introductorius liber qui et pulveris dicitur in mathematicam disciplinam* trägt. Herr CANTOR stellt dabei die Frage: „Ist die Schrift im XIV. Jahrhundert verfaßt oder damals nur abgeschrieben?", und beantwortet diese Frage auf folgende Weise: „Wie diese Frage zu beantworten sei, scheint uns kaum zweifelhaft. Der Inhalt ist so viel geringer als der von irgend anderen im XIV. Jahrhunderte vorhandenen Schriften, daß wir an eine Abschrift zu glauben uns nicht im Stande fühlen. Ein so schwaches Erzeugniss kann in jedem Jahrhunderte einmal niedergeschrieben werden, und der ungerechte Zufall kann es vor dem Untergange bewahren, aber man vervielfältigt es nicht, es sei denn, daß man geschichtliche Forschnngen dabei im Auge habe, und das können wir bei einem Abschreiber des XIV. Jahrhunderts einem solchen Schriftchen gegenüber nicht voraussetzen". Gestützt auf seiner Hypothese gelangt Herr CANTOR nun unmittelbar zu dem Resultate, daß der *Introductorius liber* nur einmal, und zwar im 14. Jahrhundert, niedergeschrieben worden ist. Nun verhält es sich aber so, daß die von NARDUCCI veröffentlichten Auszüge wesentlich mit dem von B. BONCOMPAGNI 1857 herausgegebenen Traktat: *JOANNIS HISPALENSIS Liber algorismi de pratica arismetrice* übereinstimmen;[2]) auf Grund dieses Umstandes ist es erlaubt zu behaupten, daß der Inhalt des *Introductorius liber* wenigstens viermal niedergeschrieben worden ist,[3]) und zwar nicht zum erstenmal im 14. Jahrhundert.

Die zwei Bedingungen, mit denen ich mich im Vorhergehenden beschäftigt habe, halte ich für wesentlich in betreff der Benutzung historischer Hypothesen bei der Behandlung der Geschichte der Mathematik. Aber auch wenn sie erfüllt sind, sollen Hypothesen meines Erachtens nur mit Vorsicht benutzt werden. Es ist bemerkt worden,[4]) daß, wenn eine Hypothese „alle Tatsachen eines Erscheinungskomplexes in einfacher Weise erklärt, man sie als eine Etappe auf der Reise vom Irrtum zur Wahrheit wird ansehen dürfen". Diese Bemerkung ist ohne Zweifel bis zu einem gewissen Grade richtig, aber wenn es sich um eine verhältnismäßig

1) M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* II², Leipzig 1900, S 155—156.

2) Vgl. Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, S. 410—411.

3) Vgl. Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, S. 114

4) P. STÄCKEL, a. a. O. S. 262

unwesentliche Tatsache handelt, so ist es meiner Meinung nach besser, dieselbe unerklärt zu lassen, als eine Hypothese aufzustellen, welche zwar die Tatsache erklärt, aber vielleicht an sich wenig Zutrauen verdient. Um meine Ansicht näher auseinanderzusetzen, nehme ich an, es sei trotz umfassender Nachforschungen unmöglich gewesen, irgend eine Schrift aufzufinden, die mit den von Narducci herausgegebenen Auszügen aus dem *Introductorius liber* übereinstimmt. Dann könnte man allerdings die von Herrn Cantor aufgestellte Hypothese als eine erste Etappe auf der Reise vom Irrtum zur Wahrheit bezeichnen, aber für meinen Teil würde ich diese Etappe vermeiden. So viel ich verstehe, fußt die Hypothese nämlich auf der Voraussetzung, daß im 14. Jahrhundert gewisse mathematische Kenntnisse gleichsam in der Luft lagen, denn wie ist es sonst möglich zu verstehen, daß jede im 14. Jahrhundert lebende schreibkundige und mit der lateinischen Sprache vertraute Person, die zufälligerweise eine Handschrift des *Introductorius liber* auffand, einsehen mußte, daß es sich um ein sehr schwaches Erzeugnis handelte, das nicht verdiente abgeschrieben zu werden? Aber die soeben erwähnte Voraussetzung möchte ich nicht gutheißen; sie ist von meinem Gesichtspunkte aus nahe verwandt mit der Voraussetzung, welche der rein kulturhistorischen Behandlung der Geschichte der Mathematik zu grunde liegt, und mit der ich mich schon in zwei früheren Artikeln[1]) beschäftigt habe.

Überhaupt sind mir die Hypothesen um so verdächtiger, je allgemeiner sie sind, und zwar aus folgenden Gründen. Erstens ist es noch unsicher, ob überhaupt die Gesetze des historischen Geschehens auf dem mathematischen Forschungsgebiete mit größerer Genauigkeit festgestellt werden können, und zweitens ist das vorhandene mathematisch-historische Material noch so unvollständig, daß es jedenfalls nicht genügt, um sichere Folgerungen allgemeiner Art zu ziehen.[2])

Auf der anderen Seite will ich gern anerkennen, daß durch solche allgemeine Hypothesen die mathematisch-historische Forschung indirekt gefördert werden kann und wirklich gefördert worden ist. Es gibt nämlich Verfasser, die dadurch angeregt worden sind, ein sehr umfassendes mathematisch-historisches Material an den Tag zu bringen und zusammenzustellen, und dies Material hat natürlich seinen Wert, unabhängig von der Richtigkeit oder Unrichtigkeit der Hypothese, um deren willen es herbei-

---

1) G. Eneström, *Über kulturhistorische und rein fachmäßige Behandlung der Geschichte der Mathematik;* Biblioth. Mathem. $4_3$, 1903, S. 1—6. *Zur Frage über die Behandlung der Geschichte der Mathematik;* Biblioth. Mathem. $4_3$, 1903, S. 225—233.

2) Vgl. G. Eneström, *Über kulturhistorische und rein fachmäßige Behandlung der Geschichte der Mathematik;* Biblioth. Mathem. $4_3$, 1903, S. 2.

geschafft worden ist. Als Beleg erlaube ich mir die CANTORschen *Mathematischen Beiträge zum Kulturleben der Völker* anzuführen. Der Satz, den der Verfasser durch diese Beiträge beweisen wollte, lautet bekanntlich:[1] „Wenn bei Völkerschaften eine Ähnlichkeit auf diesem oder jenem Gebiete der Geistesentwickelung stattfindet, so ist das meistens kein Zufall, sondern die Folge von gegenseitiger Einwirkung oder gemeinsamem Ursprunge". Meines Erachtens handelt es sich hier um eine minderwertige Hypothese, denn die fragliche Ähnlichkeit kann ebenso sehr darauf beruhen, daß die Völkerschaften aus Menschen bestehen, und daß die Gleichheit der menschlichen Geisteswirksamkeit unter ähnlichen äußeren Verhältnissen zu gleichen mathematischen Entdeckungen führen wird. Aber, wie ich schon angedeutet habe, hat Herr CANTOR, um seinen Satz zu beweisen, ein wertvolles mathematisch-historisches Material gesammelt und gut bearbeitet den Fachgenossen zugänglich gemacht.[2]

Aber nicht nur mit Vorsicht, sondern auch mit Sparsamkeit sollen Hypothesen benutzt werden. Für einen geistreichen Forscher ist es natürlich verlockend, so sehr als möglich die „nackten Tatsachen" zu erklären oder ihren Zusammenhang aufzuspüren, aber wenn er sich nicht gegen diese Versuchung wappnet, läuft er die Gefahr, sich allmählich einzubilden, daß seine Hypothesen nicht Etappen auf dem Wege, sondern die Endstation selbst, d. h. die Wahrheit repräsentieren. Und eine solche Einbildung kann verschiedene Übelstände mit sich führen. Teils wird der Forscher geneigt, die abweichenden Ansichten seiner Fachgenossen ohne weiteres als unrichtig zu betrachten, teils wird er versucht ein eingehendes Studium des vorhandenen Materials als überflüssig oder weniger notwendig anzusehen, wodurch seine Angaben unzuverlässig werden können.

Selbstverständlich ist die Gefahr, die ich jetzt hervorgehoben habe, um so geringer, je kritischer der fragliche Forscher ist, und ein Beleg hierfür ist gerade der Fachgenosse, der meiner Schätzung nach die meisten Hypothesen angewendet hat, nämlich PAUL TANNERY. Ich bin nicht kompetent, mich über die TANNERYschen Hypothesen zu äußern, deren Begründung auf dem rein philologischen Gebiete zu suchen ist, und es mag sein, daß TANNERY hier zuweilen zu weit gegangen ist, aber jedenfalls hat seine Gewohnheit Hypothesen aufzustellen keinen schädlichen Einfluß auf seine mathematisch-historische Forschungsmethode geübt. Indessen kommt bei TANNERY ein anderer Übelstand der häufigen Anwendung von Hypothesen zum Vorschein, nämlich daß seine Schriften eben auf Grund dieses

---

1) Siehe M. CANTOR, *Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker* (Halle 1863), S. 2.

2) Vgl. G. ENESTRÖM, *Zur Frage über die Behandlung der Geschichte der Mathematik;* Biblioth. Mathem. $4_3$, 1903, S. 229.

Umstandes zuweilen ermüdend werden. Wenn ein Verfasser zuerst die Tatsachen erwähnt, die zu einem gewissen Gegenstande gehören, und dann seine Mutmaßungen über den Zusammenhang dieser Tatsachen auseinandersetzt, so braucht dies gewiß nicht zu bewirken, daß die Lektüre seiner Arbeit anstrengend wird. Wenn aber die Mutmaßungen im Vergleich mit den erwähnten Tatsachen allzu zahlreich sind, so wird der Leser leicht müde, denn er muß an vielen Stellen das Lesen unterbrechen, um sich zu fragen: „Worauf stützt der Verfasser seine Hypothese?" „Genügen die gesicherten Tatsachen um diese Hypothese wenigstens wahrscheinlich zu machen?". Da nun bei Tannery die Darstellung sonst sehr verdienstvoll ist, so sehe ich in dem oben hervorgehobenen Umstande, daß seine Schriften zuweilen ermüdend wirken, eine besonders kräftige Bestätigung der Richtigkeit meines Satzes, daß bei der Behandlung der Geschichte der Mathematik historische Hypothesen nicht nur mit Vorsicht, sondern auch mit Sparsamkeit benutzt werden sollen.

# Sur l'Algorithmus demonstratus.

Par P. Duhem à Bordeaux.

Depuis quelques années, il était d'usage d'attribuer à Jordanus de Nemore, plus connu sous le nom de Jordanus Nemorarius, l'ouvrage que Johann Schöner fit imprimer en 1534, par Petreius de Nüremberg, sous le titre d'*Algorithmus demonstratus* et que Pierre Forcadel[1]) traduisit en 1570. Dans un récent travail[2]), M. G. Eneström a appelé l'attention des géomètres sur cette attribution de l'*Algorithmus demonstratus* à Jordanus; il a montré combien étaient insuffisantes les preuves favorables à cette attribution et demandé que de nouvelles recherches fussent faites au sujet de ce traité d'arithmétique. Le présent écrit est une première tentative vers le but qu'a signalé M. G. Eneström.

Nous avons trouvé à la bibliothèque nationale de Paris, un texte de l'*Algorithmus demonstratus.*[3]) Il fait partie d'une collection précieuse à bien d'autres égards et, notamment, pour l'histoire de la statique que nous poursuivons en ce moment. Cette collection, qui porte le n° 8680 A du fonds latin, est de grand format, écrite sur parchemin, d'une belle écriture du XIII^e^ siècle, avec lettres capitales et lettrines, ornées en bleu et en rouge. L'œuvre du scribe a été revue, dès le XIII^e^ siècle, par un mathématicien qui a corrigé les fautes du copiste, tracé avec beaucoup de soin des figures

1) *L'arithmétique démonstrée, traduite et commentée par Pierre Forcadel*, Paris, MDLXX. Cf. Biblioth. Mathem. $4_3$, 1903, p. 206.

2) G. Eneström, *Ist Jordanus Nemorarius Verfasser der Schrift „Algorithmus demonstratus"?* (Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, p. 9—14).

3) Nous n'avons pu procurer un exemplaire de l'*Algorithmus demonstratus* publié par Schöner ni, partant, collationner le texte imprimé avec le texte manuscrit. Mais les *Rara mathematica* de Halliwell et les *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* de M. Moritz Cantor nous fournissaient un nombre assez considérable de passages essentiels du texte imprimé. Tous ces passages, nous les avons retrouvés *mot pour mot* dans le texte manuscrit. Nous pouvons donc affirmer que ces deux textes constituent le même ouvrage. Mais nous ne saurions déclarer s'il existe ou non de l'un à l'autre certaines variantes.

correctes, ajouté quelques notes marginales, dont certaines sont importantes, rédigé enfin deux pages sur la cosmographie.

Sur un des feuillets de garde qui précèdent cette collection, un inventaire des pièces qu'elle contenait a été tracé au XIII^e^ siècle; l'encre en a beaucoup pali; cependant, il est encore aisé à déchiffrer. Le voici:

*Liber* Thebith *de ponderibus et dicitur liber Carastonis.*
*Item quidam alius tractatus de ponderibus bonus.*
*Liber* Jordani *de ponderibus.*
*De numeris datis.*
*Liber de angulis.*
*Algorismus demonstratus.*
*Practica geometriae.*
*De ysoperimetris.*
*Liber* Euclidis *de gravi et levi.*
*Item liber de canonio.*
*Planisperium.*
*De speculis comburentibus.*
*Quedam tabule astronomie.*

Cet inventaire[1]) nous permet de constater que la composition de cette belle collection n'a pas varié depuis le XIII^e^ siècle; telle elle était alors, telle elle est encore aujourd'hui.

L'*Algorithmus demonstratus* commence au verso du feuillet 30 pour se terminer seulement au recto du feuillet 52 Aucun titre n'en signale le commencement, mais ces mots: *Algorismus demonstratus*, écrits en lettres capitales alternativement rouges et bleues, règnent en titre courant en haut de toutes les pages[2]); une disposition semblable est d'ailleurs adoptée pour les autres traités qui composent cette collection.

Le texte commence ainsi:

*Digitus est omnis numerus minor decem.*

*Articulus est omnis numerus qui digitum decuplat, aut digiti decuplum, aut decupli decuplum, et sic in infinitum.*

Au verso du feuillet 40, nous lisons:

*Hactenus ergo dictum sit qualiter in integris operandum sit.*

*Deinceps ad minucias procedat negotium, et eia cum minor quantitas...*

Entre ces deux phrases, l'annotateur a mis cette indication marginale: *Secundus liber.*

Le *secundus liber*, l'*algorismus de minuciis* se termine par une pro-

1) Cet inventaire omet un court écrit *De pyramidis* qui fait suite au *De speculis comburentibus.*

2) Plus exactement, en haut des deux premières pages, les suivantes portant seulement le mot *Algorismus.*

sition qui, au recto du feuillet 51, est énoncée en ces termes: *In minuciis radicem non habentibus, non potest radix non vera tam propinque inveniri ut propinquius haberi non possit, sive quadrate, sive cubite fractionis radicem querere sit propositum.*

Au recto du feuillet 52, la démonstration s'achève en ces termes: *Et quanto sepius multiplicaveris, tanto propinquiorem radicem invenies, sicut ex premissis patere potest.* A quoi l'auteur a ajouté: *Hec sunt que de minuciis scienda et ideo colligenda putavi et hec finit.* Un espace blanc, correspondant sans doute à un mot que le copiste n'a pu lire, sépare dans le manuscrit les deux mots *hec* et *finit.*

L'annotateur a orné les marges de nombreuses figures dont l'auteur ne suppose pas l'existence, qui ne sont pas indispensables à l'intelligence du texte, mais qui, parfois, y aident grandement. En outre, il a numéroté les diverses propositions. Le premier livre en contient quarante-trois et le second quarante-deux.

L'*algorithmus demonstratus* que nous venons de décrire est bien celui que JOHANN SCHÖNER a publié. Entre le manuscrit et le texte imprimé, les divergences sont de minime importance. En voici une cependant, qui vaut peut-être la peine d'être signalée: L'édition de SCHÖNER donne aux fractions sexagésimales tantôt le nom de *minutiae philosophicae*, tantôt le nom de *minutiae phisicae;* la première de ces deux déminations se trouve seule dans notre manuscrit: *minute sic sumpte*, dit il, *dicuntur philosoffice; talibus enim maxime utuntur philosophi; alie autem dicuntur vulgares.*

Dans l'ouvrage publié par SCHÖNER, la phrase: *Algorithmi demonstrati finis* est suivi d'un court supplément sur les proportions. Ce supplément ne se trouve pas en notre manuscrit. En revanche, le copiste y a inséré un court fragment sur l'astrolabe. Un préambule, commençant par ces mots: *Cuilibet* (sic) *artis studium ad astronomiam spectat . . .*, précède, au recto du feuillet 52, l'énoncé de ce théoreme: *Tres circulos in astrolapsu descriptos proporcionales esse;* la démonstration se termine, au verso du feuillet 52, par ces mots: *ergo circuli proporcionales, et hoc est propositum.* L'annotateur a attribué à cette proposion le N°. 43, comme si elle faisait partie de l'*Algorithmus demonstratus;* mais, entre la fin de cet ouvrage et le commencement du fragment sur l'astrolabe, il a eu soin de tirer un trait de plume.

Dans les recherches qu'il a faites au sujet de la sphérique de MENELAOS, M. BJÖRNBO[1]) a rencontré un texte manuscrit qui, d'après le signalement

1) A. A. BJÖRNBO, *Studien über* MENELAOS *Sphärik. Beiträge zur Geschichte der Sphärik und Trigonometrie der Griechen.* (Abhandl. zur Geschichte der mathem. Wissensch., 14, 1902, p. 146—150.)

qu'il en donne, paraît absolument identique à celui que nous venons de décrire.

Ce texte se trouve en un manuscrit du XIV[e] siècle (environ 1350—1375), conservé au Vatican sous la cote: „codex reginae Suecorum, lat. 1261". Il occupe la partie du manuscrit qui commence au fol. 266[v] et se termine au fol. 289[r]. La première phrase et la dernière[1]) sont celles mêmes de notre texte. Il est également divisé en deux livres dont le premier contient quarante-trois propositions et le second quarante-deux.

Chose digne de remarque: il est immédiatement suivi du fragment sur l'astrolabe qui lui est soudé dans le manuscrit parisien.

Le théoreme que renferme ce fragment sur l'astrolabe se retrouve en d'autres écrits. Maximilian Curtze a signalé[2]), dans un manuscrit de la Bibliothèque de Dresde, un écrit sur l'astrolabe qui commence par cet énoncée: *Tres circulos in astrolapsu descriptos, duos videlicet solsticiales et equinoctialem, proporcionales esse necesse est.* Cet écrit se termine par ces mots: *Et hec capitula ne pretermittat qui voluit facere astrolabium que compilavimus de figura sectionis.*

M. Björnbo[3]) a signalé, de son côté un texte qui commence comme l'écrit mentionné par Maximilian Curtze, mais qui se termine autrement: *. . . alterius translationis nostre hic quoque breviter commemoremus, ut si diutius insequamur scribendis moram faciamus. Explicit iste liber.* Ce commencement et cette fin se retrouvent également, selon M. Björnbo, dans le codex Amplonianus F. 375.

Selon Maximilian Curtze et M. Björnbo, ce théoreme sur l'astrolabe pourrait être dû à Campanus de Novare.

Mais laissons de côté ce fragment sur l'astrolabe qui, dans notre manuscrit, est venu se greffer sur l'*Algorithmus demonstratus*, et revenons à ce dernier écrit.

Le texte mentionné par M. Björnbo ne porte point, comme le nôtre, le titre *Algorismus demonstratus*, que Schöner devait adopter, mais *Tractatus magistri Gernardi de Algorismo.* Ce même nom se retrouve sur un

1) L'avant dernier mot, laissé en blanc dans le texte que nous avons eu en mains, est, ici, reproduit par le copiste; c'est le mot *eiu*, déjà employé par l'auteur au commencement de l'*Algorismus de minuciis.*

2) M. Curtze, *Über eine Handschrift der königl. öffentl. Bibliothek zu Dresden* (Zeitschr. für Mathem. 28, 1883; Hist. Abt., p. 1). — Dans ce même manuscrit, M. Curtze signale un *Algorithmus demonstratus, algorithmus* qu'il regarde comme identique à l'ouvrage publié par Schöner; il cite seulement la première et la dernière phrase de cet *algorithmus*; elles ne sont nullement conformes au texte imprimé.

3) A. A. Björnbo, *Die mathematischen S. Marcohandschriften in Florenz* (Biblioth Mathem. $4_3$, 1903, p. 244).

autre manuscrit du même ouvrage conservé à la bibliothèque Bodleienne d'Oxford (Cod. Digby 61); ce dernier texte est intitulé: *Algorismus magistri* GENARDI *in integris et minutiis;* il est malheureusement incomplet; l'*algorismus de minutiis* ne comprend que les huit premiers théorèmes de ce second livre.

Nous voilà donc en possession de ces deux résultats:

L'*algorithmus demonstratus*, que SCHÖNER devait publier au XVI^e^ siècle, existait dès le XIII^e^ siècle.

L'auteur de cet ouvrage était, d'après l'indication formelle de deux copies, un certain *Magister* GENARDUS ou GERNARDUS.

Qu'était ce *Magister* GERNARDUS*?* Faut-il regarder ce nom comme une altération de JORDANUS, afin d'attribuer l'*Algorithmus demonstratus* à JORDANUS NEMORARIUS? L'altération serait étrange; d'autant que très rarement le nom de JORDANUS est précédé du titre de *Magister*[1]); presque toujours, on trouve simplement JORDANUS, JORDANIS ou JORDANES, plus rarement, JORDANUS DE NEMORE.

D'ailleurs, l'une des raisons principales qui ont porté à attribuer l'*Algorithmus demonstratus* à Jordanus est que CHASLES a parlé, à plusieurs reprises, d'un *Algorismus* JORDANI qu'il avait étudié en manuscrit. Mais cet *Algorismus* JORDANI ne peut être l'*algorithmus demonstratus*, puisque CHASLES dit[2]), en propres termes, qu'il s'agit d'„un traité d'arithmétique pratique".

Faut-il, avec le prince BONCOMPAGNI[3]), identifier GENARDUS ou GERNARDUS avec GÉRARD DE CREMONE? L'*algorithmus demonstratus* serait alors une œuvre du XII^e^ siècle. Convient-il d'en faire remonter l'origine jusque là?

Fixer la date à laquelle a pu être composé l'*algorithmus demonstratus* semble besogne bien délicate à accomplir; essayons, cependant, d'obtenir à cet égard quelques indications.

Comme son titre l'indique, l'*algorithmus demonstratus* a pour objet de justifier par le raisonnement les modes opératoires employés en arithmétique; l'auteur s'efforce de donner à ses déductions toute la généralité possible; il discourt en représentant les nombres au moyen de lettres; jamais il ne fait usage de nombres particuliers représentés par des chiffres; il suppose donc à son lecteur la connaissance pratique des règles qu'il a

1) HEILBRONNER (*Historia matheseos*, Lipsiae 1742, p. 639) cite un manuscrit contenant „Arithmetica Magistri JORDANI demonstrata cum commentario".

2) MICHEL CHASLES, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (Bruxelles, 1837), p. 516.

3) BONCOMPAGNI, *Della vita et delle opere di* GHERARDO CREMONESE (Roma 1851), p. 57.

pour objet de justifier. Il admet également d'ailleurs, que son élève a connaissance de la géométrie, car il invoque fréquemment EUCLIDE lorsqu'il fait appel aux propriétés des rapports et des proportions.

Un tel écrit suppose évidemment l'existence d'ouvrages où sont exposées d'une manière pratique les règles sur lesquelles il veut raisonner. Il est donc naturel de comparer notre *Algorithmus demonstratus* aux algorithmes connus et de voir quels sont ceux qui semblent les plus aptes à le compléter.

Les ouvrages exposant les règles de l'*Algorismus* sont nombreux. D'ailleurs, ils offrent entre eux une évidente et étroite parenté; chacun d'eux est peut-être un progrès sur ceux qui le précèdent, mais ce progrès graduel ne saurait dissimuler une grande ressemblance.

Il est donc difficile de dire quel est, parmi ces algorithmes, celui qui a le plus de traits communs avec le traité pratique dont l'*Algorithmus demonstratus* de maître GENARDUS suppose l'existence. Il semble, toutefois que l'arithmétique expliquée dans l'*Algorithmus demonstratus* se rapproche surtout de celle qui est exposée dans l'*Ars numerandi* de SACRO BOSCO; HALLIWELL, aussi bien que M. MORITZ CANTOR, n'a pas été sans apercevoir ce rapprochement.

Ce rapprochement, toutefois, ne pouvait être que partiel. Le traité de SACRO BOSCO ne renferme rien qui concerne les fractions, alors que l'*Algorithmus demonstratus* leur consacre un des deux livres dont il se compose. M. MORITZ CANTOR a même fait observer[1]) que les fractions ne sont aucunement nommées dans le traité de SACRO BOSCO; en réalité, il y est fait une brève allusion;[2]) lorsqu'il prend la moitié d'un nombre impair, l'auteur remarque qu'elle se compose d'un nombre entier suivi de la fraction $\frac{1}{2}$ ou de 30 minutes. Mais l'*Algorithmus de minuciis* de maître JOHANNES DE LINERIIS, que de nombreux manuscrits, même du XIII$^{e}$ siècle, associent à l'*Algorithmus de integris* de SACRO BOSCO, complétait, à l'égard des fractions, la lacune de l'*Ars numerandi*.

Du reste les comparaisons entre l'*Algorithmus demonstratus* de maître GENARDUS et l'*Ars numerandi* de JOHANNES DE SACRO BOSCO ne nous renseignent en aucune manière sur l'âge respectif de ces deux écrits. De ces deux traités, quel est le plus ancien? A cette question, les documents que nous possédons ne nous permettent pas de répondre d'une façon péremptoire; cependant tout concourt à nous faire supposer que maître GENARDUS a composé son *Algorithmus demonstratus* quelque temps après que JEAN

1) MORITZ CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* 2², p. 89.

2) J. HALLIWELL, *Rara mathematica*, p. 9.

de Sacro Bosco eut donné son *Ars numerandi* et Jean des Linières son *Algorismus de minuciis;* il est vraisemblable que son intention a été de donner un commentaire théorique au traité, tout pratique, que représentait l'*Ars numerandi.*

Dans le manuscrit du XIV[e] siècle étudié par M. Björnbo, aussi bien que dans ce manuscrit du XIII[e] siècle dont nous avons pris connaissance, l'*Algorithmus demonstratus* est immédiatement suivi d'un fragment sur l'astrolabe que divers auteurs attribuent à Campanus de Novare. Il semble assez naturel de penser que ces deux écrits, ainsi soudés, sont de la même époque, et que maître Genardus ou Gernardus, l'auteur de l'*Algorithmus demonstratus,* était contemporain de Campanus.

---

# Der Briefwechsel zwischen Leonhard Euler und Johann I Bernoulli.

Von G. Eneström in Stockholm.

## III. 1739—1746.

Der letzte im vorigen Abschnitte[1]) zum Abdruck gebrachte Brief von Euler ist vom 20. Dezember 1738, und diesen Brief beantwortete Bernoulli am 7. März 1739. Aus demselben Jahre stammen zwei Briefe von Euler, nämlich vom 5. Mai und 15. September, sowie zwei Antwortschreiben des Bernoulli, das eine jetzt verloren, das andere vom 9. Dezember datiert. Auch im Jahre 1740 war der Briefwechsel zwischen Euler und Bernoulli ziemlich regelmäßig; diesem Jahre gehören nämlich drei Briefe von Euler (vom 19. Januar, 20. Juni, 18. Oktober) und zwei Antwortschreiben von Bernoulli (vom 16. April, 31. August) an. Eine Antwort auf Eulers Brief vom 18. Oktober 1740 fing Bernoulli zwar am 18. Februar 1741 an, aber diese Antwort blieb viele Monate liegen, und erst im September 1741 wurde sie zusammen mit einem Postskriptum abgesandt. Alle jetzt erwähnte Briefe, mit Ausnahme der verloren gegangenen aus dem Jahre 1739, also 5 Briefe von Euler und 5 Briefe von Bernoulli, sind im folgenden zum Abdruck gebracht worden.

Mit dem soeben zitierten Schreiben des Bernoulli vom 18. Februar 1741 brach der Briefwechsel zwischen ihm und Euler keineswegs ab; in der Tat hat Fuss[2]) sechs weitere Briefe von Bernoulli an Euler veröffentlicht, und wenigstens sieben Briefe an Bernoulli hat Euler nach 1740 geschrieben. Indessen sind alle diese Eulerschen Briefe verloren gegangen, und unter solchen Umständen habe ich keinen hinreichenden Anlaß gehabt, die sechs Bernoullischen Briefe noch einmal abzudrucken. In der Einleitung zum ersten Abschnitte[3]) habe ich nämlich das erneute

1) Siehe Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, S. 248—291.

2) *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle publiée par* P. H. Fuss. T. II (St.-Pétersbourg 1843), S. 59—93.

3) Biblioth. Mathem. $4_3$, 1903, S. 345.

Abdrucken der früheren BERNOULLIschen Schreiben dadurch begründet, daß sie eine wichtige Ergänzung zu den EULERschen Briefen bilden, und da diese fehlen, so ist es natürlich, daß jene auch in Fortfall kommen sollen. Noch dazu sind die letzten BERNOULLIschen Briefe für die Geschichte der Mathematik von untergeordnetem Interesse, was ja nicht wundernehmen kann, da sie von einem alten und kränklichen Mann geschrieben sind. Indessen habe ich es nützlich erachtet, die nach dem 18. Februar 1741 zwischen EULER und BERNOULLI gewechselten Schreiben zu verzeichnen und den Inhalt der von FUSS veröffentlichten Briefe anzugeben. Unmittelbar nach der Inhaltsangabe des Briefes vom 27. August 1742 habe ich eine Aufzeichnung des BERNOULLI hinzugefügt, die sich in seinem in Stockholm aufbewahrten Konzepte findet.

Schon in der Einleitung zum vorigen Abschnitte[1]) habe ich bemerkt, daß in den in Stockholm befindlichen Briefen und Konzepten aus den Jahren 1737—1738 Streichungen vorkommen, und dieselbe Bemerkung gilt auch in betreff der im folgenden abgedruckten Aktenstücke. Solche Streichungen kommen vor in den EULERschen Briefen vom 5. Mai 1739 (14 Zeilen), 15. September 1739 (13 Zeilen), 19. Januar 1740 (7 Zeilen), 20. Juni 1740 (4 Zeilen) und in den BERNOULLIschen Konzepten vom 7. März 1739 (13 Zeilen), 16. April 1740 (14 Zeilen). Nimmt man noch hinzu, daß statt der BERNOULLIschen Briefe vom 7. März 1739, 9. Dezember 1739, 16. April 1740 und 31. August 1740 nur Abschriften[2]) (vermutlich nicht ganz vollständig) in St. Petersburg vorhanden sind, so kann man nicht umhin anzunehmen, daß JOHANN BERNOULLI auch während der Jahre 1739—1740 mit EULER über irgend eine Frage sehr privater Natur verhandelte.

Unter den rein mathematischen Fragen, die in den hier abgedruckten Briefen behandelt werden, sind in erster Linie zu nennen die Integration der unvollständigen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und die Summierung der Reihe

$$\sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{1}{x^2 \pm n}.$$

Den Anlaß, sich mit der ersten Frage zu beschäftigen, bekam EULER dadurch, daß er 1739 zufälligerweise entdeckte, daß die einfache Differentialgleichung

$$a^3 \frac{d^3y}{dx^3} = y$$

dreimal integriert werden konnte. Die Form des Integrales ließ ihn vermuten, daß es durch eine einzige Operation erhalten werden könnte, und

1) Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, S. 248—249.

2) Siehe FUSS, a. a. O. I, S. XXI.

bald entdeckte er die Methode, die unvollständige lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$$y + a\frac{dy}{dx} + b\frac{d^2y}{dx^2} + c\frac{d^3y}{dx^3} + d\frac{d^4y}{dx^4} + \cdots = 0$$

zu integrieren. Was seine Briefe an Bernoulli hierüber enthalten, sowie was Bernoulli über die Integration einer verwandten Gleichung mitteilte, habe ich vor 8 Jahren in einem besonderen Aufsatze ausführlich auseinandergesetzt.[1])

Mit der Reihe

$$\sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{1}{x^2 \pm n}$$

hat sich Euler später in seinen gedruckten Schriften vielfach beschäftigt; die Resultate, die er seinem alten Lehrer brieflich mitteilte, sind also schon längst bekannt, aber die dabei benutzte Behandlungsweise ist nicht ohne Interesse, da sie, so viel ich weiß, nicht von Euler veröffentlicht worden ist. Er verwandelt nämlich die gegebene unendliche Reihe in eine andere, die nach Potenzen von $\pi$ fortschreitet, nimmt eine einfache Transformation vor, differentiiert die neue Reihe nach $\pi$, und erhält dadurch eine Differentialgleichung, deren Integral er finden kann.

Mehr im Vorübergehen werden in den Briefen einige andere Fragen aus dem Gebiete der Analysis behandelt, z. B. über die Summen der Reihen

$$\sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{1}{x^{2n}} \text{ und } \sum_{x=1}^{x=\infty} \frac{1}{x^x};$$

die Summierung einer endlichen Anzahl von Gliedern der harmonischen Reihe gibt Euler Anlaß, den angenäherten Zahlenwert der später nach ihm benannten Konstante zu berechnen. Zur Integralrechnung gehören einige von Euler aufgestellte Reduktionsformeln für das Integral

$$\int x^m (a^n - x^n)^r \, dx.$$

In betreff der rein mathematischen Fragen ist es eigentlich Euler, der in den Briefen die Resultate seiner Untersuchungen mitteilt, während sich Bernoulli meistenteils auf gelegentliche Bemerkungen beschränkt oder auf seine früheren Arbeiten hinweist. Anders liegt dagegen die Sache hinsichtlich der in den Briefen behandelten Gegenstände aus der angewandten Mathematik. Hier fühlte sich Bernoulli offenbar mehr auf eigenem Boden stehen, und die Briefe handeln ebenso sehr von seinen eigenen Untersuchungen. Die Übersendung der zwei für die Petersburger Commentarii bestimmten Abteilungen der *Dissertatio hydraulica*, sowie die Fortsetzung der schon im Jahre 1737 begonnenen Diskussion über

1) Eneström, *Sur la découverte de l'intégrale complète des équations différentielles linéaires à coefficients constants;* Biblioth. Mathem. $11_2$, 1897, S. 43—50.

das Gleichgewicht und die Bewegung schwimmender Körper, bieten BERNOULLI die sicherlich nicht unerwünschte Gelegenheit dar, sich sowohl über die Prinzipien wie auch über gewisse Details der Hydrodynamik zu äußern, und nebenbei die Untersuchungen seines Sohnes DANIELS zu bemängeln. EULER spricht zwar seine Bewunderung für die BERNOULLIschen Untersuchungen aus, beanstandet aber einzelne Punkte derselben, und zum Teil muß ihm BERNOULLI auch Recht geben.

Auch andere Gegenstände der angewandten Mathematik werden in den Briefen berührt, vorzugsweise spezielle mechanische Probleme. Natürlich handeln BERNOULLI und EULER auch über mehr literarische und allgemein wissenschaftliche Fragen. Nicht ohne Interesse für die Geschichte des buchhändlerischen Verkehrs im 18. Jahrhundert ist BERNOULLIS Bericht in seinem Briefe vom 16. April 1740 über die Schwierigkeit, Bücher von Leipzig nach Basel transportiert zu bekommen.

Daß Privatsachen in den Briefen berührt worden sind, habe ich schon oben bemerkt. Einen wenig erfreulichen Eindruck machen die wiederholten Wehklagen des BERNOULLI über Krankheit und Altersschwäche.

## 19.

## **Bernoulli** an **Euler** 7. März 1739.

**Antwort auf EULERS Brief vom 20. Dezember 1738. Original verloren; Konzept in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. Veröffentlicht von FUSS, a. a. O. S. 18—25 nach einer von N. FUSS verfertigten Abschrift des Originals; schon früher hatte N. FUSS in seinem *Eloge d'EULER* (Nova acta acad. sc. Petrop. 1, 1783 [gedruckt 1787], S. 173) einige Zeilen daraus abgedruckt.**

*Inhalt.* Übersendung des ersten Teiles der *Dissertatio hydraulica* und Hinweis auf die Wichtigkeit der Methode, deren sich JOHANN BERNOULLI darin bedient hatte. — Kritische Bemerkungen anbelangend die *Hydrodynamica* des DANIEL BERNOULLI. — Über den Inhalt des in Angriff genommenen zweiten Teiles der *Dissertatio hydraulica.* — Über eine früher übersandte Abhandlung *De motu corporum in orbibus mobilibus.* — Die Arbeit von EULER über die Musik. — Verschiedene Arten von Gleichgewicht schwimmender Körper. — Über vertikale Schwingungen. — Isoperimetrische Probleme. — Eigenschaften der elastischen Kurve. — JOHANN BERNOULLIS finanzielle Verhältnisse.

Viro Excellentissimo atque Acutissimo LEONHARDO EULERO S. P. D.
JOH. BERNOULLI.[1])

Exoptatissimae Tuae litterae d. 20. Decembris st. v. mihi traditae sunt atque a me perlectae summa cum voluptate. Ecce! nunc ad Te mitto partem priorem meditationum mearum hydraulicarum[2]), quas tantopere

1) Bei dem folgenden Abdruck habe ich auch das Konzept verglichen.

2) *Dissertatio hydraulica de motu aquarum per vasa aut per canales, quamcunque figuram habentes. Pars prima agens de motu aquarum per vasa et canales cylindricos qui ex pluribus tubis cylindricis sibi invicem adaptatis sunt conflati;* Comment. acad. sc. Petrop. 9, 1737 (gedruckt 1744), S. 3—49. Ein vorläufiger Abdruck findet sich in den *Opera omnia* (t. IV S. 391—432) des JOHANN BERNOULLI.

Te desiderare testaris, et vel ideo desideras, quod cognoveris imperfectionem, qua haec doctrina etiamnunc ab aliis tractari soleat, immo, ut candide fateris, Tu ipse frustra omne studium in genuina methodo detegenda collocaveris, invita omni, qua polles, perspicacia. Videbis, originem sequioris successus scriptorum hydraulicorum ex eo unice venisse, quod nemo hactenus attenderit, partem aliquam finitam virium prementium insumi ad formandum gurgitem, quando aqua cogitur ex uno tubo in alium diversae amplitudinis transire, licet gurges ipse constare concipiatur ex portiuncula aquae infinite parva. Post pertinacem diutinamque pensitationem animadverti tandem, non sufficere, ut attendatur ad solam illam vim vel pressionem, qua liquor in tubis in motum localem seu progressivum excitetur data cum velocitate, sed praeterea in considerationem trahi debere principium *continuitatis*, quo fit ut nulla mutatio in effectibus producendis fiat per saltum, sed successive per gradus infinite parvos, ut in hoc negotio accidit, ubi liquor a velocitate minori ad majorem, vel vicissim a majori ad minorem transire debet; unde omnino necesse est, ut prope transitum, vel ante vel post, concipiatur aliqua portiuncula liquoris, quantumvis parva, cujus stratula infinite parva vel accelerando vel retardando procedant, atque haec portiuncula, inaequabili velocitate gaudens, in stratulis est, quam voco gurgitem: haec omnia uberius et clarius ex ipso scripto intelliges.

Videbis etiam methodum hanc directam mirifice conspirare cum indirecta (qua sola usus est Filius meus in sua *Hydrodynamica*), etenim ambae dant eandem solutionem problematum hydraulicorum. Posset autem aliquis mirari, cur, qui ista solvere vult per theoriam virium vivarum, non pariter teneatur rationem habere formandi gurgitis, utpote qui videatur requirere ad sui generationem aliquam partem virium vivarum, aeque ac requiritur partem virium mortuarum; sed causam discriminis explico in scripto meo, monstrans, quantitatem materiae quae componit gurgitem etsi sit infinite parva, nihilominus opus habere vi finita et determinata pressionis ad acquirendam accelerationem vel retardationem in stratulis, sive ad id, ut sese gradatim accommodet ad motum, quem liquor jam habet in tubo, in quem ingredi debet. At vero vim vivam, quae est in omni materia gurgitis, quippe quae quantitatis est infinite parvae et tantum finitam celeritatem in singulis stratulis habens, oppido patet fore illam vim vivam gurgitis infinite parvam adeoque prorsus incomparabilem cum totali vi viva totius massae aqueae in tubis motae. Hoc ergo notari debuisset a Filio, antequam aggrederetur tractationem Hydraulicae per theoriam conservationis virium vivarum, ne quis scrupulum habere possit, videns negligi considerationem gurgitis, quae in methodo directa citra paralogismum negligi non potest; sed quomodo potuisset hoc praecavere,

cum nequidem ideam habuerit naturae gurgitis, quo tempore librum suum scripsit?

Vides, Vir Clariss., figuras rudi admodum et crassa Minerva esse delineatas, sine ullo ornamento, nedum ad stereographiae regulas repraesentatas, id sane efficere non potui, si vel maxime voluissem, ob tremorem manuum mearum qui cum aetate continuo ingravescit Fortassis dabitur apud Vos aliquis amanuensis qui, Te dirigeute, figuras elegantius et majore cum gratia delineare poterit, ita ut ad mentem meam respondeant.

Ceterum si videro, primam hanc partem hydraulicae meae exercitationis Tibi non displicuisse, transmittam protinus alteram partem, quam interea temporis, dum responsio Tua ad me venerit, absolvam, ut ad mittendum sit parata. Deprehendes, illam adhuc magis esse curiosam, dum ita modifico theoriam meam, ut fere opus non sit idea gurgitis, quem sub alia notione involvo; unde nascitur novum principium hydraulicum, a nemine antea animadversum, cujus auxilio statim pervenio ad motum aquae determinandum fluentis per vasa vel canales, non tantum ex tubis cylindricis conflatos, sed quamcunque figuram, etiam irregularem habentes, aliaque explico phaenomena jucunda et utilia, quae in Physicis quoque suum usum habebunt.

Tres quatuorve illae lineae, quas delevisti in litteris tuis, potuisseut sine ulla consequentia indeletae manere[1]) . . . .

Vides, Vir Celeb., post tot scriptorum expeditionem parum temporis mihi superesse ad excutienda pro merito singula epistolae Tuae capita; attingam tamen tumultuarie quantum permittit mentis distractio, oculorum hebetudo, atque imprimis manuum lassitudo et tremor. Quod in conventu Vestro praelegeris solutionem meam succinctam problematis de motu corporum in orbitis mobilibus[2]), gratias ago, quamvis eam non scripserim ut publice proponeretur, alias majori eam cura elaborassem atque extendissem magis. Dabitur forsan occasio alia vice communicandi quae mihi sunt meditata alia circa hanc materiam, et praesertim quae mihi subnata sunt ex lectione NEWTONianorum non semper recte se habentium.

Gratum erit accipere tomos, qnos promittis, Commentariorum, qui post quartum mihi desunt.

In Musicis non valde sum exercitatus, neque hujus scientiae fundamenta satis mihi sunt perspecta, ut de inventis Tuis judicare queam. Videntur sane egregiae, quae in litteris Tuis obiter tantum attingis; sed

1) Im Konzepte sind hier 13 Zeilen gestrichen (möglicherweise von JOHANN II BERNOULLI), und darauf folgen die Worte: „eum sine mora ad Tuas manus curatum iri". Bei FUSS fehlt alles was im Briefe nach „habebunt" und vor „Vides" stand.

2) *Compendium analyseos pro inventione vis centralis in orbibus mobilibus planetarum*; Comment. acad. sc. Petrop. 10, 1738 (gedruckt 1747), S. 95—101.

cum videro ipsum tractatum Tuum, quam de harmoniae principiis edere statuisti, spero fore ut exinde lux clarior mihi affulgeat ad inventorum Tuorum praestantiam penitius introspiciendam.

Eandem ob causam nolo nunc diutius inhaerere iis, quae hactenus inter nos agitata sunt de situ et motu corporum aquae innatantium, antequam visus mihi sit Tuus hac de re tractatulus, quem ad finem perductum esse ais. Interim bene est quod nunc agnoscas veritatem nonnullorum, quae monueram tam de situ obliquo coni et conoidis parabolici, quam de modo multiplicandi corporis particulas per quadrata distantiarum, non a centro ejus gravitatis, sed ab axe horizontali, per centrum transeunte, circa quem fiunt oscillationes. Corpus aliquod tribus utique modis in quiete vel aequilibrio conservatur: 1°) Si corpus duabus viribus aequalibus sed oppositis et ad se invicem tendentibus sollicitatur, fiet aequilibrium, quod olim in alia occasione vocavi *coactum*, idque est quod nunc vocas *firmum*. 2°) Quodsi vires illae duae aequales et oppositae a se invicem tendunt, hoc est, quae corpus non premunt, sed trahere conantur, fiet iterum aequilibrium, quod a Te vocatur *infirmum*, mihi vero pro scopo, quem olim tunc habueram, illud aequilibrium iterum vocabatur *coactum*. 3°) Si nullis omnino viribus oppositis corpus sollicitatur, nec premendo ad se invicem nec trahendo a se invicem, erit utique aequilibrium, quod a me dicebatur *otiosum*, ideo quia, si tale corpus a causa aliqua externa ex situ suo tantisper disturbatur, non amplius affectabit ad pristinum suum situm redire. Sic ex. gr. corpus sphaericum et homogeneum aquae insidens ac quiescens, si nonnihil circa centrum suum rotetur, manebit in hoc novo situ et non repetet priorem. Patet autem tale aequilibrium nec firmum esse nec infirmum, quodque ideo commode vocavi *otiosum*, quia est quasi in statu indifferentiae. Utrum vero corpus aquae insidens et quiescens sit in aequilibrio firmo vel infirmo, ex hoc utique cognoscitur, si nimirum nonnihil ex situ aequilibrii inclinetur, et ita quidem ut pars immersa idem semper volumen in aqua occupet, tunc centrum gravitatis corporis vel ascendisse in recta verticali, vel descendisse observabitur; si prius, concludendum erit corpus esse in aequilibrio firmo; si posterius, erit aequilibrium infirmum; si neque ascendit neque descendit, erit in statu neutro, seu indifferentiae, quod, ut dixi, mihi vocatur aequilibrium otiosum. In casu firmitatis attendendum est, quantum ex assumta inclinatione centrum gravitatis ascendat, tum enim ex utriusque collatione calculari potest lex accelerationis oscillationum corporis, atque inde determinari longitudo penduli isochroni. Sufficit theoriam ac fundamentum detexisse, calculum instituere non vacat tot aliis laboribus et negotiis distracto. De caetero gratissimum mihi fuit intelligere, quod ad admirationem usque Tibi placuerint, quae scripsi de oscillationibus verticalibus,

propter simplicitatem expressionis et insignem usum quem praestare possunt in explorandis navium ponderibus; maluissem autem ut ipse quoque calculum fecisses ex Tuo ingenio, quo mihi patuisset, annon erraverim in ratiocinando, nam ingenue fateor, me Tuis luminibus plus fidere quam meis.

Quae nunc uberius affers, Vir Exc., de isoperimetricis, credo equidem, Te omnia probe ruminasse atque ad veritatis trutinam expendisse, ita ut vix quicquam restet, quod acerrimam Tuam sagacitatem subterfugere potuerit; ad me quod attinet, diu adeo est quod haec seposui, ut mihi ea plane non amplius sint praesentia, quare ab his desisto.

Lectu jucundissimum fuit, quod addis in fine litterarum Tuarum de proprietate Tibi observata circa elasticam rectangulam (vel etiam lintheariam, ambae enim eandem faciunt curvam) in qua si abscissa ponatur $x$, est applicata $= \int \frac{xxdx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}}$ et longitudo curvae $= \int \frac{aadx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}}$, quas expressiones ita comparatas dicis ut inter se comparari nequeant. At invenisti si abscissa ponatur $= a$, rectangulum sub applicata et arcu comprehensum aequale esse areae circuli, cujus diameter sit abscissa $= a$. Est utique haec observatio notatu dignissima, *sed vellem scire*, an hanc proprietatem a priori et de industria quaesiveris et inveneris, aut an illam, ut saepe accidere solet, aliud quaerendo detexeris per casum fortuitum. Ego jam olim observavi circa has lineas duas aliquam proprietatem non minus elegantem, etsi inventu faciliorem, quae in hoc consistit, quod earum, non quidem rectangulum, sed summa sit aequalis quadranti circumferentiae ellipseos, cujus axis minor $= 2a$ et axis major $= 2a\sqrt{2}$. Vid. Act. Lips. 1694. m. Octob.[1]) Hoc autem valet non tantum de tota curva, cujus abscissa $x = a$ ejusque applicata maxima, sed indefinite de quibuscunque partibus earum ad se invicem spectantibus, quarum utique summa semper aequalis est arcui elliptico, qui pro abscissa habet $x$ in axe minori a centro sumtam, a cujus arcus longitudine etiam dependere demonstravi loco citato dimensionem arcus lemniscatae curvae, quam adhibui ad construendam isochronam paracentricam Leibnitii, quae tum temporis multum rumoris excitaverat.[2]) Quando autem affirmas applicatam $\int \frac{xxdx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}}$ et longitudinem curvae $\int \frac{aadx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}}$ ita esse comparatas, ut inter se comparari

1) Siehe Johann Bernoulli, *Constructio facilis curvae recessus aequabilis a puncto dato per rectificationem curvae algebraicae*; Acta Eruditorum 1694, S. 394—399 [= *Opera omnia*, t. I S. 119—122].

2) Über die Geschichte der paracentrischen Isochrone siehe Loria, *Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte* (Leipzig 1902), S. 585.

nequeant, nescio an hoc intellectum velis generaliter et sine ulla exceptione; an vero non putes posse quidem comparari pro aliqua $x$ determinatae longitudinis, sed non indefinite pro singulis $x$, sicuti revera datur aliqua hujusmodi expressio, nempe haec: $\int \frac{x^4 dx}{aa\sqrt{(a^4 - x^4)}}$, quam in casu $x = a$ inveni[1]) aequalem esse trienti curvae totius, adeo ut habeatur

$$\int \frac{aadx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}} = 3\int \frac{x^4 dx}{aa\sqrt{(a^4 - x^4)}}.$$

Optarim ut ad hoc investigandum aliquid temporis colloces, siquidem non minus notatu dignum videtur, quod Tuum illud alterum:

$$\int \frac{xxdx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}} \cdot \int \frac{aadx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}} = \text{circulo}.$$

Quod supra in hac pagina scripsi his verbis: *sed vellem scire* etc., id nunc didici ex litteris Tuis ad filium Danielem datis,[2]) quas mihi legendas exhibuit, postquam totam meam epistolam hucusque jam absolvissem.

Curiosa sunt theoremata in illis Tuis litteris contenta: ego jam olim similia inveni, sed mea magis geometrica sunt, ex consideratione curvarum deducta, Tua vero analytica magis, ope calculorum eruta. Combinando haec nostra in corpus commune, poterimus doctrinam de curvis inter se comparandis mirum quantum augere.

Quod denique doleas frequens damnum ex tot iteratis decoctionibus mercatorum mihi illatum, facis quidem, quod Christiana inculcat charitas, idque mihi solaminis loco erit, sed cum cogito, me hic Basileae esse, ubi perpetuis vexationibus fortunae obnoxius sum, ubi omni mea scientia vix minimam jacturae partem reparare possim, dum alibi honoribus et bonorum copia abundare potuissem, parum abest, quin tandem animum despondeam atque scientiarum culturae, quoad vixero, valedicam.

Valeas vero et Tu, Vir Excell., diutissime, mihique favere perge. Dabam Basileae a. d. 7. Mart. 1739.

## 20.

### Euler an Bernoulli 5. Mai 1739.

Antwort auf Bernoullis Brief vom 7. März 1739. Original in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm.

*Inhalt.* Johann Bernoullis *Dissertatio hydraulica.* — Ausströmung von Flüssigkeiten aus Gefäßen von beliebiger Form. — Vertikale Schwingungen schwimmender Körper. — Eigenschaften der elastischen Kurve und Reduktionsformeln für Integrale

1) Den Beweis dieses Satzes hat Johann Bernoulli später im 4. Bande seiner *Opera omnia* (S. 90) angegeben.

2) Der fragliche Brief von Euler an Daniel Bernoulli ist vom 23. Dezember 1738 (vgl. Fuss, a. a. O. II, S. 453).

von der Form $\int x^m (a^n - x^n)^r dx$. — **Eine lineare Differentialgleichung 3. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. — Ein Problem aus der Theorie der Ebbe und Flut, dessen Lösung die Integration einer linearen Differentialgleichnng 2. Ordnung erfordert.**

Viro Celeberrimo atque Excellentissimo Johanni Bernoulli S. P. D.
Leonhardus Euler.

Quantam attentionem atque adeo admirationem excitaverint profundissime Tuae de fluxu aquarum meditationes non solum apud me, sed etiam universam Academiam, litteris vix satis exprimere possum. Quod quidem ad me attinet, sic judico, Te, Vir Excellentissime, hanc rem ita expedivisse, quemadmodum ego non solum optavi, sed etiam jam dudum ipse efficere, etsi irrito conatu, sum annisus. Nunc autem plurimum lucis hac in re mihi es foeneratus, cum antea haec materia ingenti caligine mihi esset obducta, neque quicquam nisi indirecta methodo definire licuisset: quam ob causam Tibi me eo magis obstrictum agnosco. Interim alteram meditationum Tuarum partem magna impatientia expectamus, ex qua mihi persuadeo non minus me esse profecturum, quam ex parte priore. Quanquam autem theoriam Tuam in his schedis tantum ad casus speciales accommodasti, uberioremque explicationem in sequente dissertatione nobiscum communicanda promittis, operam tamen dedi, ut ipse hanc theoriam Tuam ad vasa cujuscunque figurae extenderem, qua in re si intentum scopum fuero assecutus, id quidem Tibi Ipse tribuas, Vir Celeb., sin secus, summo desiderio ab Te corrigi cupio.

Sit igitur [Fig. 1] vas cujuscunque figurae $ABDC$, initio, quo aqua per foramen $CD$ effluere incipit, usque ad $AB$ aqua repletum, cujus altitudo $AC$ sit $= a$, et foraminis $CD$ amplitudo $= n$. Ponamus aquam jam usque in $PS$ subsedisse hocque tempore aquam per foramen $CD$ effluere celeritate altitudini $z$ debita, minimo autem tempusculo subsidere superficiem $PS$ per spatiolum $Pp$; sitque $Pp = dp$ atque amplitudo vasis $PS = s$, denotabit $z + dz$ altitudinem celeritati aquae effluentis debitam, cum suprema aquae superficies usque in $ps$ subsedit. Ut nunc mutatio

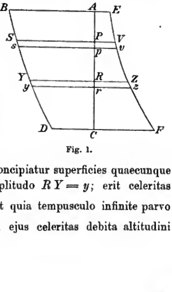


Fig. 1.

motus hoc tempusculo genita innotescat, concipiatur superficies quaecunque aquae $RY$, ponaturque $AR = r$, et amplitudo $RY = y$; erit celeritas hujus strati $RY$ debita altitudini $\frac{nnz}{yy}$; et quia tempusculo infinite parvo superficies $RY$ descendit in $ry$, erit tum ejus celeritas debita altitudini

$$\frac{nnz}{yy} + \frac{nndz}{yy} - \frac{2\,nnzdy}{y^3}.$$

Est autem, quia eodem tempusculo suprema superficies $PS$ per $Pp$ descendere ponitur

$$sdp = y\,dr.$$

Cum igitur superficies $RY$ descendendo per altitudinem $Rr = dr$ ita acceleretur, ut altitudo ipsius celeritati debita augmentum capiat

$$= \frac{nndz}{yy} - \frac{2\,nnzdy}{y^3},$$

hoc augmentum per spatium percursum $dr$ divisum dabit vim acceleratricem

$$= \frac{nndz}{yydr} - \frac{2\,nnzdy}{y^3dr};$$

quae per massam strati $RYyr = ydr$ multiplicata praebet vim motricem hujus strati

$$= \frac{nndz}{y} - \frac{2\,nnzdy}{yy}.$$

Transferatur haec vis motrix ad datam amplitudinem $m$, prodibit ea

$$= mn^2\left(\frac{dz}{yy} - \frac{2\,zdy}{y^3}\right) = mn^2\left(\frac{dz}{y}\cdot\frac{dr}{sdp} - \frac{2\,zdy}{y^3}\right)$$

$$\text{ob } \frac{1}{y} = \frac{dr}{sdp},$$

quam substitutionem eo facio, quo differentialia $dr$ et $dy$ ingrediantur, quae a variabilitate sectionis $RY$ pendent. Totius igitur vis motricis elementum erit

$$= mn^2\left(\frac{dz}{sdp}\cdot\frac{dr}{y} - \frac{2\,zdy}{y^3}\right),$$

cujus integrale ita est capiendum, ut tantum quantitates $r$ et $y$ tanquam variabiles spectentur Integrale ergo

$$mn^2\left(\frac{dz}{sdp}\int\frac{dr}{y} + \frac{z}{yy} - \frac{z}{ss}\right)$$

exprimet vim motricem pro volumine aquae $SPRY$, ac posito $y = n$ habebitur vis motrix totalis aquam urgens ad amplitudinem $m$ relata. Construatur in hunc finem nova curva $EVZF$, in qua sit $ZR = \frac{1}{y}$; exprimetque $\int\frac{dr}{y}$ aream hujus curvae $PCFV$, ponatur haec area $PCFV = R$, eritque vis motrix totalis

$$= mn^2\left(\frac{dz}{sdp}R + \frac{z}{nn} - \frac{z}{ss}\right),$$

quae vi motrici actuali seu cylindro aqueo altitudinis $CP$ et basis $= m$ aequalis poni debet. Sit itaque altitudo $CP = x$, erit $Pp = dp = -dx$,

atque cum $R$ sit area $CPVF$, erit per coordinatas $x$ et $s$; $R = \int \frac{dx}{s}$, hoc integrali ita capto ut evanescat posito $x = 0$. Posito ergo $- dx$ loco $dp$, ob vim motricem actualem $= mx$ habebitur haec aequatio

$$- \frac{n^2 R dz}{s dx} + z - \frac{n^2 z}{ss} = x,$$

sive

$$dz + z\left(\frac{dx}{Rs} - \frac{s dx}{n^2 R}\right) = - \frac{sx dx}{n^2 R}.$$

Ad quam aequationem integrandam sumo integrale quantitatis $\frac{dx}{Rs} - \frac{s dx}{n^2 R}$, per quam $z$ est affecta, quod ob $dR = \frac{dx}{s}$ est $1R - \int \frac{s dx}{n^2 R}$: positoque

$$\int \frac{s dx}{n^2 R} = 1S,$$

erit id integrale $1 \frac{R}{S}$, numerusque huic logarithmo respondens $= \frac{R}{S}$: quae quantitas aequationem illam, si multiplicetur, integrabilem reddit, proditque

$$\frac{Rz}{S} = C - \int \frac{sx dx}{n^2 S}$$

et

$$z = \frac{CS}{R} - \frac{S}{R} \int \frac{sx dx}{n^2 S}$$

ubi quantitatem constantem $C$ eo determinari oportet, quo fiat $z = 0$, posito $x = a$. Exemplo veritas sese manifestabit; si ponamus vas cylindricum amplitudinis $m$, quod in fundo habeat foramen $= n$; erit $s = m$; et $R = \int \frac{dx}{s} = \frac{x}{m}$; $1S = \int \frac{s dx}{n^2 R} = \int \frac{m^2 dx}{n^2 x} = \frac{m^2}{n^2} 1x$;
unde fit

$$S = x^{\frac{m^2}{n^2}},$$

atque

$$\frac{z}{mx^{\frac{mm-nn}{nn}}} = C - \frac{m}{nn} \int x^{\frac{-mm+nn}{nn}} dx = \frac{m}{m^2 - 2n^2}\left(x^{\frac{-mm+2nn}{nn}} - a^{\frac{-m^2+2n^2}{nn}}\right),$$

quae tandem praebet

$$z = \frac{mmx}{mm - 2nn}\left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{mm-2nn}{nn}}\right).$$

Ad hanc igitur aequationem sine gurgitis consideratione est perventum, quippe cujus ratio in integratione, ubi amplitudo foraminis $n$ est inducta, jam fuit habita; id quod Ipse innuis, Vir Celeb., quando dicis, si res generaliter consideretur, gurgite nequidem opus esse.

Determinatio oscillationum verticalium, quae in corpora aquae innatantia cadere possunt, cum ob ipsam questionem tum etiam simplicitatem solutionis mihi tantopere placuit, ipsa vero solutio non solum mihi non

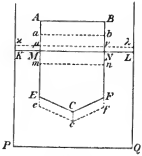



Fig. 2.

difficilis visa est, sed ex tempore calculus, quem institui, statim convenientiam declaravit. Quoniam autem cupis, Vir Excellentissime, meam solutionem videre, ea ita se habet.

Insidat aquae corpus quodcunque [Fig. 2] $AECFB$ in aequilibrio, quod circa sectionem aquae $MN$ saltem sit cylindricum, ita ut inter oscillandum aequalis semper sectio in superficie aquae versetur. Sit pondus hujus corporis $= M$; sectio horizontalis $MN$ in superficie aquae facta $= n$, et volumen partis submersae $= V$: unde pressio aquae in partem submersam exorta erit $= M$. Jam ponatur aqua in vase finitae amplitudinis contineri sitque amplitudo vasis $KL = m$; ac demergatur corpus profundius per altitudinem $Aa = Cc = x$, ascendetque aqua in vase per intervallum $M\mu = N\nu$, ita ut sit $(m-n)\,M\mu = nx$, seu $M\mu = \frac{nx}{m-n}$. Volumen ergo, quod nunc aquae est submersum erit

$$= V + n\left(x + \frac{nx}{m-n}\right) = V + \frac{mnx}{m-n},$$

unde vis aquae sursum urgens erit

$$= \frac{M}{V}\left(V + \frac{mnx}{m-n}\right);$$

vi gravitatis autem deorsum nititur pondere $M$, quare sursum sollicitabitur vi

$$= \frac{mnMx}{(m-n)V},$$

quae vis quia est proportionalis spatio $x$ quo corpus descendit, indicat oscillationes fore isochronas. Quocirca si ponatur longitudo penduli simplicis isochroni $= L$, oritur vis ad situm aequilibrii urgens $= \frac{Mx}{L}$, unde resultat ista aequatio

$$\frac{mn}{(m-n)V} = \frac{1}{L},$$

seu

$$L = \frac{(m-n)V}{mn} = V\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right).$$

Ac si amplitudo vasis $KL = m$ infinita statuatur, erit longitudo penduli isochroni $L = \frac{V}{n}$: omnino uti Tu invenisti, Vir Celeberrime.

Ceterum Tibi placuisse, Vir Excellentissime, theoremata mea de reductione quarundam formularum integralium magnopere gaudeo, etiamsi methodo non satis directa ad ea pervenerim; tamen methodus ita est comparata, ut ejusmodi theoremata inde secutum esse praeviderim. Interim eo majori attentione digna mihi ea videntur, quo minus via directa ad

ea vel demonstranda vel invenienda patet: hocque ipso magnopere discrepant a theorematis in se quidem elegantissimis, quorum mentionem facis, scilicet esse

$$\int \frac{a^2 dx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}}$$

casu quo $x = a$ quadrantem circumferentiae ellipseos, cujus axis minor est $2a$, et major $= 2a\sqrt{2}$; item esse eodem casu

$$\int \frac{a^2 dx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}} = 3 \int \frac{x^4 dx}{a^2 \sqrt{(a^4 - x^4)}},$$

quorum quidem theorematum veritas, statim ac investigatur sponte se prodit. Quando autem scripsi formulas

$$\int \frac{a^2 dx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}} \text{ et } \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}}$$

ita esse comparatas, ut inter se comparari nequeant, id utique latissimo sensu intellectum volo, neque methodis consuetis relationem ullam definiri posse assero. Hocque pacto has formulas discernere volui ab aliis, quae inter se comparari possunt, cujusmodi sunt

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}};\ \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}};\ \int \frac{x^6 dx}{\sqrt{(a^4 - x^4)}};\ \text{etc.}$$

quarum si unius integratio esset data, simul reliquarum omnium integrationes haberentur. Circa hujusmodi comparationes mihi jam pridem ipse aliqua theoremata formavi, ex quibus statim perspicere possum utrum unius formulae integratio ad integrationem alius cujusdam reduci queat necne. Theoremata vero ipsa ita se habent; generaliter quidem sine ulla ad definitum quendam ipsius $x$ valorem restrictione[1]).

I. $$\int x^{m-n} dx\, (a^n - x^n)^k$$
$$= \frac{x^{m-n+1}(a^n - x^n)^{k+1}}{(m-n+1)\, a^n} + \frac{m+nk+1}{(m-n+1)\, a^n} \int x^m dx\, (a^n - x^n)^k$$

II. $$\int x^{m+n} dx\, (a^n - x^n)^k$$
$$= -\frac{x^{m+1}(a^n - x^n)^{k+1}}{m+nk+n+1} + \frac{(m+1)\, a^n}{m+nk+n+1} \int x^m dx\, (a^n - x^n)^k$$

1) So viel ich weiß, rührt diese übersichtliche Zusammenstellung der 6 Reduktionsformeln von Euler her. Selbstverständlich enthält sie kein wesentlich Neues, denn schon Newton hatte sich mit ähnlichen Untersuchungen beschäftigt; übrigens können vier der Gleichungen durch einfache algebraische Transformationen aus den zwei übrigen erhalten werden, und diese zwei (Gl. II und V) hatte Nikolaus I Bernoulli schon 1720 benutzt, um einen von Johann Bernoulli aufgestellten Satz zu beweisen (siehe Johann Bernoulli, *Opera omnia*, t. II S. 418, 419—422).

$$\text{III.}\quad \int x^{m-n}dx\,(a^n-x^n)^{k+1}$$
$$= \frac{x^{m-n+1}(a^n-x^n)^{k+1}}{m-n+1} + \frac{nk+n}{m-n+1}\int x^m dx\,(a^n-x^n)^k$$

$$\text{IV.}\quad \int x^{m+n}dx\,(a^n-x^n)^{k-1}$$
$$= -\frac{x^{m+1}(a^n-x^n)^k}{nk} + \frac{m+1}{nk}\int x^m dx\,(a^n-x^n)^k$$

$$\text{V.}\quad \int x^m dx\,(a^n-x^n)^{k+1}$$
$$= \frac{x^{m+1}(a^n-x^n)^{k+1}}{m+nk+n+1} + \frac{(nk+n)a^n}{m+nk+n+1}\int x^m dx\,(a^n-x^n)^k$$

$$\text{VI.}\quad \int x^m dx\,(a^n-x^n)^{k-1}$$
$$= -\frac{x^{m+1}(a^n-x^n)^k}{nka^n} + \frac{m+nk+1}{nka^n}\int x^m dx\,(a^n-x^n)^k.$$

Horum theorematum primum statim, ponendo $n=4$; $m=4$; $k=-\frac{1}{2}$ prebet

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(a^4-x^4)}} = \frac{x\sqrt{(a^4-x^4)}}{a^4} + \frac{3}{a^4}\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(a^4-x^4)}},$$

unde casu quo $x=a$ erit

$$\int\frac{a^4dx}{\sqrt{(a^4-x^4)}} = 3\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(a^4-x^4)}}.$$

Simul autem intelligitur ex his formulis cujusmodi formulae integrales generaliter cum ista $\int\frac{a^2dx}{\sqrt{(a^4-x^4)}}$ comparari queant, mox autem patebit inter illas non contineri istam $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{(a^4-x^4)}}$, ex quo eo magis notatu dignum est productum harum duarum formularum casu quo $x=a$ ope circuli indicari posse, cum neutrius in se spectatae integratio a quadratura circuli pendeat, neque inter se comparari queant.

Methodus autem qua ego in inventione horum novorum theorematum sum usus, huc redit. Resolvi utramque formulam seorsim in expressiones infinitas, quas deinceps in se invicem multiplicavi, ac producti summam peculiari modo investigavi,[1]) quam per circulum exprimi posse deprehendi.

1) Die Methode, worauf Euler hier hindeutet, ist wohl die, welche er in seiner Abhandlung *De productis ex infinitis factoribus ortis* (Comment. acad. sc. Petrop. 11, 1739 [gedruckt 1750], S. 3—31) anwendete (siehe speziell S. 11—12).

Deinde vero hanc methodum magis extendi, ejusque ope reliqua Theoremata Filio Tuo Celeb. missa elicui.[1])

Incidi nuper in hanc aequationem differentialem tertii ordinis

$$a^3 d^3 y = y dx^3,$$

posito $dx$ constante, quae etiamsi prima fronte integratu difficilis visa esset, triplicem tamen integrationem admittebat, ac concessis circuli et hyperbolae quadraturis ad aequationem finitam se reduci patiebatur;[2]) aequatio vero integralis haec prodiit

$$y = be^{\frac{x}{a}} + ce^{-\frac{x}{2a}} \text{sinū Arcus.} \frac{(f+x)\sqrt{3}}{2a},$$

denotante $e$ numerum, cujus logarithmus est $= 1$, seu

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} + \text{etc.};$$

arcus vero $\frac{(f+x)\sqrt{3}}{2a}$ in circulo cujus radius $= 1$ abscindi, ejusque sinus in alterum integralis terminum introduci debet; at $b$, $c$ et $f$ sunt quantitates constantes arbitrariae ex tribus integrationibus ortae. Quodsi autem integratio aequationis istius alio modo tentetur, prouti pluribus modis absolvi potest, pervenitur tandem ad hujusmodi aequationem

$$v dv + dv\ (az^2 + bz + c) = v dz\ (az + f),$$

quae ergo necessario separationem variabilium atque constructionem ope circuli et hyperbolae admittere debet: quo autem pacto separatio obtineatur, id quidem non adeo obvium videtur, methodo tamen quadam ab HERMANNO quondam in Comm. Tom. II. exposita[3]) absolvi potest; id quod fit ponendo $dv = pdz$ atque eliminando $v$.

Tractavi quoque nuper circa fluxum ac refluxum maris occupatus[4])

1) Vgl. den Brief von DANIEL BERNOULLI an EULER vom 12. Dezember 1742 (FUSS, a. a. O. II, S. 514).

2) Auf diesen Passus hätte ich eigentlich in meinem Artikel *Sur la découverte de l'intégrale complète des équations différentielles linéaires à coefficients constants* (Biblioth. Mathem. 1897, S. 43—50) hinweisen sollen, denn daraus scheint hervorzugehen, daß EULER seine allgemeine Integrationsmethode für unvollständige lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten nach dem 5. Mai 1739 erfand.

3) J. HERMANN, *De constructione aequationum differentialium primi gradus per viam separationis indeterminatarum;* Comment. acad. sc. Petrop. 2, 1727 (gedruckt 1729), S. 188—199.

4) Siehe die Preisschrift von EULER, *Inquisitio physica in causam fluxus et refluxus maris;* Pièces qui ont remporté le prix de l'académie royale des sciences en M. DCC. XL. sur le flux et reflux de la mer (Paris 1741), S. 235—350.

sequens problema mechanicum, quo singularis oscillationum casus continetur.[1]) In recta $AB$ [Fig. 3] extat corpus $C$ mobile sursum et deorsum quod a duobus viribus sollicitatur. Altera harum virium pendet a distantia corporis $C$ a puncto $C$, ipsisque distantiis est proportionalis; a qua corpus continuo versus punctum $C$, nisi ibi existat, sollicitatur. Quod si igitur corpus a sola hac vi moveretur tum circa punctam $C$ oscillationes modo ascendendo modo descendendo perageret tautochronas itaque habetur casus oscillationum isochronarum Hugenianum notissimus. Pono autem corpus praeter hanc vim urgeri ab alia cujus tam directio quam quantitas a tempore jam effluxo pendeat. Tempora scilicet per arcus circuli $EMGFmH$ exprimo, viresque sollicitantes sinibus arcuum tempora exprimentium proportionales facio; ita ut corpus sursum sollicitetur, si sinus fuerint affirmativi, deorsum vero, si sinus sint negativi. Sic si temporis initium ponatur in $E$, post tempus $EM$ corpus sursum pelletur vi, quae est ut sinus $PM$; hocque pacto sursum ab ista vi urgebitur quoad tempus $EGF$ durat; cum autem praeterlabitur majus tempus, puta $EGFm$, tum corpus deorsum sollicitabitur vi, quae erit ut sinus $pm$, haecque sollicitatio deorsum tendens durabit, donec tempus recidat in punctum $E$, ex quo sollicitationes sursum directae redibunt. Questio igitur huc redit, ut motus corporis $C$ ab his duabus viribus sollicitati definiatur, ejusque locus in recta $AB$ ad quodvis tempus assignetur. Ponamus tempus jam effluxisse, quod arcu $EM$ indicetur, tumque corpus in puncto $S$ versari. Sit distantia $CS = s$, arcus seu tempus $EM = t$, ejus sinus $PM = y$, posito radio circuli $OE = 1$, ita ut sit

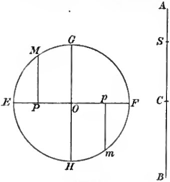


Fig. 3.

$$t = \int \frac{dy}{\sqrt{(1 - yy)}};$$

ex his solutio problematis perducitur ad hanc aequationem

$$a^2 dds + sdt^2 = bydt^2$$

sumto elemento $dt$ constante. Ista autem aequatio differentio-differentialis

1) Siehe die Abhandlung von Euler *De novo genere oscillationum;* Comment. acad. sc. Petrop. 11, 1739 (gedruckt 1750), S. 128—149.

praeter opinionem bis se integrari passa est,[1]) atque ex aequatione integrali situm corporis $C$ ad quodvis tempus una cum ipsius celeritate definire potui. Prodierunt autem pro varia relatione litterarum $a$ et $b$, a quibus ambae vires sollicitantes pendent, tam diversi ac mirabiles motus, ut eorum indoles nisi calculo peracto praevideri omnino nequeat. Circa hunc motum id notatu dignum accidit, unico casu spatia per quae corpus $C$ in recta $AB$ excurrit perpetuo crescere, oscillationes tamen ejusdem durationis manere: reliquis autem casibus omnibus excursiones esse finitae ac definitae magnitudinis.

Ceterum denuo veniam peto ob lineas illas in superioribus litteris deletas,[2]) hancque ob causam integram epistolam libenter transcripsissem, si id tempus permisisset. Interim noli suspicari, Vir Excellentissime, illas lineas eo fuisse deletas,[3]) .... Hunc itaque ne idem mihi usu eveniat, ...[4])

Quod superest Tuo me favori ac benevolentiae commendo, Tibi omnia fausta et felicia ex animo apprecaris. Vale, Vir Excellentissime, atque adhuc diutissime rei litterariae praeesse ne graveris.

Dabam Petropoli d. 5. Maji
1739.

Aufschrift:

*A Monsieur*
*Monsieur* Jean Bernoulli
*Professeur en Mathematiques, et Membre Honoraire des Academies de St. Petersburg, de celles de Paris, de Londres etc.*
*à*
*Bâle.*

## 20*.

**Bernoulli an Euler August (?) 1739.**

**Verloren; zitiert in Eulers Brief vom 15. September 1739 („tardius ad litteras tuas postremas respondeo, quam quidem optassem").**

## 21.

## Euler an Bernoulli 15. September 1739.

**Antwort auf Bernoullis verlorenen Brief vom August (?) 1739. Original in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. Auszüge veröffentlicht von Eneström in der Biblioth. Mathem. 1897, S. 43—44.**

---

1) Hier beschäftigt sich Euler also mit einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten von der Form

$$a^2 \frac{d^2 s}{dt^2} + s = b \sin t.$$

Eulers Methode zur Integration dieser Gleichung ist auseinandergesetzt in seiner oben zitierten Preisschrift S. 300—304 und in der vielleicht früher redigierten aber später erschienenen Abhandlung: *De novo genere oscillationum* (vgl. S. 32 Anm. 1), S. 134—141.

2) Vgl. Biblioth. Mathem. 5, 1904, S. 285 Anm. 1.

3) Hier sind zwei Zeilen gestrichen, vielleicht von Johann II Bernoulli.

4) Hier sind zwölf Zeilen gestrichen, ohne Zweifel im Zusammenhang mit der soeben erwähnten Streichung.

*Inhalt.* Die in Aussicht gestellte zweite Abteilung von Johann Bernoullis *Dissertatio hydraulica.* — Fertigstellung neuer Teile der Commentarii der Petersburger Akademie. — Eulers Methode, die Reihe

$$\frac{1}{1 \pm n} + \frac{1}{4 \pm n} + \frac{1}{9 \pm n} + \frac{1}{16 \pm n} + \cdots$$

zu summieren. — Integration der unvollständigen linearen Differentialgleichungen $n$ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Viro Celeberrimo atque Excellentissimo Joanni Bernoulli S. P. D. Leonhardus Euler.

Tardius ad litteras Tuas postremas, Vir Excellentissime, respondeo, quam equidem optassem atque officium meum ergo Te summum postulasset: cujus morae causa iu absentia Illustrissimi Praesidis Nostri, qui cum Aula Imperatoria Peterhofii commorabatur, est posita ....[1])

Ego interea summo studio expecto alteram partem meditationum Tuarum hydraulicarum, quarum desiderium apud me eo majus existit, quod multo plura, quam ego quidem suspicatus eram, in iis praestitisse nuncias; quamobrem Te, Vir Celeb., academiae nomine maximopere rogo, ut hoc scriptum, quamprimum licuerit, nobiscum communicare velis; neque ab hoc proposito retardatione editionis Commentariorum nostrorum deterreare. Nam nunc quidem sex tomi priores jam prodierunt, et septimus non solum sub prelo sudat, sed etiam brevi temporis spatio usque ad decimum publice comparebunt; preterea ego etiam operam dabo, ut scripta Tua eximia his ipsis Tomis, qui nunc parantur, commode inseri queant. Ceterum Tomos, qui Tibi adhuc desunt, Lipsiae accipies, una cum Tractatu meo de *Musica*, quem ut benevole accipere ac perlegere velis, vehementer etiam atque etiam rogo.

Perscripsi nuper Filio Tuo Clar. summationem meam hujus seriei:

$$\frac{1}{1 \pm n} + \frac{1}{4 \pm n} + \frac{1}{9 \pm n} + \frac{1}{16 \pm n} + \frac{1}{25 \pm n} + \text{etc.} = s;$$

cujus seriei casum, quo $n = 0$ jam pridem inveneram, Tecumque, Vir Celeberrime, communicaveram,[2]) quem etiam patruelis Tuus, Vir Consultissimus Nicolaus Bernoulli, examini subjicere est dignatus.[3]) Methodus, qua ad summam hujus seriei perveni, quia mihi quidem peculiaris videtur, Tibi fortasse, Vir Celeberime, haud erit ingrata: ea autem ita se habet. Posita summa seriei quam quaero $= s$, singulos terminos modo consueto in series geometricas converto; ipsi $n$ vero valorem affirmativum tribuo,

1) Hier sind dreizehn Zeilen gestrichen, möglicherweise von Johann II Bernoulli.

2) Vgl. den Brief von Johann Bernoulli an Euler vom 2. April 1737 (Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, S. 253).

3) Vgl. Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, S. 276.

quia si hoc casu summa fuerit reperta, alter casus se sponte offert ponendo $n$ negativum. Sit igitur

$$s = \frac{1}{1+n} + \frac{1}{4+n} + \frac{1}{9+n} + \frac{1}{16+n} + \frac{1}{25+n} + \text{etc.}$$

erit

$$\begin{aligned} s = &\frac{1}{1} - \frac{n}{1} + \frac{n^2}{1} - \frac{n^3}{1} + \frac{n^4}{1} - \frac{n^5}{1} + \text{etc.} \\ &+ \frac{1}{2^2} - \frac{n}{2^4} + \frac{n^2}{2^6} - \frac{n^3}{2^8} + \frac{n^4}{2^{10}} - \frac{n^5}{2^{12}} + \text{etc.} \\ &+ \frac{1}{3^2} - \frac{n}{3^4} + \frac{n^2}{3^6} - \frac{n^3}{3^8} + \frac{n^4}{3^{10}} - \frac{n^5}{3^{12}} + \text{etc.} \\ &+ \frac{1}{4^2} - \frac{n}{4^4} + \frac{n^2}{4^6} - \frac{n^3}{4^8} + \frac{n^4}{4^{10}} - \frac{n^5}{4^{12}} + \text{etc.} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

sive

$$\begin{aligned} s = &1\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \text{etc.}\right) \\ &- n\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \text{etc.}\right) \\ &+ n^2\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{6^6} + \text{etc.}\right) \\ &- n^3\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{6^8} + \text{etc.}\right) \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Quodsi autem ponatur $\pi$ peripheria circuli, cujus diameter est $= 1$, summatio singularum serierum per potestates ipsius $\pi$ absolvi potest, ut ante jam ostendi:[1]) erit nempe existente

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{etc.} &= \alpha\pi^2, \quad \alpha = \frac{1}{6}, \\ 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.} &= \beta\pi^4, \quad \beta = \frac{2\alpha^2}{5}, \\ 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \text{etc.} &= \gamma\pi^6, \quad \gamma = \frac{4\alpha\beta}{7}, \\ 1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \text{etc.} &= \delta\pi^8, \quad \delta = \frac{4\alpha\gamma + 2\beta^2}{9}, \\ &\varepsilon = \frac{4\alpha\delta + 4\beta\gamma}{11}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Erit igitur:

$$s = \alpha\pi^2 - \beta n\pi^4 + \gamma n^2\pi^6 - \delta n^3\pi^8 + \varepsilon n^4\pi^{10} - \text{etc.}$$

hincque

$$\begin{aligned} 2s^2 = 2\alpha^2\pi^4 - 4\alpha\beta n\pi^6 &+ 4\alpha\gamma n^2\pi^8 - 4\alpha\delta n^3\pi^{10} + 4\alpha\varepsilon n^4\pi^{12} - \text{etc.} \\ &+ 2\beta^2 \qquad\;\; - 4\beta\gamma \qquad\;\; + 4\beta\delta \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; + 2\gamma^2 \end{aligned}$$

1) Vgl. den Brief von Euler an Johann Bernoulli vom 27. August 1737 Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, S. 257—258).

Quare si superiores litterarum $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ etc. determinationes in subsidium vocentur, erit

$$2s^2 = 5\beta\pi^4 - 7\gamma n\pi^6 + 9\delta n^2\pi^8 - 11\varepsilon n^3\pi^{10} + 13\zeta n^4\pi^{12} - \text{etc.}$$

Multiplicetur ubique per $d\pi$ et integretur, erit

$$\int 2s^2 d\pi = \beta\pi^5 - \gamma n\pi^7 + \delta n^2\pi^9 - \varepsilon n^3\pi^{11} + \zeta n^4\pi^{13} - \text{etc.}$$

Haec vero eadem series a superiori ita pendet ut sit

$$\frac{\alpha\pi^3 - \pi s}{n} = \beta\pi^5 - \gamma n\pi^7 + \delta n^2\pi^9 - \varepsilon n^3\pi^{11} + \zeta n^4\pi^{13} - \text{etc.}$$

Quocirca ob $\alpha = \frac{1}{6}$ erit

$$\frac{\pi^3}{6} - \pi s = 2n\int ss d\pi$$

ac differentiando habebitur

$$\frac{\pi^2 d\pi}{2} - \pi ds - s d\pi = 2nss d\pi,$$

quae debito modo integrata praebet¹)

$$s = \frac{\pi\sqrt{n} - 1}{2n} + \frac{\pi\sqrt{n}}{n(e^{2\pi\sqrt{n}} - 1)}$$

denotante $e$ numerum, cujus logarithmus est $= 1$. Haecque expressio idcirco est summa hujus seriei

$$\frac{1}{1+n} + \frac{1}{4+n} + \frac{1}{9+n} + \frac{1}{16+n} + \text{etc.}$$

---

1) Daß Euler die vorgelegte unendliche Reihe ganz wie ein Polynom mit einer endlichen Anzahl von Termen behandelt, ist ja eigentlich bei einem Mathematiker des 18. Jahrhunderts nicht besonders auffallend. Kühner ist dagegen dem Anschein nach sein Verfahren, die Zahl $\pi$ als eine *veränderliche* Größe zu betrachten, aber man findet leicht, daß dies Verfahren hier durchaus korrekt ist, da es sich in Wirklichkeit nur um die Summe der Reihe

$$\alpha x^2 - \beta n x^4 + \gamma n^2 x^6 - \delta n^3 x^8 + \varepsilon n^4 x^{10} - \ldots$$

handelt. Bekanntlich hat sich Euler in seinen Schriften sehr oft mit der Summation der Reihe

$$\frac{1}{1 \pm n} + \frac{1}{4 \pm n} + \frac{1}{9 \pm n} + \frac{1}{16 \pm n} + \cdots$$

beschäftigt, aber der hier benutzten Methode hat er sich meines Wissens dabei nicht bedient. Freilich hat er in seiner Abhandluug *De seriebus quibusdam considerationes* (Comment. acad. sc. Petrop. 12, 1740 [gedruckt 1750], S. 53—96) ein paarmal (siehe S. 86, 89) $\pi$ als veränderliche Größe betrachtet, aber für einen anderen Zweck.

quando quidem $n$ significat numerum affirmativum. Si autem $n$ sit numerus negativus; ut sit

$$s = \frac{1}{1-n} + \frac{1}{4-n} + \frac{1}{9-n} + \frac{1}{16-n} + \text{etc.}$$

habebitur ista aequatio

$$\frac{\pi^2 d\pi}{2} - \pi ds - s d\pi = -2nss d\pi,$$

quae pariter integrata suppeditat istam summae expressionem:

$$s = \frac{1}{2n} - \frac{\pi}{2\sqrt{n}} \cot \text{A}.\, \pi\sqrt{n},$$

in qua cot A. $\pi\sqrt{n}$ mihi denotat in circulo cujus radius $= 1$, cotangentem arcus, qui sit $= \pi\sqrt{n}$; in tali autem circulo $\pi$ denotabit dimidiam peripheriam, seu arcum $180^0$. Quoties igitur fuerit $\pi\sqrt{n}$ arcus vel $90^0$, vel $270^0$, vel $450^0$, vel etc., hoc est vel $n = \frac{1}{4}$, vel $n = \frac{9}{4}$, vel $n = \frac{25}{4}$, vel etc., summa seriei ob cotangentem $= 0$, erit $= \frac{1}{2n}$. Utraque autem expressio, quae prodiit tam pro $n$ affirmativo quam negativo, etiamsi $\pi$ plus una dimensione nusquam habeat, tamen posito $n = 0$, praebet, $s = \frac{1}{6}\pi^2$; qui est singularis casus methodi Tuae, Vir Celeb., determinandi valores expressionum, quae certo quodam casu videantur fieri indefinitae. Istam meam summandi methodum rogo, ut cum Viro Excellentissimo Nicholao Bernoullio cum summi mei erga Ipsum officii testificatione communicare velis

Inveni nuper singularem modum aequationes differentiales altiorum graduum una vice ita integrandi, ut statim ad aequationem finitam perveniatur. Patet autem haec methodus ad omnes aequationes, quae in hac generali forma continentur:

$$y + \frac{ady}{dx} + \frac{bddy}{dx^2} + \frac{cd^3y}{dx^3} + \frac{dd^4y}{dx^4} + \frac{ed^5y}{dx^5} + \text{etc.} = 0$$

posito $dx$ constante. Ad hanc aequationem generatim integrandam considero aequationem hanc seu expressionem algebraicam:

$$1 - ap + bp^2 - cp^3 + dp^4 - ep^5 + \text{etc.} = 0.$$

Haec expressio si fieri potest in factores simplices reales hujus formae $1 - \alpha p$ resolvatur: si autem hoc fieri nequeat, resolvatur in factores duarum dimensionum hujus formae $1 - \alpha p + \beta pp$, quae resolutio realiter semper institui potest, hocque modo prodibit superior expressio sub forma producti ex factoribus vel simplicibus $1 - \alpha p$ vel duarum dimensionum $1 - \alpha p + \beta pp$, omnibus realibus. Facta autem hac resolutione, dico valorem ipsius $y$ finitum per $x$ et constantes expressum constare ex tot

membris, quot factores habeantur expressionis illius algebraicae, singulosque factores praebere singula integralis membra. Nempe factor simplex $1 - \alpha p$ dabit integralis membrum

$$Ce^{-\frac{x}{\alpha}},$$

factor autem compositus $1 - \alpha p + \beta pp$ dabit integralis membrum hoc

$$e^{-\frac{\alpha x}{2\beta}}\left(C \sin A.\ \frac{x\sqrt{(4\beta - \alpha\alpha)}}{2\beta} + D \cos A.\ \frac{x\sqrt{(4\beta - \alpha\alpha)}}{2\beta}\right)$$

ubi sin A. et cos A. mihi denotant sinum vel cosinum arcus sequentis in circulo cujus radius $= 1$ sumti: notandum autem est, si expressio $1 - \alpha p + \beta pp$ in factores simplices reales resolvi nequeat uti pono, tum fore $4\beta > \alpha\alpha$ ideoque integrale reale. Proposita sit exempli gratia haec aequatio

$$y dx^4 = k^4 d^4 y, \text{ seu } y - \frac{k^4 d^4 y}{dx^4} = 0;$$

ex hac nascetur expressio algebraica haec $1 - k^4 p^4$, cujus factores reales sunt tres $1 - kp$, $1 + kp$ et $1 + k^2 p^2$; ex quibus oritur aequatio integralis haec:

$$y = Ce^{-\frac{x}{k}} + De^{\frac{x}{k}} + E \sin A.\ \frac{x}{k} + F \cos A.\ \frac{x}{k};$$

in qua expressione ob quadruplicem integrationem unica operatione peractam quatuor insunt novae constantes $C$, $D$, $E$ et $F$, uti natura integrationis postulat. Alia vice, si tibi, Vir Excellentissime, placuerit, hujus methodi demonstrationem perscribam.

Vale interim, Vir Celeberrime, Tuaque ergo me benevolentiam atque amorem mihi conserva.

Dabam Petropoli ad 15 d. Sept. A. 1739.

## 22.

### Bernoulli an Euler 9. Dezember 1739.

Antwort auf Eulers Brief vom 15. September 1739. Original verloren. Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. S. 26—32 nach einer von N. Fuss verfertigten Abschrift des Originals.

*Inhalt.* Über die Verzögerung der Fertigstellung der zweiten Abteilung von Johann Bernoullis *Dissertatio hydraulica.* — Über die Summe der Reihe

$$\frac{1}{1 \pm n} + \frac{1}{4 \pm n} + \frac{1}{9 \pm n} + \frac{1}{16 \pm n} + \cdots$$

besonders wenn $n$ eine Quadratzahl ist. — Über die Integration der unvollständigen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. — Über die Schwingungen schwimmender Körper. — Zwei hierher gehörende hydrodynamische Probleme. — Eine meteorologische Beobachtung.

Viro Celeberrimo atque longe Eximio LEONHARDO EULERO S. P. D.
JOH. BERNOULLI.

Jam per aliquot menses valetudine usus minus prospera, ut mihi fieri solet hac imprimis anni tempestate, ac subinde lecto affixus ob insultus podagricos, promtius respondere non potui ad litteras Tuas novissimas multa eruditione refertas; quam ipsam ob causam ne nunc quidem adhuc transmittere possum secundam partem meditationum mearum hydraulicarum, utpote nondum omnino descriptam, etiamsi materiam a longo jam tempore in parato habeam. Adde quod multo copiosior erit haec altera pars atque sui triente superabit primam, unde facile intelliges, describendi laborem non posse non esse mihi molestissimum, cum ob hebetudinem oculorum tum ob tremorem manuum, quae duo sunt mala quotidie fere ingravescentia; quodque pessimum accidit hac in re est, quod ipse cogor describere, cum nullus mihi detur amanuensis, qui talia describere velit vel possit . . .[1])

Filius meus professor Lipsiam misit chirographum Exc. SCHUMACHERI ad repetenda exemplaria Commentariorum Tuique tractatus de *Musica*, pro quo debitas Tibi gratias ago, quem, ubi accepero, legem magna cum voluptate, et eo majore quidem, quod de hac materia hactenus nihil mihi videre contigit, quod mihi ex asse satisfacere potuerit.

Methodus, qua uteris, Vir Exc., ad summandam seriem

$$\frac{1}{1\pm n}+\frac{1}{4\pm n}+\frac{1}{9\pm n}+\text{etc.}$$

est omnino curiosa et extraordinaria, sed simul postulans calculum longum et intricatum, a cujusmodi instituendis jam a multo tempore absterreor, ob senectutis incommoda superius memorata, contentus iis, quae sola vi meditationum, sine longa analysi, eruere possum. Daretur forsan, si velles sagacitatem Tuam consuetam consulere, alia via brevior magisque trita idem praestandi; sunt enim infiniti casus jam dudum soluti, nimirum omnes illi, quos olim communi opera cum Fratre meo defuncto tractavimus[2]), in quibus Tuum $n$ significat numerum quadratum cum praefixo —. Aperi modo, si habes, tractatulum posthumum Fratris mei *De arte conjectandi*, ubi pag. 252 reperies[3]) hoc problema solutum: *Invenire summam*

1) Zwischen „possit“ und „Filius“ stand offenbar im Briefe etwas, das bei Fuss ausgelassen ist. Da das Konzept des Briefes in Stockholm fehlt, kann ich nicht entscheiden, ob möglicherweise das bei Fuss ausgelassene sich auf eine überstrichene Stelle bezieht, die vermutlich in der von ihm benutzten Abschrift fehlt.

2) Soviel ich weiß, hat JOHANN BERNOULLI in keiner seiner eigenen Schriften diese Reihe behandelt

3) Die von JOHANN BERNOULLI zitierte Stelle findet sich auch in JAKOB BERNOULLIS *Opera* (Genevae 1744), S 395

*serierum* LEIBNITI*anarum aliarumque, quarum denominatores sunt numeri quadrati aut trigonales, minuti aliis quadratis vel trigonalibus.* Exemplum habetur pag. 252 hujus seriei:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \text{etc.},$$

hoc est hujus:

$$\frac{1}{4-1} + \frac{1}{9-1} + \frac{1}{16-1} + \frac{1}{25-1} + \text{etc.}$$

quae est $= \frac{3}{4}$. Item pag. seq. 254 hoc exemplum habetur:[1])

$$\frac{1}{7} + \frac{1}{16} + \frac{1}{27} + \frac{1}{40} + \text{etc.}$$

seu

$$\frac{1}{16-9} + \frac{1}{25-9} + \frac{1}{36-9} + \frac{1}{49-9} + \text{etc.}$$

quae series est $= \frac{49}{120}$. Tuum est examinare, an Tua sublimia cum hisce trivialibus quadrent.

Non minus quoque curiosus videtur modus Tuus aequationes differentiales altiorum graduum una vice ita integrandi, ut statim ad signationem finitam perveniatur. Memini me jam ante multos annos simile quid inveuisse, quod in adversariis meis consignavi, sed nunc inquirere non vacat. Ex paucis quae in hanc rem adumbrationis causa adjicis sine demonstratione, concludo fere, Tibi ad has meditationes occasionem praebuisse ea, qua olim publice dedi pro solutione problematis COTESiani a TAYLORO propositi omnibus geometris non Anglis, ubi modum tradidi[2]) resolvendi quantitates integrandas in factores reales, eosque discernendi a non realibus. Quod vero attinet ad generalem Tuam formulam:

$$y + \frac{a\,dy}{dx} + \frac{b\,ddy}{dx^2} + \frac{c\,d^3y}{dx^3} + \frac{d\,d^4y}{dx^4} + \text{etc.} = 0,$$

posita $dx$ pro constante, huic quidem satisfacere potest semper aliqua ex curvis logarithmicis, cujus tantum subtangens est quaerenda, quod ita facio. Aequatio generalis pro istis curvis haec est: $y = n^{x:p}$, ubi $p$ denotat subtangentem generalis logarithmicae, et $n$ numerum, cujus logarithmus = unitati, ita ut $1n = 1$. Hoc ita exprimendi morem primus ego introduxi jam ante exitum superioris saeculi, id quod nunc magnum usum habere compertum est. Differentiando ergo continuo $n^{x:p}$ habebuntur valores ipsarum $dy$, $ddy$, $d^3y$, $d^4y$, etc. nimirum:

1) Siehe JAKOB BERNOULLI, a. a. O. S. 397.

2) Siehe JOHANN BERNOULLI, *Clar.* TAYLORI *mathematici Angli problema analyticum, quod omnibus geometris non-Anglis proposuit, solutum;* Acta Eruditorum 1719. S. 256—270 [= *Opera omnia*, t. II S. 402—418].

$$dy = \frac{dx}{p} \cdot n^{x:p},\ ddy = \frac{dx^2}{pp} \cdot n^{x:p},\ d^3y = \frac{dx^3}{p^3} \cdot n^{x:p},\ d^4y = \frac{dx^4}{p^4} \cdot n^{x:p}, \text{ etc.}$$

Quibus valoribus substitutis in formula Tua

$$y + \frac{a\,dy}{dx} + \frac{b\,ddy}{dx^2} + \text{etc.}$$

mutabitur illa in hanc:

$$n^{\frac{x}{p}}\left(1 + \frac{a}{p} + \frac{b}{p^2} + \frac{c}{p^3} + \frac{d}{p^4} + \text{etc.}\right) = 0.$$

Diviso itaque per $n^{x:p}$ et multiplicato per maximam dimensionem ipsius $p$, orietur aequatio algebraica, cujus quaelibet radix $p$ dabit subtangentem logarithmicae quaesitae. Exemplum quod das aequationis differentialis quarti gradus

$$y\,dx^4 = k^4 d^4y, \text{ seu } y - \frac{k^4 d^4 y}{dx^4} = 0$$

ita facillime solvitur. Cum enim hic litterae $a$, $b$, $c$ deficiant atque sit $d = -k^4$, habebis hanc aequationem quatuor dimensionum, sed non affectam,

$$p^4 - k^4 = 0 \text{ seu } p = k.$$

Dico igitur, logarithmicam, cujus subtangens $= k$, satisfacere aequationi propositae

$$y - \frac{k^4 d^4 y}{dx^4} = 0.$$

Fateor interim hoc modo pro hoc exemplo unam tantum exhiberi logarithmicam, a Te vero exhibentur plures curvae

$$y = Ce^{-\frac{x}{k}} + De^{\frac{x}{k}} + E \sin \text{A}. \frac{x}{k} + F \cos \text{A}. \frac{x}{k}.$$

Fateor etiam, si proponeretur

$$y + \frac{k^4 d^4 y}{dx^4} = 0,$$

fore meam logarithmicam impossiblem seu imaginariam; sed idem etiam in Tua solutione, licet universaliore, contigeret, nam apud Te foret pariter $k$ impossible, seu non reale.

Cum nuper mihi aliquantulum plus otii nacto in mentem rediret id quod scripseras de oscillationibus corporum in aqua natantium, volebam per me ipsum inquirere in longitudinem penduli isochroni oscillationibus quas subeunt hujusmodi corpora in aqua natantia, postquam ex statu quietis nonnihil deturbata fuerunt per vim, cujus directio est horizontalis. Post aliquot horarum meditationem compos factus sum perfectae solutionis, ut mihi quidem videtur, quae Tuae, ceu apparet, satis similis est; Ecce eam[1]). Retentis litteris et schema quibus usus es pro parte in epistola

1) Vgl. Johann Bernoulli, *Opera omnia*, t. IV S. 287—293.

data 30 Julii 1738, voco praeterea $g$ vim gravitatis acceleratricis qua corpora naturaliter ad descensum verticalem animantur, item $n$ angulum minimum, quo corpora ex situ verticali $OG$ paululum inclinantur, eritque vis motrix applicanda in $O$ horizontaliter ad restituendum corpus ad situm quietis pro quolibet angulo minimo $\omega$

$$= \frac{ngV}{OG}\left(OG + \frac{\int(y^2+z^2)dx}{3V}\right);$$

longitudinem penduli simplicis isochroni invenio

$$= \frac{3\int rr\delta p}{3V.OG + \int(y^2+z^2)dx}$$

ubi per $p$ intelligo volumen singularum particularum, quae totum corpus innatans heterogeneum componunt, $\delta$ exprimit densitatem cujuslibet particulae $p$, $r$ distantiam cujusque, perpendicularem, ab axe, circa quem fit oscillatio, tandem aquae densitas supponitur $= 1$ seu unitati, atque ita tota expressio longitudinis quaesitae erit geometrica, nil nisi lineas exprimens. Si corpus innatans est homogeneum, hoc est si ubique $\delta$ est constans, seu habens ad unitatem rationem invariabilem, erit $G$ supra $O$, adeoque $OG$ negativa; quod si praeterea $OG$ tum sit etiam major quam $\int(y^2+z^2)dx : 3V$, fiet vis motrix negativa, adeoque corpus inclinatum non restituetur, sed praecipitabitur, quousque labi potest. Sciendum quoque est rectam $AB$ inter oscillandum eum semper situm capere debere, ut ab una parte $\int yydx$ sit $= \int zzdx$ ab altera parte, quod sine omni dubio Tu, Vir Cel., etiam observasti. Denique id etiam non est omittendum, quod centrum gravitatis $G$ secundum vigorem non omnino immobile maneat durante oscillatione corporis, sed alternatim ascendat et descendat, quamvis isti ascensus et descensus sunt infinities minores quam excursiones puncti $O$, quae ipsae jam sunt infinite parvae. Hinc tuto considerari potest centrum gravitatis $G$ tanquam omnino immobile, dum centrum gravitatis voluminis aquei $O$ facit suas oscillationes laterales. Theoria mea extenditur quoque ad alios casus cognatos; ex. gr. si in vase aliquo quiescente datae figurae contineatur data quantitas aquae, cujus tota massa a causa quadam incipiat fluctuare, ascendendo nempe ab uno latere super horizontem, dum a latere opposito descendit infra eundem, mox postea motu contrario refluendo ad hoc latus ultra limitem horizontalem, de hinc iterum ad partem oppositam redeundo, atque ita porro. Reciprocantes istae fluctuationes repraesentant speciem oscillationum, quibus inveniri potest longitudo penduli simplicis isochroni. Alia item foret species oscillationum non minus curiosa. Si nempe pelvis aliqua habens ansam, ut lebetes solent habere, impleretur aqua, sed non ad summitatem usque, et deinde si ad ansam suspenderetur pelvis ex clavo firmiter fixo, expectando parumper

donec aqua contenta ad quietem sese composuerit, ita ut ejus superficies suprema induerit situm horizontalem. Concipe nunc pelvim ita pendentem ex situ quietis tantillum dimoveri, sed placide, ne aqua ad fluctuandum concitetur. Facile utique intelligis, pelvim, sibi relictam, esse inchoaturam oscillationes minimas, sed ita, ut aquae superficies semper maneat horizontalis, secus ac fieret, si aqua esset congelata, quo casu pendulum non differet ab ordinario pendulo composito. Quaeritur ergo in nostra suppositione fluiditatis aquae, quanta sit longitudo penduli simplicis isochroni, abstrahendo facilitatis gr. a gravitate et a materialitate ipsius pelvis et ansae; video meam methodum huc pertingere, quamvis quia inter scribendum modo mihi in mentem venit, solutionem nondum tentaverim; non dubito quin pro sagacitate Tua quaesitum facile sis assecuturus.

Sed abrumpo jam nimium fatigatus scribendo, ut Tu, Vir Exc., forsan fatigaberis legendo inconcisam meam scripturam. En tamen adhuc paucis observationem meteorologicam. Nupero scil. 6. Dec. st. v. qui dies consecratus est divo Nicolao, gentis Russicae patrono, hora circiter nona matutina, deprehendi mercurium in barometro ad tantam profunditatem descendisse, ad quam non memini unquam pervenisse. At vero in hoc statu non diu permansit, nam sub vesperem ejusdem diei rediit ascendendo ad mediocrem fere altitudinem, quae hic est 26 poll. 10 lin. Paris.; tempestas non fuit valde procellosa, nisi quod ventus solito violentior spiraverit.

Vale, Vir Celeberrime. Dabam Basileae a. d. 9. Decembr. 1739.

## 23.

### Euler an Bernoulli 19. Januar 1740.

Antwort auf Bernoullis Brief vom 9. Dezember 1739. Original in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. Auszüge veröffentlicht von Eneström in der **Biblioth. Mathem.** 1897, S. 45—46.

*Inhalt.* Euler bedauert, daß die Reinschrift der zweiten Abteilung der *Dissertatio hydraulica* so schwer herzustellen ist. — Die Summe der Reihe

$$\frac{1}{1 \pm n} + \frac{1}{4 \pm n} + \frac{1}{9 \pm n} + \frac{1}{16 \pm n} + \cdots$$

besonders für den Fall, daß $n$ eine Quadratzahl ist. — Integration der unvollständigen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und einer anderen Differentialgleichung ähnlicher Art. — Über Schwingungen schwimmender Körper. — Lösung der zwei von Johann Bernoulli in seinem letzten Briefe gestellten Probleme. — Die von Johann Bernoulli in demselben Briefe erwähnte meteorologische Beobachtung.

Viro Celeberrimo atque Excellentissimo Johanni Bernoulli S. P. D.
Leonhardus Euler.

Quanquam summo desiderio alteram partem meditationum Tuarum hydraulicarum expectamus, tamen quia labor eas describendi Tibi admodum

est molestus, ante mihi ad litteras Tuas gratissimas summaque eruditione refertas respondendum est visum, quam illas meditationes acciperemus. Interim vehementer doleo, describendi laborem a Te Ipso, Vir Celeb., esse suscipiendum neminemque Tibi praesto esse, qui hoc labore Te sublevare posset. Filius autem Tuus Cl. postremam dissertationem quam huc misit non ipse scripserat, sed erat ab amanuensi satis idoneo descripta, qui Tibi etiam fortasse operam suam in hoc negotio commodare posset.

Inveni interea aliam methodum[1]) seriem

$$\frac{1}{1 \pm n} + \frac{1}{4 \pm n} + \frac{1}{9 \pm n} + \frac{1}{16 \pm n} + \text{etc.}$$

summandi a priori quidem diversam, sed quae pariter ac illa summationes omnium serierum hac forma

$$1 + \frac{1}{2^{2m}} + \frac{1}{3^{2m}} + \frac{1}{4^{2m}} + \frac{1}{5^{2m}} + \text{etc.}$$

contentarum postulat, mihique plane videtur sine hac serie cognita illius summationem frustra tentari. Quamvis enim illa series innumeris casibus, quibus scilicet $-n$ est numerus quadratus, summas habeat rationales, tamen harum summarum cognitio nihil omnino confert ad summas indagandas iis casibus, quibus $-n$ non est numerus quadratus. Quoties enim quaepiam series summam habet rationalem, toties ego quidem suscipere auderem illius summae inventionem: at quando summa rationalis non datur, tum multo est difficillimum plerumque summam assignare. Ceterum casus a Te, Vir Excellentissime, commemorati, quibus $-n$ est numerus quadratus integer, ex mea generali summae expressione satis facile derivantur. Primum autem considerandum est posito $-n =$ numero quadrato integro, puta $m^2$, aliquem seriei

$$\frac{1}{1 - m^2} + \frac{1}{4 - m^2} + \frac{1}{9 - m^2} + \frac{1}{16 - m^2} + \text{etc.}$$

terminum in infinitum abire, summamque ideo fieri infinite magnam. Quare ut Tuos casus obtineam, illum terminum, qui fit infinite magnus, omitti oportet. Cum igitur seriei istius propositae generatim spectatae

$$\frac{1}{1 - m^2} + \frac{1}{4 - m^2} + \frac{1}{9 - m^2} + \frac{1}{16 - m^2} + \text{etc.}$$

summa a me inventa fit

$$= \frac{1}{2mm} - \frac{\pi}{2m} \cot \text{A. } m\pi = \frac{1}{2mm} - \frac{\pi}{2m \operatorname{tag} \text{A. } m\pi},$$

1) Die Methode, worauf Euler hier hindeutet, ist vielleicht die in seiner Abhandlung *De seriebus quibusdam considerationes;* Comment. acad. sc. Petrop. **12**, 1740 (gedruckt 1750), S. 53—96 auseinandergesetzte.

pono $m$ infinite parum a numero integro discrepare, ita ut sit $m = i + dx$ denotante $i$ numerum integrum, eritque summa[1])

$$= \frac{1}{2mm} - \frac{\pi}{2(i+dx)\,\text{tāg A.}(i\pi + \pi dx)} = \frac{1}{2m^2} - \frac{1}{2(i+dx)dx}$$

ob tāg A. $(i\pi + \pi dx) = \pi dx$; arcus enim, qui infinite parum excedit semiperipheriae multiplum quodcunque, tangens ipse illi excessui est aequalis. Quocirca erit istius seriei:

$$\frac{1}{1-m^2} + \frac{1}{4-m^2} + \frac{1}{9-m^2} + \cdots + \frac{1}{i^2-(i+dx)^2}{}^{*} + \frac{1}{(i+1)^2-m^2}$$
$$+ \frac{1}{(i+2)^2-m^2} + \frac{1}{(i+3)^2-m^2} + \text{etc.}$$

summa

$$= \frac{1}{2m^2} - \frac{1}{2idx+2dx^2}$$

subtrahatur utrinque terminus asterisco notatus quippe qui est infinitus $= \frac{1}{-2idx-dx^2} = -\frac{1}{2idx+dx^2}$, eritque residuae seriei

$$\frac{1}{1-m^2} + \frac{1}{4-m^2} + \frac{1}{9-m^2} + \cdots + \frac{1}{(m-1)^2-m^2} + \frac{1}{(m+1)^2-m^2}$$
$$+ \frac{1}{(m+2)^2-m^2} + \frac{1}{(m+3)^2-m^2} \text{ etc.}$$

summa finita atque aequalis

$$\frac{1}{2m^2} - \frac{1}{2idx+2dx^2} + \frac{1}{2idx+dx^2} = \frac{1}{2m^2} + \frac{dx^2}{4i^2dx^2} = \frac{1}{2m^2} + \frac{1}{4m^2} = \frac{3}{4m^2},$$

facto re ipsa $dx = 0$ atque $i = m$. Quodsi nunc termini negativi seriei qui hunc $\frac{1}{(m+1)^2-m^2}$ antecedunt in alteram partem transponantur, prodibit seriei hujus, in qua casus a Te allegati continentur:

$$\frac{1}{(m+1)-m^2} + \frac{1}{(m+2)^2-m^2} + \frac{1}{(m+3)^2-m^2} + \frac{1}{(m+4)^2-m^2}$$
$$+ \frac{1}{(m+5)^2-m^2} + \text{etc.}$$

summa

$$= \frac{3}{4m^2} + \frac{1}{m^2-1} + \frac{1}{m^2-4} + \frac{1}{m^2-9} + \cdots\cdots + \frac{1}{m^2-(m-1)^2}.$$

Hinc enim erit, numeris integris successive loco $m$ substituendis, ut sequitur:

si $m = 1$; $\frac{1}{4-1} + \frac{1}{9-1} + \frac{1}{16-1} + \frac{1}{25-1} + \text{etc.} = \frac{3}{4}$

si $m = 2$; $\frac{1}{9-4} + \frac{1}{16-4} + \frac{1}{25-4} + \frac{1}{36-4} + \text{etc.} = \frac{3}{4.4} + \frac{1}{4-1} = \frac{25}{48}$

1) Vgl. Eulers *Institutiones calculi differentialis*, cap. 15, § 366 [= S. 205 des 3. Teiles der Übersetzung von J. A. Ch. Michelsen].

si $m = 3$; $\frac{1}{16-9} + \frac{1}{25-9} + \frac{1}{36-9} + \frac{1}{49-9} + \text{etc.}$

$$= \frac{3}{4.9} + \frac{1}{9-1} + \frac{1}{9-4} = \frac{49}{120};$$

si $m = 4$; $\frac{1}{25-16} + \frac{1}{36-16} + \frac{1}{49-16} + \frac{1}{64-16} + \text{etc.}$

$$= \frac{3}{4.16} + \frac{1}{16-1} + \frac{1}{16-4} + \frac{1}{16-9} = \frac{761}{2240}.$$

Fateor quidem lubens summas has pluribus modis multo facilius inveniri posse, verumtamen ostendisse juvavit eas quoque ex formula mea generali derivari posse. Praeter hos autem casus summas rationales admittentes notari merentur, qui in hac forma jam ante, ni fallor[1]), Tibi perscripta continentur:

$$\frac{1}{4-m^2} + \frac{1}{16-m^2} + \frac{1}{36-m^2} + \frac{1}{64-m^2} + \frac{1}{100-m^2} + \text{etc.}$$

cujus seriei, si $m$ sit numerus impar quicunque, summa perpetuo est $= \frac{1}{2mm}$, quae hujus seriei summa generalis per alios modos vix tam facile patebit.

Quod suspicaris, Vir Exc., ad methodum meam integrandi aequationes differentiales altiorum graduum, quae hac forma generali continentur

$$0 = y + \frac{a\,dy}{dx} + \frac{b\,ddy}{dx^2} + \frac{cd^3y}{dx^3} + \text{etc.}$$

ansam mihi praebuisse ingeniosam illam tuam analysin, qua problema Cotesianum a Tayloro propositum resolvisti, quanquam insignis similitudo intercedit, tamen postquam problema multis modis tractassem, prorsus inopinato in meam solutionem incidi, atque ante nequidem suspicione agnoveram, resolutionem aequationum algebraicarum in hoc negotio quicquam subsidii afferre posse. Mox quidem pariter ac Tu, Vir Celeb., intellexi in hujusmodi aequationibus logarithmicas contineri, modo plures, modo pauciores, saepius etiam nullas, quae parametros habeant reales. Verum meum institutum in hoc praecipue versabatur, non tam ut unam atque alteram aequationem integralem exhiberem, quae propositae differentiali satisfaceret, quam ut aequationem integralem completam eruerem, quae aeque late ac ipsa differentialis pateret, et quae omnes omnino aequationes particulares satisfacientes simul in se complecteretur. Imprimis autem in eo eram occupatus, ut aequatio integralis a quantitatibus imaginariis penitus esset libera, id quod mihi ex voto consecutus esse videor. Quod enim oggeris hujus aequationis

1) Die hier ausgesprochene Vermutung von Euler dürfte nicht richtig sein, sofern sie sich nicht auf den verlorenen Brief vom Jahre 1736 bezieht.

$$y + \frac{k^4 d^4 y}{dx^4} = 0$$

integralem mea methodo inventam imaginariam esse fnturam, id, si qnidem meam methodnm attentius inspicere dignaberis, aliter deprehendes. Pervenio namque ad hanc aequationem algebraicam $p^4 + k^4 = 0$, quae in has duas aequationes duarum dimensionum resolvitur

$$p^2 + kp\sqrt{2} + k^2 = 0 \quad \text{et} \quad p^2 - kp\sqrt{2} + k^2 = 0,$$

unde obtineo hanc aequationem integralem completam

$$y = Ce^{\frac{x}{k\sqrt{2}}} \sin A. \frac{x}{k\sqrt{2}} + De^{\frac{x}{k\sqrt{2}}} \cos A. \frac{x}{k\sqrt{2}}$$
$$+ Ee^{-\frac{x}{k\sqrt{2}}} \sin A. \frac{x}{k\sqrt{2}} + Fe^{-\frac{x}{k\sqrt{2}}} \cos A. \frac{x}{k\sqrt{2}},$$

cnjus aequationis qnatuor constantes $C$, $D$, $E$ et $F$ manifesto testantur hanc aequationem esse integralem completam. Quodsi enim aequatio differentialis quarti ordinis proposita

$$y + \frac{dy^4}{k^4 d^4 x} = 0$$

quater omni extensione integretur, necesse est ut quatuor novae constantes in finalem aequationem integralem ingrediantur. Praecipuum autem, quo haec mea methodus aliis antecellere videtur, in hoc consistit, qnod non opus habeam tot integrationes successive instituere, quot gradus habent differentialia, sed uno quasi actu inveniam aequationem integralem finitam. Simili fere modo possum etiam aequationem integralem completam ac realem invenire, quae satisfaciat hnic aequationi differentiali indefiniti gradus

$$0 = y + \frac{ax\,dy}{dx} + \frac{bx^2 ddy}{dx^2} + \frac{cx^3 d^3 y}{dx^3} + \frac{dx^4 d^4 y}{dx^4} + \text{etc.}$$

posito $dx$ constante.

Quae meditatus es de oscillationibus horizontalibus corporum aquae innatantium, mirifice cum meis conveniunt; atque adeo ipsa methodus qua nteris a mea non multum discrepare videtur; deduxi enim ego quoque omnia ex consideratione sollicitationum, quae a viribus motricibus proficiscnntur. Interim quam proprietatem affers rectae $AB$ in suprema aquae sectione sumtae, qua utrinque debet esse

$$\int yy\,dx = \int zz\,dx,$$

eandem proprietatem ego ita expressi, ut dicerem rectam $AB$ per centrum gravitatis sectionis navis in aquae superficie factae transire debere.

Qnod denique ad motum centri gravitatis totius navis, durantibus oscillationibus, attinet, is maxime pendet a distantia rectae verticalis per

centrum gravitatis sectionis aquae ductae, a recta verticali per centrum gravitatis totius navis ducta. Quodsi enim hae duae rectae verticales conveniant, tum motus centri gravitatis omnino erit nullus, si quidem oscillationes navis fuerint infinite parvae, at quo majore intervallo hae binae rectae verticales a se invicem distent, eo major subsequetur centri gravitatis navis mutatio. Quamobrem his casibus fieri non poterit, ut navis oscillationes horizontales puras absolvat, sed perpetuo conjunctae erunt cum oscillationibus verticalibus, quarum Tu primum, Vir Celeb., mentionem fuisti, quae peculiarem sequuntur legem, ita ut nisi tempora binarum oscillationum sint inter se vel aequalia vel commensurabilia, oscillationes totales regulares esse nequeant. Qua in re Filius Tuus Clar. etiam nunc a me dissentit, qui statuit utrasque oscillationes semper sese ad uniformitatem componere debere, ita ut unicum quasi oscillationum genus appareat. Multo autem major difformitas sese oscillationibus immiscebit, quando planum in quo sitae sunt binae illae memoratae verticales, non est normale ad axem horizontalem, circa quem fiunt oscillationes. Tum enim non solum alterni centri gravitatis navis ascensus et descensus motum oscillatorium contaminabunt, sed etiam ipse axis, circa quem oscillationes fiunt, erit mutabilis, ita ut unica durante oscillatione motus circa alium atque alium axem horizontalem per centrum gravitatis navis transeuntem perficiatur. Quae oscillationum difformitas mihi quidem tantopere difficilis videtur, ut eam calculo subjicere adhuc non potuerim: praeter vires enim motum oscillatorium generales inter oscillandum perpetuo adest alia quaedam vis, quae positionem axis, circa quem eo instanti motus oscillatorius absolvitur, mutare conatur, cujus effectum nondum ad calculum revocare potui; qua de re plura in postremis litteris ad Filium Tuum Celeb. datis scripsi.

Deinde duorum problematum mentionem facis, Vir Excellentissime, maxime ingeniosorum ac dignorum, quorum solutio suscipiatur, quae Tu etiam, per methodum Tuam jam solvisse mihi perscribis.

Priori autem problemate postulas, ut oscillationes aquae in vase [Fig. 4] quiescente $ADB$ definiantur, quando aqua motu reciproco ad latera vasis opposita $A$ et $B$ affluit defluitque. En igitur istius problematis tam solutionem quam solvendi methodum meam. Teneat aqua, dum a statu aequilibrii maxime recessit, situm $aDb$, sitque $ab$ ejus suprema superficies secans horizontalem $AB$ in puncto medio $C$, ex quo ducta perpendicularis $CD$ per centrum gravitatis aquae in

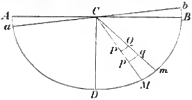


Fig. 4.

quiete sitae $ADB$ transeat, quae quidem conditio non est necessaria ad meam solutionem, sed eam tantum assumo, ut quaestio fiat planior magisque intelligibilis. Ponatur angulus $ACa = BCb = dq$, quem valde parvum concipio, ut cum suo sinu confundatur; sitque $AC = BC = a$, erit aquae spatium vel $BCb$ vel $ACa$ replentis volumen $= \frac{1}{2}\, aadq$, neglecta vasis longitudine: similique modo totum aquae oscillantis volumen exprimetur per aream $ADB$. Dum nunc aqua oscillando ex situ $aDb$ sese in situm aequilibrii $ADB$ recipit, quasi circa polum fixum $C$ rotabitur, eritque ejus momentum respectu hujus poli, dum situm $aDb$ tenet $= \frac{2}{3}\, a^3dq$, ut ex regulis staticis facile intelligitur. Sit jam $f$ longitudo penduli simplicis isochroni, erit vis, qua quaelibet aquae particula in situm aequilibrii urgebitur, ad ejusdem pondus reciproce ut haec penduli longitudo $f$ ad spatium ab ista particula percurrendum, quo ad situm aequilibrii attigerit. Concipiatur totum aquae volumen $aDb$ divisum in sectores numero infinitos atque cum inter se aequales tum sectori $BCb = \frac{1}{2}\, aadq$, cujusmodi sector sit $mCM$, cujus particula quaecunque $Q$ per spatiolum $QP$ moveri debebit, dum aqua ex situ $aDb$ in situm $ADB$ pertinget. Sit angulus $ACM = s$, erit $MCm = ds$ et posita $MC = y$, ob sectores $MCm$ et $BCb$ aequales, erit

$$aadq = yyds.$$

Sumatur distantia $CP = CQ = z$, erit $PQ = zds$ et molecula aquae spatiolo $PpqQ$ contenta $= zdsdz$. Huic moleculae, dum aquae superficies ex $Cb$ in $CB$ subsidit, percurrendum est spatium $PQ = zds$, ex quo erit $(f : zds) =$ vis urgens particulam $PQ$ in directione $QP$ hincque vis urgens particulam $Pq = zdsdz$ in directione $QP = \frac{z^2dzds^2}{f}$; atque hujus vis momentum ad axem motus $C$ relatum erit $= \frac{z^3dzds^2}{f}$ cujus integrale $\frac{z^4ds^2}{4f}$ dat momentum ex sectore $PCQ$ ortum, unde momentum pro toto sectore $MCm$ prodibit

$$= \frac{y^4ds^2}{4f} = \frac{yyds}{4f}\, aadq,$$

ob $yyds = aadq$. Cum autem $\frac{yyds}{2}$ exprimat aream sectoris $MCm$, erit integrando momentum totale ex universa aqua $aDb$ natum $=$ areae $aDb \cdot \frac{aadq}{2f} = ADB \cdot \frac{aadq}{2f}$. Hoc vero momentum aequale esse debet illi, quod ex actione gravitatis oritur, quodque invenimus $= \frac{2}{3}\, a^3dq$; quapropter habebitur

$$ADB\cdot\frac{aadq}{2f}=\frac{2}{3}a^3dq,$$

hincque

$$f=\frac{3}{4}\cdot\frac{ADB}{a}=\frac{3}{2}\cdot\frac{ADB}{AB},$$

haecque est longitudo penduli simplicis isochroni quaesita; neque uti spero a Tua solutione discrepabit.

Alterum quod proponis problema de oscillationibus pelvis aqua repletae mihi quidem multo difficilius videtur, si quidem eo sensu proponatur, quo ad praxim revocari queat. Dum enim pelvis ex situ inclinato, in quo superficies aquae fuit horizontalis, in situm verticalem pervenit, aqua interea sese vel etiam in situm naturalem recipiet, vel secus. Prius eveniet, quando aqua in pelvi quiescente eodem tempore oscillationes suas secundum prius problema perficeret, quo integrum pendulum ex pelvi et aqua compositum. Hoc autem nisi eveniat oscillationes maxime erunt irregulares, atque admodum raro superficies aquae fiet horizontalis; cujusmodi oscillationes ex gemino oscillationum genere mixtas vix ac ne vix quidem ad calculum revocare licet. At conditio quam adjicis, vi cujus superficies aquae perpetuo maneat horizontalis, problema ad solvendum accommodatum reddit.

Pono igitur praeter vim gravitatis perpetuo aliam quandam vim adesse, quaecunque ea sit, quae superficiem aquae in pelvi contentae constanter ad horizontalem compositam teneat, praetereaque nihil omnino motum oscillatorium afficere. Hac autem assumta hypothesi ego oscillationes sequenti modo determino. Sit [Fig. 5] $EDF$ pelvis dum situm erectum tenet ad $ab$ usque aqua repleta, cui ad utramque partem $DAE$ et $DBF$ similem figuram tribuam. Suspensa porro sit ista pelvis ex unco firmo $O$ circa quem oscillationes peragat, teneatque nunc situm in figura repraesentatum, ita ut recta $OD$, quae in situ naturali est verticalis, nunc cum verticali $OH$ angulum constituat $GOH = dq$; atque secundum hypothesin aquae superficies hoc statu sit horizontalis, puta $AB$; quae rectam $ab$ ipsi $OD$ normalem in medio $C$ ita bissecabit, ut sit angulus $ACa = GOH = dq$.

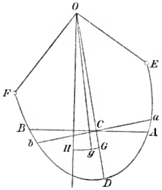


Fig. 5.

Ponatur $AC = BC = a$, ac repraesentet area $BDA$ vel $bDa$ volumen aquae, longitudini vasis vel neglecta vel per unitatem designata. Cum igitur si aquae superficies esset $ab$, ejus centrum gravitatis positum esset in recta $OD$ puta in puncto $G$, nunc aquae superficie existente $AB$

centrum gravitatis extra $OD$ in $g$ cadet, eritque distantia punctorum $G$ et $g$ horizontalis $Gg = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^3 dq}{BDA}$: verticalis autem distantia quasi immutata manebit. Sit $P$ pondus totius aquae, et distantia $OG = OH = h$, erit

$$\text{angulus } GOg = \frac{2a^3 dq}{3h \cdot BDA},$$

et

$$\text{angulus } HOg = dq\left(1 - \frac{2a^3}{3h \cdot BDA}\right).$$

Hinc neglecta plevis gravitate, uti Tu suades, Vir Celeb., ne calculus praeter necessitatem nimis fiat prolixus, erit momentum vis gravitatis aquae ad pelvim in situm verticalem circa $O$ constituendum

$$= P \cdot Og \cdot \text{ang. } HOg = Pdq\left(h - \frac{2a^3}{3 \cdot BDA}\right).$$

Per haec (rejecto $dq$ quia a vase angulus $dq$ absolvi debet antequam in situm verticalem perveniat), si dividatur aggregatum omnium aquae particularum in quadrata distantiarum suarum ab axe $O$ multiplicatarum, prodibit longitudo penduli simplicis isochroni. Quodsi autem hoc aggregatum non differre ponamus ab eo, quod haberetur, si aqua spatium $bDa$ in vase occuparet, quod ob discrimen infinite parvum tuto assumere licet. Ponamus longitudinem penduli simplicis, quod isochronum foret oscillationibus ejusdem pelvis, si aquae superficies perpetuo esset $ab$, hoc est si aqua esset congelata pendulumque compositum consuetum; hoc inquam pendulum ponamus $= k$: et aggregatum illud omnium particularum aquae in quadrata distantiarum suarum ab axe oscillationis $O$ multiplicatarum sit $= S$, erit $k = \frac{S}{Ph}$ hincque $S = Phk$. Cum igitur $S$ etiam nostro casu eundem valorem obtineat, erit pro eo longitudo penduli simplicis isochroni

$$= \frac{Phk}{P\left(h - \frac{2a^3}{3 \cdot BDA}\right)} = \frac{k}{1 - \frac{2a^3}{3h \cdot BDA}}.$$

Longitudo igitur penduli isochroni posita aqua in pelvi congelata se habebit ad longitudinem penduli isochroni posita aqua fluida in hypothesi assumta, uti se habet $1 - \frac{2a^3}{3h \cdot BDA}$ ad 1. Quamobrem si fiat $2a^3 = 3h \cdot BDA$, tum tempus unius oscillationis pelvis suspensae erit infinite magnum seu pelvis ex situ erecto declinata sese non restituet. Ceterum si mea hypothesis hic exposita cum ea, quam Tu, Vir Celeb., ad aquae superficiem constanter horizontalem conservandam assumsisti, convenit, non dubito quin nostrae solutiones perfecte sint consensurae.

Mirabilem mercurii in barometro descensum a Te observatum hic cum iis, qui observationibus meteorologicis operam dant communicavi, qui Tibi idcirco gratias habent maximas.

. . .[1]) quod ut quam citissime eveniat nos omnes summo desiderio flagitamus.

Vale, Vir Excellentissime, meque amare perge.

Dabam d. 19. Jan. 1740. Petropoli.

## 24.

### Bernoulli an Euler 16. April 1740.

Antwort auf Eulers Brief vom 19. Januar 1740. Original verloren; Konzept in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. S. 33—41, nach einer von N. Fuss verfertigten Abschrift des Originals. Die wahrscheinlich verloren gegangene Beilage des Briefes wurde von Eneström in der Biblioth. Mathem. 1898, S. 58—61 nach dem Konzepte zum Abdruck gebracht.

*Inhalt.* Über die mit der Fertigstellung der zweiten Abteilung der *Dissertatio hydraulica* verbundenen Schwierigkeiten. — Geldangelegenheiten. — Über die Reihen

$$\frac{1}{1 \pm n} + \frac{1}{4 \pm n} + \frac{1}{9 \pm n} + \frac{1}{16 \pm n} + \cdots,$$

$$\frac{1}{1^n} \pm \frac{1}{2^n} \pm \frac{1}{3^n} \pm \frac{1}{4^n} \pm \cdots,$$

$$\frac{1}{1} \pm \frac{1}{2^2} \pm \frac{1}{3^3} \pm \frac{1}{4^4} \pm \cdots.$$

Eine Eigenschaft der harmonischen Reihe. — Die Integration der unvollständigen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. — Über die Zerlegung eines Binoms in Faktoren zweiten Grades. — Integration der Gleichung

$$0 = y + ax\frac{dy}{dx} + bx^2\frac{d^2y}{dx^2} + cx^3\frac{d^3y}{dx^3} + \cdots$$

— Über die Schwingungen schwimmender Körper. — Über die zwei von Euler im vorigen Briefe gelösten hydrodynamischen Probleme. — Schwierigkeiten, die von Euler übersandten Bücher zu bekommen. — Die Differentialgleichung $yx^2 + a\frac{d^2y}{dx^2} = 0$. — *Beilage:* Integration der oben angeführten Differentialgleichung $n$-ter Ordnung.

Viro Celeberrimo atque Excellentissimo Leonhardo Eulero S. P. D. Joh. Bernoulli.[2])

Non ita facile eluctatus sum asperrimam hyemem, quin magnam ejus partem in lecto transigere coactus fuerim, vehementi laborans tussi, nec non asthmate et podagra, quibus malis, nondum omnino liberatus, non potui satis attente considerare cuncta, quae mihi perscripsisti, elegantissima atque ex profundissimo Tuo ingenio depromta, in litteris 19 Jan. sine dubio styli veteris, exaratis, in quibus inveneram alias ad Filium meum datas, quas sine mora ipsi transmisi; fuerunt illae ut credo, etiam a te

1) Hier sind sieben Zeilen gestrichen, möglicherweise von Johann II Bernoulli.

2) Bei dem folgenden Abdruck habe ich auch das Konzept verglichen.

scriptae, etsi earum inscriptio, ut et quae communi involucro ad me directa, non manu Tua sed aliena mihique ignota facta fuerint.[1])

Juvenis ille, quo usus fuerat Filius meus ad describendum suam dissertationem, nunc mortuus est ex febre ardente; sed etiam si adhuc viveret, non tamen possem ejus opera uti, neque cujusquam alius, ad describendas meas meditationes, quia soleo eas admodum confuse et abruptis verbis in chartam conjicere, atque tum demum inter describendum corrigere et in ordinem redigere; unde vides, neminem alium, nisi memet ipsum, id operis suscipere posse et exequi.

Filius meus nuper mihi Tuo nomine transmisit valorem 25 Rubelonum, nempe monetae hic usitatae florenorum $47\frac{1}{2}$. Ago gratias pro diligentia Tua atque cura hac in re adhibita; si quid vicissim potero praestare Tui in gratiam, certus esto, me nihil intermissurum, quod in viribus meis erit, ut commodis Tuis inserviam . . .[2])

Transeo nunc ad analytica Tua. Quae habes circa series hujusmodi:

$$\frac{1}{1 \pm n} + \frac{1}{4 \pm n} + \frac{1}{9 \pm n} + \text{etc.}$$

sapiunt certe singularem ingenii sagacitatem; animo quidem meo concepi quasdam vias, quibus ad earum summam eruendam in omni extensione pervenire liceat, sed quia praevideo, multum laboris et calculi requiri ad executionem, non audeo rem aggredi, aliis occupationibus distractissimus; malo igitur talia a Te discere, quando suo tempore evulgaveris, quam hisce diu insudare et fortassis sine successu.

Hac tamen occasione aliquid monebo. Non est difficile demonstratu, quod summa hujus seriei:

$$\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{etc.},$$

ubi termini omnes affirmativi sunt, sit ad summam ejusdem, sed signis terminorum alternative sumtis:

$$\frac{1}{1^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \text{etc.},$$

ut se habet $2^n$ ad $2^n - 2$. Nosti vero procul dubio, me dedisse olim modum exprimendi hanc seriem:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} - \text{etc.},$$

---

1) Die Worte: „fuerunt . . . fuerint", die bei Fuss fehlen, sind nach dem Konzepte ergänzt.

2) Die Worte: „Filius . . . inserviam", die bei Fuss fehlen, sind nach dem Konzepte ergänzt. Nach dem Worte „inserviam" sind im Konzepte 14 Zeilen gestrichen, möglicherweise von Johann II Bernoulli; diese Zeilen fehlen auch bei Fuss.

per hanc quantitatem finitam: $\int x^x dx$, cui illa series est aequalis, quando nempe fit $x$ aequalis unitati.[1]) Quaero nunc, an pariter invenire possis rationem, quam illa habet ad eandem seriem terminorum signis continuo affirmative procedentium:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.}$$

Memini Leibnitio, olim me roganti, an habeam compendium expedite summandi progressionem harmonicam

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots . \frac{1}{x}$$

ad terminos numero $x$ continuatam, dedisse pro responso[2]) hoc, non quidem compendium, sed theorema, scilicet:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots . \frac{1}{x} \text{ erit} = \text{huic alteri progressioni}$$

$$x - \frac{x.x-1}{2.2} + \frac{x.x-1.x-2}{2.3.3} - \frac{x.x-1.x-2.x-3}{2.3.4.4}$$

$$+ \frac{x.x-1.x-2.x-3.x-4}{2.3.4.5.5} - \ldots . \pm \frac{1}{x},$$

cujus termini nil aliud sunt quam coefficientes binomii ad numerum $x$ elevati, dividendo singulos per respective numeros 2, 3, 4, 5 . . . . $x$. Ex. gratia

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

erit aequalis huic

$$5 - \frac{10}{2} + \frac{10}{3} - \frac{5}{4} + \frac{1}{5} = \frac{10}{3} - \frac{5}{4} + \frac{1}{5}.$$

Quod attinet ad methodum Tuam, Vir Excel., integrandi aequationes differentiales, quae hac forma generali continentur:

$$0 = y + \frac{a\,dy}{dx} + \frac{b\,ddy}{dx^2} + \frac{c\,d^3y}{dx^3} + \text{etc.},$$

video ex paucis quae dicis, meam solutionem problematis Cotesiani a Tayloro propositi habere aliquid analogi cum Tua ipsa solutione, quamvis non attenderis ipse; nam quod ais, aequationem algebraicam $p^4 + k^4 = 0$ resolvi posse in factores reales hos duos: $pp + kp\sqrt{2} + kk$ et $pp - kp\sqrt{2} + kk$, id ipsum est, quod ego jam dudum animadverti contra Taylorum, qui credidit haec nobis incognita fuisse, ideo, quia Leibnitius alicubi dixerat $\int dx : (x^4 + a^4)$ neque ad circuli neque ad hyperbolae quadraturam reduci

1) Siehe Johann Bernoulli, *Principia calculi exponentialium seu percurrentium;* Acta Eruditorum 1697, S. 125—133 (= *Opera omnia*, t. I S. 179—187).

2) Dieser Brief von Johann Bernoulli an Leibniz wurde am 12. Februar 1695 geschrieben; vgl. *Leibnitii et Bernoullii Commercium* (Lausannae 1745) I, S. 28.

posse. Respondi autem, LEIBNITIUM hoc non asseverasse absolute, sed tantum relative ad methodum, qua usus fuerit in illo loco, ubi ita locutus est: „ego vero monstravi TAYLORO, binomium $x^4 + a^4$ revera resolvi posse in hos duos factores reales: $xx + ax\sqrt{2} + aa$ et $xx - ax\sqrt{2} + aa$, praeter duos alteros imaginarios $xx + aa\sqrt{-1}$ et $xx - aa\sqrt{-1}$." Inspice modo Acta Lips. anni 1719 p. 257,[1]) ubi haec, quae dico, expressissimis verbis invenies, fluuntque ex fundamento totius meae solutionis problematis COTESiani. Miror interim Te dicentem, aequationem algebraicam $p^4 + k^4 = 0$ resolvi in *has duas aequationes* duarum dimensionum *reales* $pp + kp\sqrt{2} + kk = 0$ et $pp - kp\sqrt{2} + kk = 0$; debebas dicere: *resolvi in duos factores reales*, non vero in aequationes reales; nam $pp \pm kp\sqrt{2} + kk$ non possunt esse $= 0$, alias foret radix $p = \mp k\sqrt{\frac{1}{2}} \pm k\sqrt{-\frac{1}{2}} =$ imaginario, ergo nullus casus datur, ubi fieri possit $pp \pm kp\sqrt{2} + kk = 0$, hoc est, nulla relatio realis dabilis est inter $p$ et $k$, ut inde formari queat $pp \pm kp\sqrt{2} + kk = 0$, nisi velis utrumque $p$ et $k$ sumere $= 0$, sed non est hic sensus verborum Tuorum.

Alteram, cujus mentionem facis, aequationem differentialem indefiniti gradus nimirum hanc:

$$0 = y + \frac{axdy}{dx} + \frac{bxxddy}{dx^2} + \frac{cx^3d^3y}{dx^3} + \text{etc.}$$

posita ut supra $dx$ constante, ego quoque jam ante initium hujus saeculi reduxi ad aequationem integralem finitam, quae quidem est generalis, sed fateor, in illa contineri mixtim tam reales quam non reales; interim possunt a se invicem distingui, ideoque non puto meam solutionem eandem esse cum Tua. Quidquid sit, exscribam meam methodum in Schedam separatam[2]), quam examinare poteris, ex adversariis meis antiquis, ita tamen ut ad litteras Tuas, $a$, $b$, $c$ etc., $x$ $y$ accommodem scriptum meum.

Conspirant utique re ipsa nostrae duae solutiones de oscillationibus horizontalibus corporum aquae insidentium; sunt tamen quaedam monenda circa minus essentialia.[3])

Bene notas, quod et ego notaveram, eandem esse proprietatem rectae $AB$ in suprema aquae sectione sumtae, sive dicatur esse

$$\int yydx = \int zzdx,$$

ut ego enunciavi, sive concipiatur $AB$, ut Tu fecisti, tanquam transiens per centrum gravitatis sectionis corporis in aquae superficie factae. Malebam autem rem ipsam exprimere per proprietatem pure geometricam, quam

1) Vgl. S. 40 Anm. 2.

2) Diese Beilage scheint FUSS nicht zugänglich gewesen zu sein; sie fehlt jedenfalls in seinem Abdruck des Briefes.

3) Vgl. hierüber JOHANN BERNOULLI, *Opera omnia*, t. IV S. 287—293.

per mechanicam, eoque magis, quod hic superficies sola, in imaginatione tantum subsistens, nihilque materiae habens, non nisi improprie dici possit habere centrum gravitatis.

*Secundo,* Tecum, non sentio, quod pace Tua dixerim, quando asseris, motum centri gravitatis totius navis, vel cujusque corporis innatantis, pendere a *distantia* rectae verticalis per centrum gravitatis *sectionis* aquae ductae, a recta verticali per centrum gravitatis totius corporis ducta; nam mihi clare videtur, considerari debere distantiam rectae verticalis per centrum gravitatis non sectionis aquae, sed (NB.) ipsius voluminis, quod corpus in aqua occupat, hujus, inquam *distantiam* a recta verticali per centrum gravitatis totius corporis ducta; etenim in centro voluminis (quod volumen inter oscillandum perpetuo ejusdem magnitudinis est supponendum) concentratur tota vis motrix, agens sursum verticaliter, ad restituendum corpus in situm pristinum quietis, quamdiu durant oscillationes: interim fateor, propter variabilitatem figurae voluminis, centrum ejus gravitatis non semper eundem locum occupare in corpore oscillante, sed hinc inde evagari in singulis oscillationbus ab uno latere in alterum respectu rectae lineae quae, dum corpus adhuc est in quiete, verticaliter transit per ejus centrum gravitatis.

*Tertio* non nego quod dicis centrum gravitatis corporis totius oscillantis non manere omnino immotum; nam, secundum rigorem loquendo, revera mutat suum situm tam in directione horizontali quam verticali, magisque in illa quam in hac; sed cum supponantur oscillationes corporis totius quamminimae, hoc est quasi infinite parvae, potest demonstrari, mutationes illas centri gravitatis corporis, quas nominare vellem trepidationes, non tantum esse insensibiles, sed omnino infinities minores, quam sunt ipsae oscillationes minimae corporis ipsius, adeoque tuto negligendae, ut jam monui in praecedentibus meis litteris.

*Quarto.* In iisdem volebam sciscitari, sed quod dein obliviscebar, quid nempe intelligas proprie per vim firmitatis, de qua in litteris Tuis 30. Julii 1738 agis dicisque, quod sit illa quae resistit inclinationi corporis, eamque esse

$$= M\left(GO + \frac{\int (y^3 + z^3)\,dx}{3V}\right).$$

Si per vim firmitatis intellectam cupis vim illam, per quam corpus inter oscillandum continuo verticaliter sursum urgetur a pressione aquae, et quam vim dixi concipiendam esse tanquam concentratam in centro gravitatis voluminis aquae a corpore occupati, tunc credo, Te voluisse dicere hanc vim esse

$$= \frac{M}{GO}\left(GO + \frac{\int (y^3 + z^3)\,dx}{3V}\right),$$

omittendo per incuriam subjicere $GO$ pro denominatore infra $M$; sic enim scribendum esse inveni ex mea solvendi methodo, in qua conjectura eo magis obfirmor, quod alioquin vis Tua firmitatis compararetur cum pondere $M$, multiplicato per lineam $GO + \frac{\int (y^3 + z^3)\,dx}{3V}$, quae duo inter se sunt incomparabilia; talis autem incongruentia non reperitur in mea expressione, quippe in qua linea $GO + \frac{\int (y^3 + z^3)\,dx}{3V}$, divisa per lineam $GO$, dat numerum, quisquis ille sit, qui indicat, quoties sumendum sit pondus $M$, ut fiat aequale vi firmitatis, vel, ut ego voco, vi motrici ex oscillatione oriundae et sursum tendenti; atque ita vis cum pondere comparatur, homogeneum cum homogeneo, quae utique non sunt asystata. Quod cum ita sit, judicandum relinquo, an vis Tua correcta

$$\frac{M}{GO}\left(GO + \frac{\int (y^3 + z^3)\,dx}{3V}\right)$$

commode satis appellari possit *vis firmitatis reluctans inclinationi corporis;* ut enim proprie dici possit *vim vi resistere*, oportet sane alteram alteri esse directe oppositam: hic vero *vis firmitatis* dicta, habens directionem verticalem, alteri vi, quae corporis inclinationem molitur, et quae ideo agit secundum directionem horizontalem nullatenus resistere potest, etiamsi illa maxima esset, haec minima; haud secus ac videmus magnum pondus ex filo pendens dimoveri posse a situ verticali per vim quantumlibet exiguam a latere horizontali impingentem. Meo igitur judicio melius esset, pro *vi firmitatis* adhibere eandem quidem expressionem, sed multiplicatam per $n$ seu per angulum inclinationis: inveni enim

$$\frac{n \cdot M}{GO}\left(GO + \frac{\int (y^3 + z^3)\,dx}{3V}\right)$$

esse vim motricem horizontalem, qua corpus inclinatum ad situm aequilibrii restituitur, proportionalem sane ipsi $n$, atque adeo etiam distantiae centri gravitatis voluminis a situ aequilibrii, uti requiritur in oscillationibus tautochronis. Quae in hac quarta annotatione dico exscripsi ex manuscripto[1]), quod paravi circa hanc materiam juxta multa alia nova et curiosa ad dynamicam spectantia, quae aliquando, si otium daretur, in ordinem redigere et Vobiscum communicare possem.

Problemata illa duo de oscillationibus fluidorum, unum in vase quiescente, alterum in pelvi vel situla ex ansa suspensa reciprocante, quae inter scribendum mihi in mentem inciderunt ac Tibi proposui, statim post abitum litterarum mearum prorsus deserui atque neglexi, quia attentius rem considerans animadverti, problemata illa solvi non posse, nisi faciendo

1) Vgl. Johann Bernoulli, *Opera omnia*, t. IV S. 293.

suppositiones quae mere sunt precariae nullumque habent fundamentum in ipsa rei natura, ita ut aliae atque aliae inde emergant solutiones, prout haec vel illa hypothesis adhibetur, dum interim una aeque ac altera eundem obtinet probabilitatis gradum. Sic Tuae solutiones videntur bonae et cum meis conspirantes; quia eadem generali hypothesi usi sumus, supponendo scilicet, in ejusmodi oscillationibns totam massam simul moveri, et quidem moveri certo modo, quod verum esse demonstrari nequit, propterea quod hoc pendeat a circumstantiis accessoriis, ex. gr. a quantitate fluidi, figura vasis, etc.

Et vel hinc colligi potest, massam integram fluidi non semper in oscillationibus partium superiorum simul moveri, quod si vera sunt, quae legi et audivi, in maximis tempestatibus, cnm suprema maris superficies vehementer agitetur et fluctuet urinatores experiri tamen in profunditate 200 vel 300 pedum omnimodam aquaram tranquillitatem, imo se nullum plane motum sentire: unde praesumi potest, in nostris vasibus simile quid fieri, ut nempe superiores tantum partes in motum cieantur, reliquis inferioribus locum suum non mutantibus, cum praesertim superiorum motus sit tam languidus, tam placidus, ut non sit credibile, ab illis turbari posse situm inferiorum. Oporteret igitur prius inquirere, quousque se extendat superficies illa, quae separet partem aquae mobilis ab immobili, item quamnam habeat figuram illa superficies, et alia multa, quae vix definiri possunt a sagacitate humana. Adde quod in problemate secundo pelvis, scilicet ex unco pendentis et oscillantis, si ejus figura haberet ventrem tumidum et desineret superius in collum oblongum et angustum, ad cujus medium usque aqua pertingeret, annon facile percipimus, aquam cum vase et in vase sensibiliter haud aliter oscillaturum, quam si illa esset congelata et ita repraesentaret pendulum ordinarium. Ob has itaque multasque alias difficultates inseparabiles abstinui ab ulteriori scrutinio et animi applicatione tanquam frustanea.

Tandem[1]) significo Tibi, Vir Exc., quod in hunc usque diem nondum accepimus tomos V et VI Commentariorum vestrorum atque Tuum librum de *Musica* tractantem, quamvis jam plures elapsi sint menses, quod filius meus Lipsiam miserit chirographum illud ab Exc. Schumachero transmissum, ad cujus exhibitionem in manus bibliopolae Lipsiensis Schusteri hic extradere debuisset latori praedictos libros ad nos deferendos. Erat autem lator hujus schedulae aliquis auriga qui mercatoribus nostris saepe advehere solet merces lanarum, promittens se proxima vice nobis allaturum libros desideratos, sed hucusque nec aurigam nec libros vidimus; posset ille, si vellet, furem agere nosque frustrare petito,

1) Das Stück: „Tandem ... commercium habet", das bei Fuss fehlt, ist nach dem Konzepte ergänzt.

siquidem filius meus hominem vix faciè tenus novit, nomenque ejus, ut credo, oblitus est. Optarim id a vobis curari imposterum, ut libri ad nos mittendi dirigantur immediate Basileam, vel saltem, si fieri potest, Tubingam ad Exc. BULFFINGERUM[1]) cum commendatione ut ad nos porro deferri curet. Si bibliopola SCHUSTERUS voluisset urbane nobiscum agere, potuisset sponte nobis transmittere libros istos cum aliis quos sine dubio mittendos habet ad aliquem bibliopolam nostratem vel in vicinia nostra, ex. gr. Argentoratum, ubicunque commercium habet.

Vale, Vir Excellentissime, atque mihi favere perge.

Dabam Basileae a. d. 16. April. 1740.

*P. S.* Vides ex iis, quae ab initio hujus epistolae dixi, me ob valetudinem adversam non fuisse in statu absolvendi alteram partem meditationum mearum hydraulicarum; spero autem, nisi recidiva me capiat, tantum effici posse, ut prima vice, qua ad Te sum scripturus, post acceptam responsionem sine longa mora transmittere queam in scripto partem secundam omnium quae circa hanc materiam a me dicendum restabunt, quae quidem talia sunt ut ad multo plura detegenda viam pandant, Tibi praesertim, qui in sagacitate nullum parem habes.

Potestne reduci haec aequatio:

$$yxxdx^2 + addy = 0\ ^{2)}$$

ad differentias primas? supponitur $dx$ constans.

*Problema analyticum.*

Reducere aequationem differentialem cujusque gradus quae hanc habet formam

$$ydx + axdy + \frac{bxxddy}{dx} + \frac{cx^3 d^3y}{dx^2} + \text{etc.} = 0,$$

quotquot sunt termini, ex gr. quatuor; eadem est etenim regula pro pluribus, ad aliam aequationem uno grado depressiorem.

Sit illa, haec

$$ydx + axdy + \frac{bxxddy}{dx} + \frac{cx^3 d^3y}{dx^2} = 0.$$

*Solutio.* Multiplicando per $x^p$ prodit

$$yx^p dx + ax^{p+1}dy + \frac{bx^{p+2}ddy}{dx} + \frac{cx^{p+3}d^3y}{dx^2} = 0.$$

1) GEORG BERNHARD BILFINGER (geb. 1693, gest. 1750), früher Professor der Logik in St. Petersburg, war 1740 Professor der Theologie an der Universität in Tübingen.

2) Diese Gleichung ist ein Spezialfall der allgemeineren

$$y^m \frac{d^2y}{dx} = ax^n \left(\frac{dy}{dx}\right)^r,$$

mit welcher sich JOHANN BERNOULLI und EULER in ihren früheren Briefen beschäftigt hatten (vgl. Biblioth. Mathem. $4_3$, 1903, S. 346). Meines Wissens hat JOHANN BERNOULLI diesen Spezialfall in keiner seiner Schriften behandelt.

Ad terminum primum addo terminum analogum secundo, qui ambo simul sint integrabiles, deinde huic analogo secundo sub signo contrario addo terminum analogum tertio, qui ambo simul sint integrabiles, et ita ad finem usque, ut videre est ex sequenti laterculo:

$$\int\left(yx^p\,dx + \frac{1}{p+1}x^{p+1}dy\right) = \frac{1}{p+1}x^{p+1}y,$$

$$\int\left(-\frac{1}{p+1}x^{p+1}dy - \frac{x^{p+2}ddy}{p+1\cdot p+2\cdot dx}\right) = -\frac{x^{p+2}dy}{p+1\cdot p+2\cdot dx},$$

$$\int\left(\frac{x^{p+2}ddy}{p+1\cdot p+2\cdot dx} + \frac{x^{p+3}d^3y}{p+1\cdot p+2\cdot p+3\cdot dx^2}\right) = \frac{x^{p+3}ddy}{p+1\cdot p+2\cdot p+3\cdot dx^2}.$$

Nunc multiplico secundum et tertium per coëfficientes constantes $e$ et $f$, quorum valores ut et valor exponentis $p$ postea quaerendi sunt, atque laterculus erit ut sequitur:

$$\int\left(yx^p\,dx + \frac{x^{p+1}dy}{p+1}\right) = \frac{x^{p+1}y}{p+1},$$

$$e\int\left(-\frac{x^{p+1}dy}{p+1} - \frac{x^{p+2}ddy}{p+1\cdot p+2\cdot dx}\right) = -\frac{ex^{p+2}dy}{p+1\cdot p+2\cdot dx},$$

$$f\int\left(\frac{x^{p+2}ddy}{p+1\cdot p+2\cdot dx} + \frac{x^{p+3}d^3y}{p+1\cdot p+2\cdot p+3\cdot dx^2}\right) = \frac{fx^{p+3}ddy}{p+1\cdot p+2\cdot p+3\cdot dx^2}.$$

Conjungendo terminos analogos, nascetur aequatio sequens

$$\int\left(yx^p dx + \frac{\overline{1-e}\cdot x^{p+1}dy}{p+1} + \frac{\overline{f-e}\cdot x^{p+2}ddy}{p+1\cdot p+2\cdot dx} + \frac{fx^{p+3}d^3y}{p+1\cdot p+2\cdot p+3\cdot dx^2}\right)$$
$$= \frac{x^{p+1}y}{p+1} + \frac{-ex^{p+2}dy}{p+1\cdot p+2\cdot dx} + \frac{fx^{p+3}ddy}{p+1\cdot p+2\cdot p+3\cdot dx^2} \pm A.$$

Nota quod $A$ sit constans arbitraria quae in integrationibus addi vel subtrahi solet.

Porro ut membrum prius identificetur cum differentiali proposito seu cum ejus aequivalente

$$yx^p dx + ax^{p+1}dy + \frac{bx^{p+2}ddy}{dx} + \frac{cx^{p+3}d^3y}{dx^2},$$

oportet coaequare coefficientes terminorum homogeneorum, nempe:

$$a = \frac{1-e}{p+1},\quad b = \frac{f-e}{p+1\cdot p+2},\quad c = \frac{f}{p+1\cdot p+2\cdot p+3},$$

unde lucrabimur

$$e = (p+1\cdot p+2\cdot p+3)\,c - (p+1\cdot p+2)\,b$$

et

$$f = (p+1\cdot p+2\cdot p+3)\,c;$$

ipsius vero $p$ valor est radix hujus aequationis

$$1-(p+1)a+(p+1\cdot p+2)b-(p+1\cdot p+2\cdot p+3)c=0,$$

quae erit trium dimensionum. His igitur valoribus substitutis in altero membro, orietur quaesita aequatio reducta differentialis uno gradu simplicior quam proposita, quae scilicet hic erit:

$$\frac{x^{p+1}y}{p+1}+[-(p+3)c+b]\frac{x^{p+2}dy}{dx}+\frac{cx^{p+3}ddy}{dx^2}\pm A=0.$$

Rejecta arbitraria $A$ et tum dividendo per $x^{p+1}$ prodibit aequatio minus quidem universalis sed multo simplicior,

$$\frac{y}{p+1}+[b-(p+3)c]\frac{xdy}{dx}+\frac{cxxddy}{dx^2}=0.$$

Ceterum vero, servata licet arbitraria $A$, jam videmus formam quam induit aequatio reducta ex differentiali tertii gradus ad differentialem secundi gradus, quae forma utique similis est illi quam habet ipsa reducenda, ratione progressionis dimensionum tam ipsius $x$ quam graduum differentialium ipsius $dy$; unde statim concludere licebit si jam ulterius reducatur, per hanc methodum, aequatio reducta differentialis secundi gradus, ad aliam primi gradus, quae habitura sit talem formam

$$ax^qy+\frac{bx^{q+1}dy}{dx}\pm Ax^r\pm B=0.$$

Quae ipsa post institutam reductionem tertiam quae hic est finalis, abibit tandem in aequationem finitam sine differentialibus hujus formae

$$mx^ny\pm Ax^s\pm Bx^t\pm C=0,$$

ubi cum $A$, $B$, $C$ sint assumtae arbitrariae possunt illic omnino negligi, retenta sola $C$, ita ut pro aequatione quaesita sit tantum

$$mx^ny\pm C=0;$$

per consequens curva ex genere vel hyperbolarum vel parabolarum est, prout exponens $n$ est vel affirmativus vel negativus.

## 25.

## Euler an Bernoulli 20. Juni 1740.

Antwort auf Bernoullis Brief vom 16. April 1740. Original in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. Auszüge veröffentlicht von Eneström in der Biblioth. Mathem. 1897, S. 47.

*Inhalt.* Die Summe der Reihe

$$\frac{1}{1+n}+\frac{1}{4+n}+\frac{1}{9+n}+\frac{1}{16+n}+\cdots$$

Über die Reihen

$$\frac{1}{1}\pm\frac{1}{2^n}\pm\frac{1}{3^n}\pm\frac{1}{4^n}\pm\cdots$$

$$\frac{1}{1}\pm\frac{1}{2^2}\pm\frac{1}{3^3}\pm\frac{1}{4^4}\pm\cdots$$

Eine Methode, die Summe einer endlichen Anzahl von Gliedern der harmonischen Reihe annähernd zu bestimmen. — Wert der dabei vorkommenden Konstante. — Integration der unvollständigen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und der von Johann Bernoulli in seinem vorigen Briefe integrierten Gleichung. — Die Schwingungen schwimmender Körper. — Zurückführung der Differentialgleichung $yx^2 + a\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ auf eine Riccatische Gleichung.

Viro[1]) Excellentissimo et Celeberrimo Johanni Bernoulli S. P. D. Leonh. Euler.

Jam fortasse certior es factus de collata Praesidi nostro Illustri Korffio Legatione Danica, et quemadmodum Augustissima Nostra Imperatix Academiae Praesidem praefecerit Illustrissimum Consiliarium Status atque Equitem Alexandrini Ordinis a Brevern . . .[2])

Interim vehementer doleo, valetudinem Tuam tantopere labefactari, Deumque T. O. M. precor, ut Te adhuc complures annos ad patriae carissimae splendorem, academiae nostrae ornamentum ac Tuae familiae salutem salvum sespitemque conservare velit.

Quod ad summam hujus seriei

$$\frac{1}{1+n} + \frac{1}{4+n} + \frac{1}{9+n} + \frac{1}{16+n} + \text{etc.}$$

attinet, quia ex Tuis litteris intellexi, Te hanc investigationem non solum probare, sed etiam methodum, qua usus sum, videre cupere, eam Tibi, Vir Celeb., perscribam.[3]) Posita hujus seriei, quam quaero, summa $= s$ singulisque terminis methodo consueta in series geometricas conversis, habebitur:

$$\begin{aligned} s = +1\left(1+\tfrac{1}{2^2}+\tfrac{1}{3^2}+\tfrac{1}{4^2}+\tfrac{1}{5^2}+\text{etc.}\right) &= 1\cdot\alpha\pi^2 \\ -n\left(1+\tfrac{1}{2^4}+\tfrac{1}{3^4}+\tfrac{1}{4^4}+\tfrac{1}{5^4}+\text{etc.}\right) &= -n\cdot\beta\pi^4 \\ +n^2\left(1+\tfrac{1}{2^6}+\tfrac{1}{3^6}+\tfrac{1}{4^6}+\tfrac{1}{5^6}+\text{etc.}\right) &= +n^2\cdot\gamma\pi^6 \\ -n^3\left(1+\tfrac{1}{2^8}+\tfrac{1}{3^8}+\tfrac{1}{4^8}+\tfrac{1}{5^8}+\text{etc.}\right) &= -n^3\cdot\delta\pi^8 \\ \text{etc.} \end{aligned}$$

Pervenitur scilicet ad series eas, quas jam pridem per potestates peripheriae circuli $\pi$, diametro existente $= 1$, summare docui. Coefficientes

1) Oben hat Johann Bernoulli notiert: „Empfangen d. 27 Julij 1740".

2) Hier sind vier Zeilen gestrichen, möglicherweise von Johann II Bernoulli.

3) Die hier auseinandergesetzte Methode ist genau dieselbe, die Euler in seinem Briefe vom 15. September 1739 angab, was er offenbar schon vergessen hatte.

autem harum potestatum, quos hic brevitatis ergo litteris $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, etc., indicavi, hanc tenent legem, ut sit

$$\alpha = \frac{1}{6};\ \beta = \frac{2\alpha^2}{5};\ \gamma = \frac{4\alpha\beta}{7};\ \delta = \frac{4\alpha\gamma + 2\beta\beta}{9};\ \varepsilon = \frac{4\alpha\delta + 4\beta\gamma}{11};$$

$$\zeta = \frac{4\alpha\varepsilon + 4\beta\delta + 2\gamma\gamma}{13}, \text{ etc.,}$$

quae progressionis lex a forma quadrati hujus seriei $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \text{etc.}$ pendere intelligitur. Erit ergo

$$s = \alpha\pi^2 - \beta n\pi^4 + \gamma n^2\pi^6 - \delta n^3\pi^8 + \text{etc.}$$

atque hinc fiet:

$$s^2 = \alpha^2\pi^4 - 2\alpha\beta n\pi^6 \begin{matrix} + 2\alpha\gamma n^2 \\ + \beta\beta n^2 \end{matrix} \pi^8 \begin{matrix} - 2\alpha\delta \\ - 2\beta\gamma \end{matrix} n^3\pi^{10} + \text{etc.}$$

Multiplicetur haec series per $2d\pi$, tantisper enim $\pi$ tanquam quantitatem variabilem tractare licet, et singulis terminis integratis erit

$$\int 2s^2 d\pi = \frac{2\alpha^2}{5}\pi^5 - \frac{4\alpha\beta}{7}n\pi^7 + \frac{(2\alpha\gamma + 2\beta\beta)}{9}n^2\pi^9 - \frac{(4\alpha\delta + 4\beta\gamma)}{11}n^3\pi^{11} + \text{etc.,}$$

hoc est, lege determinationis, quam coefficientes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ etc. tenent, in subsidium vocata:

$$\int 2s^2 d\pi = \beta\pi^5 - \gamma n\pi^7 + \delta n^2\pi^9 - \varepsilon n^3\pi^{11} + \text{etc.}$$

At cum sit

$$s = \alpha\pi^2 - \beta n\pi^4 + \gamma n^2\pi^6 - \delta n^3\pi^8 + \text{etc.}$$

erit

$$\frac{\alpha\pi^3 - \pi s}{n} = \beta\pi^5 - \gamma n\pi^7 + \delta n^2\pi^9 - \varepsilon n^3\pi^{11} + \text{etc.} = 2\int ssd\pi.$$

Quare ob $\alpha = \frac{1}{6}$ habebitur ista aequatio

$$\frac{1}{6}\pi^3 - \pi s = 2n\int ssd\pi,$$

quae differentiata dat

$$\frac{1}{2}\pi^2 d\pi - \pi ds - sd\pi = 2nssd\pi,$$

haecque aequatio tam casu, quo $n$ est numerus affirmativus quam negativus integrata, praebebit valorem definitum pro $s$, hoc est pro summa seriei

$$\frac{1}{1 \pm n} + \frac{1}{4 \pm n} + \frac{1}{9 \pm n} + \text{etc.};$$

eae ipsae scilicet expressiones resultant, quas Tibi, Vir Celeb., ante perscripsi.

Nisi ratio quam tenent inter se series

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\text{etc.}$$

et

$$1-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}-\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}-\text{etc.}$$

mihi jam pridem constitisset, non potuissem utriusque seriei summam, casibus quibus $n$ est numerus par, assignare, ut feci. Quodsi enim prior series multiplicetur per $\frac{1}{2^n}$, prodit

$$\frac{1}{2^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{8^n}+\text{etc.}$$

cujus duplum ab illa ipsa serie subtractum relinquet alteram seriem, unde ratio prodit ut $2^n$ ad $2^n-2$.

Quae de summis serierum

$$1\pm\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}\pm\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^5}\pm\frac{1}{6^6}+\text{etc.}$$

jam dudum elicui, huc redeunt, ut sit generaliter hujus seriei

$$\frac{1}{n+1}-\frac{m}{(n+2)^2}+\frac{m^2}{(n+3)^3}-\frac{m^3}{(n+4)^4}+\frac{m^4}{(n+5)^5}-\frac{m^5}{(n+6)^6}+\text{etc.}$$

summa $=\int x^{mx}x^n dx$, posito post integrationem $x=1$. Quodsi jam ponatur $n=0$, erit

$$\frac{1}{1}-\frac{m}{2^2}+\frac{m^2}{3^3}-\frac{m^3}{4^4}+\text{etc.}=\int x^{mx}dx.$$

hincque fiet cum

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^5}-\text{etc.}=\int x^x dx,$$

uti Ipse olim invenisti, tum etiam

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^5}+\text{etc.}=\int x^{-x}dx=\int\frac{dx}{x^x}.$$

Expressio, quam aequivalere invenisti, Vir Celeb., huic seriei

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{x}$$

est admodum concinna et elegans: dubito autem an sit apta ad quotvis assignatorum terminorum summam proxime exhibendam: quemadmodum ego per methodum meam series summandi universalem quotcunque ter-

minorum summam in fractionibus decimalibus ad plures quam 15 figuras expedite assignare possum. Inveni scilicet esse hujus seriei summam

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots\cdots + \frac{1}{x}$$

$$= \text{Const.} + lx + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 2x^2} + \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6x^4} - \frac{1}{6\cdot 7\cdot 6x^6} + \frac{3}{8\cdot 9\cdot 10x^8}$$
$$- \frac{5}{10\cdot 11\cdot 6x^{10}} + \frac{691}{12\cdot 13\cdot 210x^{12}} - \frac{35}{14\cdot 15\cdot 2x^{14}} + \text{etc.}$$

quae quidem series maxime convergit: constantem autem tantam accipi oportet ut satisfiat uni casui, veluti si est $x = 10$, et decem seriei primores termini actu addantur: qui valor semel inventus pro omnibus casibus valebit: deinceps autem notandum est esse $lx$ logarithmum hyperbolicum ipsius $x$, cum sit $lx = \int\frac{dx}{x}$. Erit autem illa constans[1])

$$= 0{,}57721566490153252.$$

et quia est

$$l\,10 = 2{,}302585092994045684$$

erit verbi gratia summa millies mille terminorum

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\cdots + \frac{1}{1000000} = 14{,}392726722865723\,29.$$

Quae de integratione aequationum differentialium indefiniti gradus mihi rescribis, mirifice mihi placent; methodus quidem, qua uteris, Vir Excell., in aequatione

$$0 = y + \frac{ady}{dx} + \frac{bddy}{dx^2} + \frac{cd^3y}{dx^3} + \text{etc.}$$

fere congruit cum mea, altera autem quam praebes pro aequatione

$$0 = y + \frac{axdy}{dx} + \frac{bxxddy}{dx^2} + \frac{cx^3d^3y}{dx^3} + \text{etc.}$$

a mea maxime discrepat, mihique compendia nonnulla patefecit, quae ex mea methodo non tam sponte manarent. Ceterum mea methodus hoc

1) Den Wert der sogenannten Eulerschen Konstante $C$ hatte Euler in der Abhandlung *De progressionibus harmonicis observationes* (Comment. acad. sc. Petrop. 7, 1734—1735 [gedruckt 1740], S. 150—161, speziell S. 157) auf 6 Dezimalstellen (von denen die ersten 5 richtig sind) angegeben. Von den im Briefe aufgeführten 17 Dezimalen sind die ersten 15 richtig, und diese 15 Dezimalen sind auch von Euler in seiner Abhandlung *Inventio summae cuiusque seriei ex dato termino generali* (Comment. acad. sc. Petrop. 8, 1736 [gedruckt 1741], S. 9—22, speziell S. 19) angegeben.

praecipue discrepat, quod semper aequationem realem exclusis imaginariis praebeat: id quod nisi ad quantitates vel exponentiales vel a circuli quadratura pendentes confugere velimus, effici omnino nequit.

Quas annotationes de motu oscillatorio corporum aquae innatantium mecum communicare voluisti, summa attentione, prout merentur, perpendi: primo autem videre non possum, cur neges motum centri gravitatis durante motu oscillatorio ab intervallo inter rectas verticales binas, quarum altera per centrum gravitatis totius corporis, altera per centrum gravitatis sectionis aquae transeat, pendere, multo minus cur statuas loco hujus posterioris rectae verticalis substitui oportere eam, quae per centrum gravitatis portionis corporis aquae submersae transeat: hae duae enim rectae in situ aequilibrii, quem ego perpetuo contemplor, ex eoque motum oscillatorium definio, necessario invicem incidere debent, ita ut intervallum absolute foret nullum. Deinde quod scribis durante motu oscillatorio centrum gravitatis moveri posse tam horizontaliter quam verticaliter, nullo modo cum mea theoria conciliare queo; mihi enim certum est, centrum gravitatis in motu oscillatorio ad motum horizontalem impelli omnino non posse: propterea quod virium sollicitantium media directio, a qua motus centri gravitatis pendet, perpetuo est in recta verticali posita. Quod denique attinet ad dubia, quae circa formulam meam

$$M\left(GO + \frac{\int (y^3 + z^3)\, dx}{3V}\right),$$

qua firmitatem definio, profers, quantum memini, jam dudum Tibi, Vir Excell., perscripsi, me ea formula momentum absolutum indicare, quod semper exprimitur facto ex potentia in lineam quandam rectam. Scilicet corpore ex situ aequilibrii per angulum infinite parvum $dw$ declinato, investigavi momentum virium corpus in situm aequilibrii restituentium, hocque momentum inveni esse

$$= M dw \left(GO + \frac{\int (y^3 + z^3)\, dx}{3V}\right);$$

ex quo momentum absolutum ita definivi ut sit

$$= M\left(GO + \frac{\int (y^3 + z^3)\, dx}{3V}\right);$$

ex hoc enim cognito facile intelligere licet, quanta vi corpus ex situ aequilibrii deturbatum sese restituere conetur, in quo ipso ideam firmitatis constituo

Aequatio differentialis secundi gradus

$$yx^2dx^2 + addy = 0,$$

posito $dx$ constante integrationem quidem non admittit, verumtamen ad aequationem simpliciter differentialem reduci potest ope hujus substitutionis $y = e^{\int z dx}$; prodibit enim

$$x^2 dx + adz + azzdx = 0,$$

quae utique nec integrari nec construi potest, nisi per eam methodum, qua jam pridem aequationem RICCATIanam

$$dy = yydx + ax^m dx,$$

cujus illa est casus, constructam dedi[1]).

Vale, Vir Celeberrime, mihique favere perge.

Dabam Petropoli d 20. Jun. St. vet. 1740.

## 26.

### Bernoulli an Euler 31. August 1740.

Antwort auf EULERS Brief vom 20. Juni 1740. Original verloren; der Teil des Konzeptes, der sich auf die angenäherte Summierung einer Anzahl von Gliedern der harmonischen Reihe bezieht, ist in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm aufbewahrt. Veröffentlicht von FUSS, a. a. O. S. 42—49, nach einer von N. FUSS verfertigten Abschrift des Originals.

*Inhalt.* Übersendung der zweiten Abteilung der *Dissertatio hydraulica*. — Über die Reihen

$$\frac{1}{1+n} + \frac{1}{4+n} + \frac{1}{9+n} + \frac{1}{16+n} + \cdots,$$

$$\frac{1}{1^n} \pm \frac{1}{2^n} \pm \frac{1}{3^n} \pm \frac{1}{4^n} \pm \cdots,$$

$$\frac{1}{1} \pm \frac{1}{2^2} \pm \frac{1}{3^3} \pm \frac{1}{4^4} \pm \cdots.$$

Angenäherte Summierung einer Anzahl von Gliedern der harmonischen Reihe. — Integration der unvollständigen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. — Schwingungen schwimmender Körper. — Über die Differentialgleichung $\frac{a d^2 y}{dx^2} + x^2 y = 0$.

Viro Eximio atque Celeberrimo LEONHARDO EULERO S. P. D.
JOH. BERNOULLI.

Ut tandem promissi fidem liberem, ecce! Tibi partem alteram meditationum mearum hydraulicarum mitto[2]); scriptura non admodum

1) Siehe die Abhandlung von EULER: *Constructio aequationis differentialis $ax^n dx = dy + y^2 dx$*; Comment. acad. sc. Petrop. 6, 1732—1733 (gedruckt 1738), S. 231—246.

2) *Dissertationis hydraulicae pars secunda, continens methodum directam et universalem solvendi omnia problemata hydraulica, quaecunque de aquis per canales cujuscunque figurae fluentibus formari ac proponi possunt*; Comment. acad. sc. Petrop. 10, 1738 (gedruckt 1747), S. 207—260. Ein vorläufiger Abdruck findet sich in den *Opera omnia* (t. IV, S. 432—488) des JOHANN BERNOULLI.

est nitida et figurae rudi omnino Minerva delineatae, omnia quippe tremente manu peracta: Res ipsa vero, ut spero, Tibi Tuoque judicio ideo non minus placebit. Methodum meam investigandi velocitates aquarum fluentium ita adornavi, ut esset generalissima, inserviens pro vasis et canalibus cujuscunque figurae atque modo quocunque inter se adaptatis. Abstinui in explicatione fundamentali ab idea gurgitis, ne scilicet Angli possent captare ansam confundendi gurgitem meum cum Newtoni catarracta, quasi ego illum ab hac mutuatus fuissem, etiamsi inter se toto coelo differant. Usum vero et actionem gurgitis involvi duobus principiis, *hydrostatico* uno, altero *hydraulico*, ex quorum debita combinatione tota mea theoria absolvitur; id cum ante me nemini in mentem venerit, mirum non est, quod pariter ante me nemo dederit veram et directam methodum determinandi velocitates fluidorum ex vasis et canalibus erumpentium: Tu, Vir Clar., primus fuisti, qui eo, quo polles, ingenii acumine, visis quae communicavi in prima scripti mei parte, statim eruisti solutionem velocitatis quaesitae fluidi ex quolibet vase prosilientis. Quod si nunc talia, hactenus tam densa caligine obsepta, nunc vero demum in lucem feliciter a me protracta, non mereantur, ut aliquando, promissum obtineant honorarium annuum, certe non video quid sit in posterum mihi sperandum . . .[1])

Transeo nunc ad jucundiora: Gratias ago pro communicatione methodi Tuae summandi hanc seriem:

$$\frac{1}{1+n}+\frac{1}{4+n}+\frac{1}{9+n}+\frac{1}{16+n}+\text{etc.}$$

Intelligo quidem modum reducendi illam ad hanc formam:

$$1\cdot\alpha\pi^2-n\beta\pi^4+n^2\gamma\pi^6-n^3\delta\pi^8+n^4\varepsilon\pi^{10}-\text{etc.}$$

sed non satis bene capio legem progressionis coefficientium $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, etc; quae enim disseris de eorum origine, obscura mihi sunt; aliquando Davus sum, non Oedipus, hoc praesertim tempore, quo praeter alia negotia, quibus distrahor, tam publica quam domestica, nunc ea accedunt, quae quotidie subnascuntur ex munere Decanatus oriunda, quod munus nuper meis ingratiis mihi fuit impositum, per integrum annum gerendum; unde vides attentionem, quae ad talia probe penetranda singulariter requiritur, saepissime interrumpi, id quod Tibi, qui hisce unice vacare potes, non aeque ac mihi contingit; adde incommoda senectutis meae, quae memoriam et attentionis facultatem mirum quantum debilitat.

1) Zwischen „sperandum" und „Transeo" stand offenbar im Briefe etwas, das bei Fuss ausgelassen ist. Da das Konzept des Briefes in Stockholm fehlt, kann ich nicht ermitteln, ob möglicherweise das bei Fuss ausgelassene sich auf eine überstrichene Stelle bezieht, die vermutlich in der von ihm benutzten Abschrift fehlt.

Quod vero attinet ad rationem quam habet series

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \text{etc.}$$

ad eandem, sed alternis signis sumtam:

$$1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} - \text{etc.}$$

vidisti in praecedentibus meis litteris, quod dixi non esse difficile demonstratu, summam prioris esse ad summam alterius ut $2^n$ ad $2^n - 2$. Hoc quidem jam olim perscripseram Leibnitio, ante initium hujus saeculi[1]), ut ex nostris litteris patet. Existente $n = 1$, oritur progressio harmonica

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{etc.},$$

quae erit ad $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \text{etc.}$ ut 2 ad 0; unde sequitur, progressionem harmonicam habere summam infinitam, quod alio modo ego olim,[2]) et postea Frater meus sed per ambages demonstrabamus, etsi veritas ejus tam facile ex ipsa ratione $2^n$ ad $2^n - 2$ fluat.

Placent quae habes de summis serierum

$$1 \pm \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} \pm \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} \pm \frac{1}{6^6} + \text{etc.}$$

sed suspicor Te non alia methodo fuisse usum, quam quae ex mea derivata est, cujus specimen jam dedi in Actis Lipsiensibus anni 1697.[3]) Ipsam vero analysin exposui in iisdem Actis 1737, mense Februarii[4]); ubi vidisti, fundamentum totius artificii in hoc consistere, ut ex dato quantitatis $x^x$ logarithmo $x\,\mathrm{l}x$ per reversionem redeatur ad ipsam $x^x$, ope seriei notissimae, quae ex logarithmo dat numerum, ita ut sit

$$x^x = 1 + x\,\mathrm{l}x + \frac{x^2\mathrm{l}x^2}{2} + \frac{x^3\mathrm{l}x^3}{2\cdot 3} + \frac{x^4\mathrm{l}x^4}{2\cdot 3\cdot 4} + \text{etc.}$$

Poteram utique, si vel tantillum atteudissem, generalius ponere $x^{mx}$, vel etiam $x^{mx}\cdot x^n$, et tum utique, sequendo methodum meam, eadem facilitate

1) Der fragliche Brief von Johann Bernoulli an Leibniz ist vom 1. Dezember 1696; vgl. *Leibnitii et Bernoullii Commercium* (Lausannae 1745) I, S. 218.

2) Siehe den in der vorigen Fußnote zitierten Brief von Johann Bernoulli an Leibniz; vgl. noch Johann Bernoulli, *Opera omnia*, t. IV S. 8.

3) Vgl. S. 54, Anm. 1.

4) Johann Bernoulli, *Demonstratio methodi analyticae, qua usus est pro determinanda aliqua quadratura exponentiali per seriem traditam olim in Actis Eruditorum a. 1697;* Acta Eruditorum 1737, S. 82—88 [= *Opera omnia*, t. III S. 376—383].

invenissem, quod Tu nunc mihi proponis, nempe $\int x^{mx}x^n dx$, seu quod idem est:

$$\int x^{mx+n}dx = \frac{1}{n+1} - \frac{m}{(n+2)^2} + \frac{mm}{(n+3)^3} - \frac{m^3}{(n+4)^4} + \frac{m^4}{(n+5)^5} - \frac{m^5}{(n+6)^6} + \text{etc.},$$

posito nempe post integrationem $x = 1$. Hinc nunc sponte fluit, quod tum temporis animadvertere negligebam, posito scilicet $m = -1$ et $n=0$, proditurum esse

$$\int x^{-x}dx \text{ seu } \int \frac{dx}{x^x} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} + \text{etc.}$$

Vellem autem scire, an fortasse per aliam viam huc perveneris, quam per meam ipsam; nam si Tua non esset diversa a mea, certe nihil fecisses quam mihi reddere meum cum foenore. En nunc par pari refero, et foenus foenore: Sit integrandum $\int x^{mx^p}dx$ per seriem, ubi $p$ est exponens constans ipsius $x$ in exponente $mx^p$, dico fore

$$\int x^{mx^p}dx = x - \frac{m}{(p+1)^2}x^{p+1} + \frac{mm}{(2p+1)^3}x^{2p+1} - \frac{m^3}{(3p+1)^4}x^{3p+1} + \text{etc.}$$

Expressionem, quam aequivalere inveneram huic seriei:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{x},$$

dedi tantum pro theoremate, quod terminorum summam accurate exhibet, non tantum proxime, neque dedi pro compendio, quale Leibnitius a me petebat, sed, ut dixi, pro theoremate. Quod si vero duntaxat postuletur modus approximandi ad summam terminorum ad ingentem numerum continuatorum, mihi videtur id effici posse quodammodo simplicius quam mihi perscripsisti; ecce quo pacto procedo. Addantur actu, ut Tu facis, Vir Excell., aliquot termini primores, quorum numerus sit $n$, quo major autem est hic numerus, eo propius pervenietur ad desideratum. Sit igitur summa horum terminorum $= C$, dicaturque $x = n + y$, erunt termini reliqui summandi sequentes:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \cdots + \frac{1}{n+y}.$$

Pono $dy = 1$, ut scilicet exprimatur haec series per

$$\frac{dy}{n+1} + \frac{dy}{n+2} + \frac{dy}{n+3} + \frac{dy}{n+4} + \cdots + \frac{dy}{n+y},$$

cujus integrale, seu summa est $l(n+y) - ln$, qui duo logarithmi sumendi sunt in logarithmica, quae habet subtangentem $=$ unitati; ut autem accommodentur ad logarithmicam, ad quam tabula logarithmorum Vlacci

supputata est, cujus subtangens est $= 4342945$, erit summa terminorum post terminum $\frac{1}{n}$ sequentium $\frac{l(n+y)-ln}{4342945}$, cui addatur summa terminorum praecedentium actu sumta, quae supponitur $= C$, habebitur summa totius seriei $= \frac{l(n+y)-ln}{4342945} + C$.

Exemplum 1. Quod Tuum est: Proponatur series ad terminum millionesimum prolongata:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1000000},$$

hoc est, sit $n+y=1000000$, sitque numerus terminorum praecedentium $n=10$, invenietur eorum summa actu addendo, nempe $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ $+\cdots+\frac{1}{10}=\frac{7381}{2520}=C$. Item $l(n+y)=l\,1000000=6{,}0000000$, atque $ln=l\,10=1{,}0000000$, adeoque $l(n+y)-ln=5{,}0000000$, unde summa totius seriei, seu $\frac{l(n+y)-ln}{4342945}+C=\frac{50000000}{4342945}+\frac{7381}{2520}=14\frac{967235489}{2188844280}$, qui numerus tantillo major est quam Tuus $14\frac{39272672286572329}{100000000000000000}$.

Exempl. 2. Esto numerus terminorum decem milliones: erit summa totius seriei $=\frac{60000000}{4342945}+\frac{7381}{2520}=16+\frac{967235489}{2188844280}+\frac{262822}{868589}=16\frac{3}{4}$ proxime.

Exempl. 3. Sit numerus terminorum centum milliones, erit summa totius seriei $=\frac{70000000}{4342945}+\frac{7381}{2520}=18+\frac{967235489}{2188844280}+\frac{525644}{868589}=19$ quam proxime.

Coroll. Crescente numero terminorum per decuplum, crescet summa seriei per $2\frac{262822}{868589}$, hoc est fere per $2\frac{1}{3}$.

Scholion. Quo major sumitur numerus primorum terminorum actualiter summandorum et quo longius continuata supponitur tota series, eo propius ad verum accedet regula colligendi seriem totam in unam summam. Ratio hujus est evidens, quia quo major est numerus $n$ totusque $n+y$, eo magis considerari potest unitas tanquam $dy$, seu elementum ipsius $n+y$.

Miror Te nunc dicentem, Vir Clarissime, methodum meam, pro tractanda aequatione

$$0=y+\frac{ady}{dx}+\frac{bddy}{dx^2}+\frac{cd^3y}{dx^3}+\text{etc.}$$

fere congruere cum Tua, cum tamen antea illam tanquam non satis generalem (utpote ad solas logarithmicas sese extendentem) praedicaveris. Estne forsan ejus rei ratio, quod me monente nunc demum intellexisti, Te

perperam putasse quod aequationes duae $pp + kp\sqrt{2} + kk = 0$ et $pp - kp\sqrt{2} + kk = 0$, in quas resolvitur aequatio algebraica $p^4 + k^4 = 0$, habeant radices duas ipsins *k reales*, cum tamen sint mere imaginariae, seu impossibiles? Hoc si supposuisti principium erroneum, oportet ut agnoscas, formulas illas, quas in anterioribus Tuis litteris mihi dedisti, non posse subsistere. Hoc unicum ergo sciscitor, an praeter meas logarithmicas habeas adhuc alias curvas possibiles, quae satisfaciant aequationi

$$0 = y + \frac{ady}{dx} + \frac{bddy}{dx^2} + \frac{cd^3y}{dx^3} + \text{etc.},$$

an vero formulae illae Tuae, pro exemplo particulari

$$y + \frac{ed^4y}{dx^4} = 0$$

datae, sint erroneae? rogo ut categorice respondeas, sicuti decet inter amicos. Factores quidem sunt reales $pp + kp\sqrt{2} + kk$ et $pp - kp\sqrt{2} + kk$, ex quibus componitur $p^4 + k^4$, sed non sunt aequationes reales, qui neutra habet radicem *k* possibilem. Quod spectat ad solutionem meam alterius aequationis differentialis gradus indefiniti

$$0 = y + \frac{axdy}{dx} + \frac{bxxddy}{dx^2} + \frac{cx^3d^3y}{dx^3} + \text{etc.},$$

gaudeo illam Tibi perplacuisse, atque quaedam compendia suppeditasse. Interim parum refert, quod promiscue praebeat casus reales et imaginarios (debet utique omnes praebere) sed in potestate est secernere reales ab imaginariis, quod sufficit.

Non opus esse censeo ut serram diutius reciprocemus inutiliter disputando de motu oscillatorio corporum aquae innatantium; video enim alterum ab altero non intelligi, quamvis forsan ambo recte sentiamus. Non dixi considerandam esse rectam verticalem eam, quae transeat per centrnm gravitatis *portionis corporis* aquae submersae, sed eam volui, quae transeat per centrum gravitatis, non quidem *portionis corporis*, sed *voluminis aquei*, quod portio ista occupat, et ita, ni fallor, locutus sum. Tu vero statuis rectam illam verticalem concipiendam esse tanquam transeuntem per centrum gravitatis *sectionis aquae:* interim quid, si ista duo centra essent in eadem recta verticali ex necessitate rei, foret utique nostra disputatio mera logomachia. Similiter dissentimus, uti videtur, tantum verbis, agentes de firmitate. Tu intelligis momentum ejusdem quam ego sumsi in sensu absoluto, haud aliter quam dicerem, vim firmitatis penduli simplicis ordinarii, oscillationes minimas facientis, esse ipsam fili tensionem, cujus vis aequalis est ipsi ponderi oscillanti et hac quidem vi, vel potius propter hanc vim affectat pendulum redire ad situm quietis, hoc est, ad situm ver-

ticalem, quod sufficit ad naturam firmitatis explicandam, etsi non improbam, pro accurata mensura habenda, vim illam multiplicari posse per arculum minimum, quem pondus excurrendo describit, ut ejus momentum prodeat.

Non me fugiebat, posse quidem aequationem secundi gradus

$$yx^2dx^2 + addy = 0$$

reduci ad aequationem simpliciter differentialem; est enim ex earum numero, pro quarum reductione inveni jam diu regulam generalem[7]), sed optabam talem, ut reducta esset integrabilis, vel saltem, concessa quadratura, construibilis; tali enim opus habebam ad certum aliquem scopum obtinendum.

Vale, Vir Excellentissime, meque porro ama.

Dabam Basileae a. d. 31. Aug. 1740.

## 27.

### Euler an Bernoulli 18. Oktober 1740.

Antwort auf Bernoullis Brief vom 31. August 1740. Original in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. Der Anfang des Briefes wurde schon 1743 im 4. Bande (S. 389) von Johann Bernoullis *Opera omnia* (der auf dem Titelblatte das Druckjahr 1742 hat) abgedruckt. Ein anderer Passus ist von Eneström in der Biblioth. Mathem. 1897, S. 47—48 veröffentlicht.

*Inhalt.* Über die zweite Abteilung von Johann Bernoullis *Dissertatio hydraulica.* — Über die Ausströmung von Flüssigkeiten aus Gefäßen. — Stand der Herausgabe der Commentarii der Petersburger Akademie. — Über gewisse Zahlen, die bei der Summation der Reihe

$$\frac{1}{1 \pm n} + \frac{1}{4 \pm n} + \frac{1}{9 \pm n} + \frac{1}{16 \pm n} + \cdots$$

vorkommen. — Über die Reihe

$$\frac{1}{1} \pm \frac{1}{2^2} \pm \frac{1}{3^3} \pm \frac{1}{4^4} \pm \cdots$$

und über die angenäherte Summation einer endlichen Anzahl von Gliedern der harmonischen Reihe. — Integration der unvollständigen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und besonders der Gleichung

$$y + e\frac{d^4y}{dx^4} = 0.$$

Viro Celeberrimo atque Excellentissimo Johanni Bernoulli S. P. D. Leonhard Euler.

Jam ante quidem maximi feci theoriam Tuam aquarum fluentium, propter veram et genuinam methodum, quam Tu, Vir Excellentissime,

7) Siehe den Aufsatz von Johann Bernoulli: *Reductio aequationis* $y^m ddy = qx^n dx^p dy^{2-p}$ *ad aequationem differentialem primi gradus, ubi supponitur* $ddx = 0$ in seinen *Opera omnia*, t. IV S. 79—80.

primus atque solus aperuisti ad hujus generis problemata solide pertractanda. Nunc vero, perlecta altera Tuarum meditationum parte, penitus obstupui foecundissima principiorum Tuorum applicatione ad perplexissima problemata resolvenda, quo utilissimo pariter ac profundissimo invento nomen Tuum celeberrimum apud posteros perpetuo erit sacrum. Obscurissimam autem atque abstrusissimam quaestionem de pressione quam latera vasorum ab aquis transfluentibus patiuntur, tam distincte et enucleate enodasti, ut nihil amplius in hac tam difficili re supersit, quod desiderari queat. Ut enim nemo, praeter Filium Tuum Celeberrimum, hoc argumentum attigit, qui tamen tantum cum totus motus sese jam ad statum permanentem composuerit, pressionem via satis indirecta definivit; ita Tu statim, methodo genuina patefacta, pressionem in omni aquae statu accuratissime determinasti, de quo Te dignissimo invento Tibi, Vir Excellentissime, ex animo gratulor, et pro communicatione maximas gratias ago.[1])

Quod vero attinet ad vim, qua vasa ab erumpente aqua retroaguntur, circa ipsam methodum qua uteris ad eam determinandam, minime quidem dubito; at dum pro tubis vasi horizontaliter infixis pressionem vas retro urgentem invenis diversam ab ea, quae Filii Tui hypothesi sit conformis, vis illa uti a Filio Tuo Clar. assignatur mihi quidem veritati magis consentanea videtur, quam Tua, quod pace Tua dixerim. Ex formula enim, quam pro retroactione in hoc casu affers, sequitur retroactionem posse esse quantumvis magnam, etiamsi foramen sit minimum, motusque lentissimus, hocque incommodo expressio a Filio Tuo data non laborat: mihi vero persuadeo, si hanc partem denuo examini subjicere dignaberis, Tuam theoriam cum Filii Tui sententia perfectissime esse consensuram; suspicor enim fractiones inverti debere, hocque pacto consensus cum veritate et expressione Filii Tui perfectissime restituetur.[2])

Occasio mihi nondum idonea sese obtulit Illustrissimo Praesidi Nostro, qui perpetuo gravissimis negotiis obruitur, justam Tuam petitionem proponendi,[3]) quare de hoc negotio nihil mihi respondere licet. Interim rogo ne existimes scripta Tua, quae hic in summo honore servantur, in oblivionis abyssum detradi; nam prima meditationum hydraulicarum pars jam actu typis mandatur in IX Comment. tomo, ad finem nunc quidem perductis tomis VII et VIII; qui autem tomi ante hos Tibi defuerant, eos mox a Filio Tuo accipies, cui eos per Hollandiam misi; anno autem proximo

1) Anbelangend diese Stelle vgl. den Brief von Daniel Bernoulli an Euler vom 4. September 1743 (Fuss, a. a. O. II, S. 531).

2) Die Richtigkeit dieser Ausstellung erkannte Johann Bernoulli in seiner Antwort an (siehe unten S. 78—79).

3) Vermutlich handelte es sich um eine Pension, die Johann Bernoulli durch Eulers Vermittelung bekommen würde.

certe tres tomos sequentes nancisceris, in quibus omnia Tua scripta praeter ultimam dissertationem conspicies.

Quae in antecedentibus litteris Tibi scripsi de coefficientibus $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, etc. hujus seriei

$$\alpha\pi^2 - \beta n\pi^4 + \gamma n^2\pi^6 - \delta n^3\pi^8 + \varepsilon n^4\pi^{10} - \text{etc.},$$

ea forte planiora fient, si dicam esse

$$\alpha = \frac{1}{6};\ \beta = \frac{2}{5}\cdot\alpha^2;\ \gamma = \frac{2}{7}\cdot 2\alpha\beta;\ \delta = \frac{2}{9}(2\alpha\gamma + \beta\beta);\ \varepsilon = \frac{2}{11}(2\alpha\delta + 2\beta\gamma);$$

$$\zeta = \frac{2}{13}(2\alpha\varepsilon + 2\beta\delta + \gamma\gamma);\ \text{etc.}$$

ubi fractionum numeralium $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{9}$, etc. lex progressionis est manifesta, reliqui vero factores $\alpha^2$, $2\alpha\beta$, $2\alpha\gamma + \beta\beta$, $2\alpha\delta + 2\beta\gamma$, etc. sunt illi ipsi coefficientes potestatum ipsius $x$. Si seriei

$$\alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \text{etc.}$$

quadratum capiatur, prodit enim

$$\alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta x^3 + (2\alpha\gamma + \beta\beta)x^4 + (2\alpha\delta + 2\beta\gamma)x^5 + \text{etc.},$$

hujusque proprietatis consideratione tota mea summatio absolvitur.

Jam pridem seriem hanc

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \text{etc.}$$

quam ex integratione $\int x^x dx$ casu $x = 1$ jam elapso saeculo eruisti, Vir Celeb., contemplatus ingenti quidem labore verumtamen proprio marte methodum eam inveniendi elicui, cujus summum consensum cum Tua methodo A. 1737 publicata demum perspexi: usus enim utique sum conversione hujus expressionis exponentialis $x^y$ in hanc seriem

$$1 + \frac{y\,lx}{1} + \frac{y^2(lx)^2}{1\cdot 2} + \frac{y^3(lx)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \text{etc.};$$

deinde hoc lemma in subsidium vocavi, esse $\int x^m dx(lx)^n$, si post integrationem ponatur $x = 1$, integrale

$$= \pm\frac{1\cdot 2\cdot 3\ldots\ldots n}{(m+1)^{n+1}},$$

ubi signum + valet, si $n$ est numerus par, signum vero —, si $n$ est impar. Hinc facile deduxi fore (si post integrationem ponatur $x = 1$)

$$\int x^{ax^m} dx = 1 - \frac{a}{(m+1)^2} + \frac{aa}{(2m+1)^3} - \frac{a^3}{(3m+1)^4} + \text{etc.}$$

Methodus mea assignandi summam quotcunque terminorum hujus seriei harmonicae

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \text{etc.}$$

magis quidem operosa est quam Tua, Vir Exell., additis enim actu aliquot terminis initialibus, pro valore sequentium omnium exhibeo seriem maxime convergentem, cujus ope illorum summa quantumvis prope assignari potest. Tu vero pro illis terminis sumis tantum primum meae seriei terminum: unde fit ut meae summae in fractionibus decimalibus inventae nequidem in ultima figura a veritate discrepent.

Nunquam ego quantum memini dixi methodum Tuam integrandi hanc aequationem

$$0 = y + \frac{ady}{dx} + \frac{bddy}{dx^2} + \frac{cd^3y}{dx^3} + \text{etc.}$$

non satis esse generalem: sed tantum dixi eam hoc laborare incommodo, ut saepissime integrale quantitatibus imaginariis involutum exhibeat. Quotiescunque autem aequationis differentialis realis invenitur aequatio integralis imaginariis inquinata, toties ea in aliam formam illi quidem aequivalentem sed realem transformari potest, atque in hoc solo mea methodus a Tua differt, ut mea statim illas expressiones reales pro integrali exhibeat. Quo in negotio miror Te, Vir Celeb., integrale aequationis

$$y + \frac{ed^4y}{dx^4} = 0$$

a me datum a Tuo re vera discrepans arbitrari, cum ego tantum logarithmicarum imaginariarum, quas Tu invenis, statim earum valores reales per quadraturam circuli expressos exhibeam; eoque magis miror quod Tute primus reductionem quadraturae circuli ad logarithmos imaginarios et vicissim patefeceris.[1]) Categorice itaque, uti postulas, respondeo, me integrale aequationis

$$y + \frac{ed^4y}{dx^4} = 0$$

a me datum non solum pro vero agnoscere, verum etiam id a Tuo logarithmis imaginariis constante specie tantum, non autem ipsa re dissentire. Æque nimirum integralia nostra inter se conveniunt, ac istae expressiones $e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}$ et 2 cos A. $x$, etsi specie maxime a se invicem diversae, existente $le = 1$: utraque enim expressio in seriem mutata eandem dat seriem

1) Siehe die Abhandlung von Johann Bernoulli, *Solution d'un problème concernant le calcul intégral avec quelques abregés par rapport à ce calcul;* Histoire de l'académie des sciences [de Paris] 1702; Mémoires S. 296–305 [= *Opera omnia*, t. I S. 393–400].

$$2\left(1 - \frac{xx}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{x^6}{1\cdot 2\cdots 6} + \text{etc.}\right).$$

Utraque etiam est valor integralis ipsius $y$ ex aequatione

$$ddy + ydx^2 = 0;$$

cujus ideo si alter nostrûm dicat integrale esse

$$y = e^{+x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}$$

alter vero esse

$$y = 2\cos A.\, x,$$

diversis quidem modis idem dicimus, at posterior expressio magis est intelligibilis, ex eaque facilius pro quovis ipsius $x$ valore proposito conveniens valor ipsius $y$ exhiberi potest. Demonstrare autem possum, quoties in integratione Tua methodo instituta perveniatur ad logarithmicas imaginarias, eas semper ita esse comparatas, ut illarum binae conjunctae sinum vel cosinum cujuspiam arcus, hoc est quantitatem realem repraesentant; atque mea methodo statim valores hos reales loco quantitatum imaginariarum introduco.

Vale, Vir Excellentissime, meque favore Tuo, quo mihi nihil est carius, complecti perge.

D. Petropoli d. 18 Oct. 1740.

## 28.

## **Bernoulli** an **Euler** 18. Februar 1741 [mit Postskriptum vom 1. September 1741].

**Antwort auf Eulers Brief vom 18. Oktober 1740; das Postskriptum bezieht sich auf einen verlorenen Brief von Euler vom August (?) 1741. Original im Archiv der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg. Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. S. 50—58.**

*Inhalt.* Johann Bernoulli beklagt sich über die Gebrechlichkeiten des Alters. — Berichtigung von Fehlern in der zweiten Abteilung der *Dissertatio hydraulica.* — Anzeige des Empfanges der von Euler übersandten Schriften. — Ermittelung von $\int x^p dx\,(\log x)^q$. — Integration der unvollständigen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. — Über Eulers Berufung nach Berlin.

Viro Celeberrimo atque Excellentissimo Leonhardo Eulero S. P. D.
Joh. Bernoulli.

Jam duo elapsi sunt menses et amplius cum ad me perferrentur litterae Tuae novissimae, quo ipso tempore in lecto decubui misere laborans doloribus podagricis, chiragricis, ut et tussi asperrima, asthmate aliisque symtomatibus, praesertim quadam paralysi, quae manum dextram ita corripuit ut per plures hebdomadas calamo ad scribendum uti non potuerim,

imo ne nunc quidem possim expedite exarare litteras quas non tam scribo quam pingo, ob vehementem manus tremorem, jam a longo tempore me infestantem atque indies ingravescentem; talia sunt senectutis incommoda, a quibus curari posse nulla spes affulget. Sed ne Te molestem importunis meis querelis, festino, at lente, ad litterarum Tuarum contenta.

Vix credideris, Vir Excell., quanto me gaudio perfuderit elogium quo decorare voluisti meditationes meas hydraulicas, a Te enim laudari, qui omnium es perspicacissimus simul etiam judex integerrimus, potiori mihi duco honori quam si a mille aliis laudarer; inserviet mihi judicium Tuum, tanquam omni exceptione majus, contra quosvis cavillatores, sive sint invidi sive ignari; facile enim percipis, non defuturos, praesertim in Anglia, qui more suo extenuabunt inventum non aliam ob causam quam quia debetur extraneo. Interim probe observasti *ἀβλεψίαν* meam, in determinanda vi retroactionis aquae ex vase per canalem horizontalem erumpentis; notasti quoque, uti decet, lapsum illum meum plane non promanasse ex fundamentis meae theoriae, sed tantum ex ejusdem perversa applicatione per meram inadvertentiam facta. En hujus rei originem. Cum in describendo alteram partem Hydraulicae meae pervenissem ad hunc locum, ubi de vi retroactionis ago, de qua materia ne cogitaveram quidem adhuc, ex improviso contigit ut inciderem in quasdam litteras veteres Filii mei,[1]) ubi praeter expectationem inveni aliquas formulas (sed sine analysi vel demonstratione) expositas; curiosus itaque videndi an respondeant principiis a me positis, festinanter feci calculum, quo tempore vestigia theoriae meae fere jam erant in ideis meis obliterata, quod ob memoriae labilitatem hac qua sum aetate saepissime mihi accidit; unde factum est ut putarem quemadmodum aqua erumpens ex vase per orificium in tubum primum, suam exerit (?) vim in latus vasis tubo oppositum, ita quoque considerandam esse vim retrourgentem aquae transeuntis ex quolibet tubo per foramen suum in tubum proxime sequentem, quod autem nunc video verum non esse, quia illa vis quaelibet sustinetur vel potius absorbetur ab aqua jugiter pone (?) sequente, adeo ut illa vis omnis jam contineatur in vi primitiva, quacum ex vase ipso in tubum primum pellitur et quae in latus oppositum vasis retroagit; sed quod incautus neglexi hoc fuit, quod debebam sumere vim aquae prementem fundum vel laminam perforatam, cum transit ex quolibet tubo in sequentem contiguum; hinc patet omnes istas vires, utpote antrorsum agentes, debere subtrahi a vi illa primitiva retrourgente, adeoque residuum tantum dare veram et absolutam vim qua vas retropellitur; proin tantum abest, ut quemadmodum putâram augeatur vis illa

1) Vgl. in betreff dieses Briefes von Daniel Bernoulli an seinen Vater, was jener in seinem Briefe an Euler vom 5. November 1740 (Fuss, a. a. O. II, S. 463) bemerkt.

primitiva a multitudine tuborum adaptatorum in amplitudine decrescentium, ut potius diminuatur eadem prout numerus tuborum crescit, decrescentibus amplitudinibus. Haec est rei gestae narratio. Cur autem mentionem fecerim Filii mei a me abludentis, id factum est, quia credebam ipsius solutionem a mea discrepantem extare in sua *Hydrodynamica*, atque ideo absurdum fore si silentio praeterirem, quando videret publicum nos esse in contradictoriis. Rogaris ergo, Vir Clariss., ut supprimas in scripto meo transmisso quatuor articulos erroneos, nimirum art. 28, 29, 30 et 31 una cum duobus subjunctis corollariis, eorumque loco substituas totidem alios in separata charta Tibi transmittendos.[1]) Videbis nunc me conspirare cum Filio pro casu unius tubi in § 28 explicato, ut et quod attinet ad duos tubos vasi adaptandos, qui casus est § 29, ubi pariter non est dissensus inter nos; unum tamen credere me facit, Filium ipsummet suo solvendi modo non satisfactum esse, quia non video causam cur de tribus tubis pluribusve numero determinatis nihil omnino dixerit, totamque istam materiam in opere suo hydrodynamico omiserit. Quod dedit de numero infinito tuborum seu de canali conoidico decurtato, qui casus est facilis, mecum convenit.

Pergo, Vir Excel., ad reliqua epistolae tuae capita. Accepi tandem nuper per manus Filii libros inter quos inveni quoque *Musicam* Tuam, pro qua, si missa est ex Tua liberalitate, debitas refero gratias. Legam eam quam primum licuerit per valetudinem. Optarim vero ut quae imposterum mittenda sunt, non per mercatores sed alia via commodiori transmittantur; hi enim lucripeti homines, qui nil faciunt nisi quaestus gratia, tot sumtus exigunt variis sub titulis, ut dubitem an non exsuperaturi essent pretium quod valerent libri ipsi si in auctione aliqua statim divendi deberent. Fortassis melius et promtius Tubingam dirigerentur, ut olim jam factum memini, ad Clar. Bulffingerum, qui a nobis non plus peteret quam quod ipse erogaturus esset.

Ob distractiones alienas viresque ex morbo adhucdum prostratas non licet profundius tentare jam serierum materiam, in quibus tanquam in elemento Tuo versaris felicissime; habeo interim de quo mihi gratulor, videns inventa mea olim facta Tibi saepissime ansam dare eruendi exquisitissimas veritates, aliaque producendi inventa ex meis deducta; inter talia refero quae nunc habes de sequestrandis integralibus imaginariis a realibus,

1) Laut dem Postskriptum des Briefes wurden diese Änderungen am 1. September 1741 an Euler abgesandt. Aber schon am 20. September 1741 schrieb Daniel Bernoulli an Euler, daß er die Änderungen falsch befunden hatte (siehe Fuss, a. a. O. II, S. 475), und zuletzt gab auch Johann Bernoulli dies zu, denn in seinem Briefe an Euler vom 28. Oktober 1741 ersuchte er diesen (vgl. Fuss, a. a. O. II, S. 60), die am 1. September 1741 übersandten Änderungen zu unterdrücken.

quae utique omnia fluunt ex eo, quod expressiones quadraturae circuli reduci possunt ad logarithmos imaginarios et vicissim, quod me primum patefecisse, et quidem jam ab initio hujus saeculi, ingenue agnoscis. Tale quid etiam est, quod jam in superiori saeculo dedi pro integratione $\int x^x dx$ in casu quo $x = 1$, eo artificio usus ut ex logarithmo ipsius $x^x$, nempe ex $x \mathrm{l} x$, iterum formarem, regrediendo ad numerum, valorem ipsius $x^x$ per seriem

$$1 + \frac{x \mathrm{l} x}{1} + \frac{xx(\mathrm{l}x)^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3(\mathrm{l}x)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.}$$

quod usque adeo placuit Klingenstiernio,[1]) professori matheseos Upsaliensi, ut sciscitaturus originem meae seriei

$$\int x^x dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \text{etc.},$$

casu $x = 1$, quam suo Marte nullatenus invenire poterat, praecipue hunc in finem iter ad me fecerit, per 6 menses postea commoratus, mea institutione usurus. Miror vero quod dicis, Vir Celeb., Te *ingenti* labore elicuisse methodum eam inveniendi, cum tamen ego non magnum laborem adhibuerim pro isto negotio, ut vidisti ex methodo mea quam demum A. 1737 publicavi, postquam fere per 40 annos eam suppresseram. Lemma illud pro inveniendo valore ipsius $\int x^m dx(\mathrm{l}x)^n$, quod dicis in subsidium vocasse, jam tum temporis mihi innotuisse, cum solutionem ipsam integrationis formulae $\int x^x dx$ adinveni, facile percipis, siquidem unum sine altero vix fieri potest: cujus rei ut Tibi fidem faciam, transcribam quod in schedula scriptum inveni inter chartas meas antiquas; calculus est brevis et perfacilis atque methodus similis illi per quam inveni seriem meam universalem pro integrando $\int n dz$ quam dedi in Actis Lips. 1694 ni fallor.[2]) Ecce ergo,

1) Der bekannte schwedische Mathematiker Samuel Klingenstierna (geb. 1698, gest. 1765) machte 1728 eine Studienreise nach Marburg und Basel. Daß er sich vorzugsweise für den von Johann Bernoulli angegebenen Zweck nach Basel begab, scheint mir wenig wahrscheinlich, und meine Ansicht wird auch durch den folgenden Passus eines Briefes bestätigt, den Johann Bernoulli am 26. Oktober 1728 an J. J. Scheuchzer schrieb (das Konzept des Briefes befindet sich in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm): „J'ai présentément sous mon information un suédois nommé Mr. Klingenstiern, qui est aussi professeur désigné en mathématiques à Upsal et qui est aussi venu de si loin exprès pour profiter de mes faibles lumières quoique, pour dire la vérité, il entend déjà la plus sublime géométrie à merveille, en sorte que je ne sais ce que la renommée a menti de moi, qui l'ait pu attirer ici de son pays septentrional".

2) Siehe Johann Bernoulli, *Additamentum effectionis omnium quadraturarum et rectificationum curvarum per seriem quandam generalissimam;* Acta Eruditorum 1694, S. 437—441 [= *Opera omnia*, t. I S. 125—128].

retentis meis symbolis, integrationem formulae $\int x^p dx(lx)^q$, ubi $p$ et $q$ idem sunt quod apud Te $m$ et $n$. Operatio est ut sequitur:

$$\int x^p dx(lx)^q = \frac{1}{p+1}x^{p+1}\cdot lx^q - \frac{1}{(p+1)^2}x^{p+1}q\,lx^{q-1}$$

$$+\frac{1}{(p+1)^3}x^{p+1}\cdot q-1\cdot q\,lx^{q-2} - \frac{1}{(p+1)^4}x^{p+1}\cdot q-2\cdot q-1\cdot q\,lx^{q-3}$$

$$+\frac{1}{(p+1)^5}x^{p+1}\cdot q-3\cdot q-2\cdot q-1\cdot q\,lx^{q-4} - \ldots\ldots$$

$$\pm\frac{1}{(p+1)^{q+1}}x^{p+1}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots q.$$

Nota. Si numerus terminorum, seu $q+1$, est par, finietur progressio signo $-$, sin vero $q+1$ sit impar, finietur signo $+$.

Coroll. In casu, quo $x$ evadit $=1$, evanescunt omnes termini excepto solo ultimo, singuli enim, in quibus est $lx$ ejusque aliqua potestas, aequantur zero ex natura logarithmorum, nam exponens $q$ supponitur affirmativus; adeoque erit in hoc casu

$$\int x^p dx lx^q = \frac{\pm 1}{(p+1)^{q+1}}x^{p+1}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots q = \frac{\pm 1}{(p+1)^{q+1}}1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots q.$$

Vides expressionem meam ante tot annos inventam Tuae quidem omnino esse consentaneam, sed non notasti quod requiratur meum $q$ vel Tuum $n$ debere esse affirmativum. Dubito an inveniri possit formula aliqua pro casu in quo $q$ vel $n$ esset negativum. Inveni quidem hanc aliam seriem

$$\int x^p dx(lx)^q = x^{p+1}\Big(\frac{1}{1+q}(lx)^{1+q} - \frac{p+1}{1+q\cdot 2+q}(lx)^{2+q}$$

$$+\frac{(p+1)^2}{1+q\cdot 2+q\cdot 3+q}(lx)^{3+q} - \frac{(p+1)^3}{1+q\cdot 2+q\cdot 3+q\cdot 4+q}(lx)^{4+q} + \cdots\Big)$$

quae pro negativo $q$ aeque valet ac pro affirmativo, mutando tantum signa ante $q$ posita. Sed nihil inde in rem nostram hactenus elicere potui.

Quod attinet ad methodum meam integrandi hanc aequationem

$$0 = y + \frac{ady}{dx} + \frac{bddy}{dx^2} + \frac{cd^3y}{dx^3} + \text{etc.},$$

non amplius scio an dixeris eam non satis esse generalem, de hoc vero non agebatur, nam ipsemet ego dubitavi de ejus legitima generalitate, siquidem pro fundamento posui curvam satisfacientem esse ex classe logarithmicarum, cujus subtangens tantum quaerenda sit, etiamsi nondum pro demonstrato habuerim, imo ne nunc quidem habeam, nullam curvam ex

alio curvarum genere dabilem esse, quae forsan etiam respondeat propositae aequationi. At vero scandalum mihi facesserat (hinc enim oborta est nostra controversia) quod in aliqua Tua anteriori epistola dixisti aequationem algebraicam, ad quam ego etiam dudum perveneram,

$$p^4 + k^4 = 0,$$

resolvi in has duas aequationes duarum dimensionum *reales*:

$$pp + kp\sqrt{2} + kk = 0 \text{ et } pp - kp\sqrt{2} + kk = 0.$$

Ad quod ego respondi, has quantitates esse quidem factores reales, in quos altera illa

$$p^4 + k^4 = 0$$

resolvi potest, quod jam olim demonstratum dedi Tayloro,[1]) sed illos factores utut reales non tamen posse esse aequationes reales, hoc est, non posse habere radices reales, adeoque impossibile esse ut $pp \pm kp\sqrt{2} + kk$ fieri possit = zero; fortassis autem mentem Tuam non satis clare expressisti. Caeterum facile concipio, quomodo ex logarithmis imaginariis perveniri possit ad valores reales per quadraturam circuli exprimendos, et quî ignorare possem, cum primus hanc materium in scenam produxerim. Cavendum interim suspicor ne quod hic de imaginariis primi gradus intelligitur idem extendi debeat ad imaginaria altiorum graduum, dubito, inquam, an si reperiretur

$$y = e^{+x\sqrt[b]{-1}} + e^{-x\sqrt[b]{-1}},$$

idem reduci posset ad quadraturam circuli realem.

Audivi cum voluptate, Te, Vir Celeb., invitatum esse nomine regis Borussiae ad novam academiam Berolini stabiliendam, imo Te jamjam acceptasse invitationem, de quo honore Tibi ex animo gratulor. Velit Deus secundare Tua coepta atque Te comitari in itinere, jam proximo, ut intelligo, mense Junii suscipiendo. Rogo ut mihi scribas quantum Tibi promissum sit salarium annuum. Etiam ego et ambo mei Filii accepimus litteras invitatorias jussu regio, sed mihi grandior est aetas et valetudo nimis vacillans, quam ut possim, quemadmodum optarem, auscultare tam honorificae atque illecebrosae ablectationi. Si vicenis annis junior essem, mehercle, ne per momentum quidem cunctarer; mihi adeo sordent omnia in patria. Quid consilii capturi sint Filii mei, nondum scio; expectabunt

---

1) Siehe Johann Bernoulli, *Clar. Taylori mathematici Angli problema analyticum, quod omnibus geometris non-Anglis proposuit, solutum;* Acta Eruditorum 1719, S. 256—270 [= *Opera omnia,* t. II S. 402—418], vgl. oben S. 40, Anm. 2.

credo significationem magis praecisam conditionum offerendarum, id quod fiet, si conjectare licet, finita expeditione in Silesiam suscepta. Quando veneris Berolinum, habebimus Te multo viciniorem, quod me sperare facit, Te aliquando ad Patrios Lares exspatiaturum, salutandorum Parentum gratia, quo ipso Tui videndi copia mihi daretur, quod vehementer desidero priusquam morior.

Interim Vale, Vir amicissime, et me amare perge.

Dabam Basileae d. 18. Febr. st. n. 1741.

*P. S.* Sicuti scribis, pars prior hydraulicorum meorum jam erit impressa in IX Comment. tomo; pars altera sine dubio typis mandabitur pro tomo X. Sed cura quaeso ut correcte prodeat atque immunis a vitiis typographicis, quod monere necesse duco, quia vidi in tomo V exercitationem meam de triangulo retrocedente a pressione ponderis, hypothenusae impositi, tot scatere erroribus a typotheta commissis, ut ipse me vix cognoscere potuerim vel cogitata mea intelligere. Imprimis optarim ut figurae, Hydraulicae meae inservientes, a chalcographo caelentur cum aliqua venustatis gratia, quales ego exprimere non potui, quia nunquam didici delineandi artem, et omnes tremula manu, utcunque potui, in chartam conjeci: Ad hoc autem opus erit ut Tu, Vir Excell., vel alius quispiam harum rerum peritus explicet chalcographo quid in singulis locis observandum sit ad res ipsas menti meae convenientes nitide probeque repraesentandas.

---

Hasce jam scriptas dimissurus eram mense Februario, Vir Celeb., cum nuncius paulo ante ad nos deferretur de descessu Tuo tanquam proxime instanti, id quod fecit, ut retinuerim donec scirem adventum Tuum Berolinum, veritus ne Te non amplius inveniant Petropoli, quanquam ut nunc video sat temporis ante abitum Tuum superfuisset quo meas litteras (si misissem) ibi adhuc accipere potuisses; mitto tamen nunc, etsi sero, ne responsione careat ad Tuas anteriores. Rogo ut schediasma adjectum quantocius Petropolin transmittas, spero enim satis mature illuc venire posse, ut inseri queat parti secundae Hydraulicae meae, antequam tomus X Comment. eousque impressus sit. Caeterum jucundissimum fuit intelligere ex novissimis Tuis litteris Berolini datis et nudius tertius acceptis, Te una cum Tua familia felicissime adventasse in locum novae Tuae stationis, de quo Tibi gratulor voveoque ut omnia Tibi ex animi sententia eveniant. Gratulor et mihi Te nobis viciniorem factum, indeque spem affulgere futurum ut aliquando huc excurras ad salutandum parentes et amicos, quod ut fiat ante meam mortem est quod ardentissime desidero. Non possum satis admirari excessum Tuae erga me benevolentiae,

videns Tibi res meas usque adeo cordi esse, ut ultro et non rogatus easdem deferri curaveris ad Illustrissimum Comitem Ostermannum,[1]) quam in partem quoque adduxisti, sicuti ais, Clariss. Prof. et Consiliarium Grossium, qui hoc onus in se suscepturum promiserit. Nihil jam reliquum est hac vice, quam ut Te, amice exoptatissime, quamvis absentem, animo exosculer, donec id, si Superis placet, coram facere possim. Vale, iterumque vale.

Basil. a. d. 1. Sept. 1741.

### 28*.

### Euler an Bernoulli August (?) 1741.

Verloren; zitiert von Bernoulli in seinem Postskriptum an Euler vom 1. September 1741 („Jucundissimum fuit intelligere ex novissimis tuis litteris Berolini datis").

### 28**.

### Euler an Bernoulli 16. September 1741.

Verloren; zitiert von Bernoulli in seinem Brief vom 28. Oktober 1741 („ignosce tardiuscule respondenti ad litteras Tuas Berolini datas d. 16. Sept.").

### 29.

### Bernoulli an Euler 28. Oktober 1741.

Antwort auf Eulers verlorenen Brief vom 16. September 1741. Original im Archiv der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg. Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. S. 59—63.

*Inhalt.* Neue Berichtigungen zur zweiten Abteilung der *Dissertatio hydraulica*. — Eulers Stellung in Berlin. — Johann Bernoulli selbst muß den Ruf nach Berlin ablehnen. — Die Integration der unvollständigen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. — Johann Bernoullis amtliche Verpflichtungen.

### 29*.

### Euler an Bernoulli 26. Dezember 1741.

Verloren; zitiert von Bernoulli in seinem Brief vom 15. März 1742 („Distuli responsionem ad literas Tuas die 26. Decembris datas").

### 30.

### Bernoulli an Euler 15. März 1742.

Antwort auf Eulers verlorenen Brief vom 26. Dezember 1741. Original im Archiv der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg. Veröffentlicht von Fuss a. a. O. S. 64—71.

*Inhalt.* Die politischen Verhältnisse in Rußland und Preußen und ihre mutmaßliche Einwirkung auf die Akademien in St. Petersburg und Berlin. — Über die Rückwirkung der aus Gefäßen ausströmenden Flüssigkeiten. — Zwei mechanische Probleme in betreff der Bewegung eines Körpers, der in einer Röhre eingeschlossen ist, welche sich um eine Achse dreht; im ersten Falle dreht sich die Röhre in einem Vertikalplane auf Grund der Schwere des Körpers, im anderen Falle geschieht die Drehung der Röhre in einem Horizontalplane mit gleichmäßiger Geschwindigkeit.

1) Der fragliche russische Staatsmann Andrej Iwanowitsch Ostermann (1686—1747) wurde bekanntlich während der Revolution in St. Petersburg 1741 verhaftet und zum Tode verdammt, obgleich er später begnadigt wurde.

## 30*.

### Euler an Bernoulli Mai 1742.

**Verloren; zitiert von Bernoulli in seinem Brief vom 27. August 1742 („Jam propemodum quadrimestre effluxit ex quo ultimas Tuas litteras accepi").**

## 81.

### Bernoulli an Euler 27. August 1742.

**Antwort auf Eulers verlorenen Brief vom Mai 1742. Original im Archiv der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg; Konzept in der Bibliothek der Akademie der Wissenschaften in Stockholm. Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. S. 72—81.**

*Inhalt.* Johann Bernoullis Kränklichkeit. — Die Akademien in St. Petersburg und Berlin. — Die zwei im vorigen Briefe behandelten mechanischen Probleme und ein Satz über die Bewegung eines Körpers der einen Stoß bekommen hat, dessen Richtung nicht durch den Schwerpunkt des Körpers geht. — Über die Rückwirkung der aus Gefäßen ausströmenden Flüssigkeiten.

[Das in Stockholm aufbewahrte Konzept enthält am Ende folgende Anfzeichnung von Johann Bernoulli.]

Ex natura virium vivarum debebat esse

$$\left(qaa + \frac{pttdy^2 + pyyds^2}{ds^2}\right) \times \int \frac{yds}{qaa + pyy} = ys,$$

seu

$$\left(qaa + pyy + \frac{pttdy^2}{ds^2}\right) \times \int \frac{yds}{qaa + pyy} = ys;$$

est autem ex natura curvae inventae

$$\int \frac{yds}{qaa + pyy} = \frac{ds^2}{pttdy^2} \int sdy,$$

ideoque substituendo hoc pro illo prodibit

$$\left(qaa + pyy + \frac{pttdy^2}{ds^2}\right) \times \frac{ds^2}{pttdy^2} \int sdy = ys,$$

seu

$$\left(\frac{qaads^2 + pyyds^2}{pttdy^2} + 1\right) \int sdy = ys,$$

hoc est

$$(qaads^2 + pyyds^2 + pttdy^2) \int sdy = pttysds^2.$$

Sed hinc nihil adhuc liquet pro veritate aequationis inventae; interim tamen etiam nihil in contrarium conduci potest. Videamus autem, an in uno alterove casu particulari aliquid inde evidentiae elici queat. Sit igitur primo $p$ infinite parvum respectu $q$; hoc casu aequatio nostra generalis

$$\frac{ds^2}{tt} \int sdy = pdy^2 \int \frac{yds}{qaa + pyy}$$

pro natura curvae inventae degenerat in hanc

$$\frac{ds^2}{tt} \int sdy = 0 \cdot dy^2 \int \frac{yds}{qaa}, \text{ ideoque } \frac{ds^2}{tt} \int sdy = 0,$$

seu $ds = 0$, id quod indicat in hoc casu fore $s =$ constanti cuilibet, ac proinde situm tubi, in quo descendit ponduscnlum $p$ esse invariabilem, ingens enim corpus $q$ gravitatis expers non potest in motum concitari a pondnsculo $p$ infinite parvo. Hactenus igitur aeqnatio nostra verum exhibet.

Sit nunc $q$ infinite parvum respectu $p$, quo casu patet, curvam quaesitam abire in rectam verticalem quamlibet, quia $q$ nihil impedire potest quominus pondus $p$ ex situ suo initiali liberrime descendat, ut faceret in vacuo, si esset extra tubum. Examinemus nunc quid monstret aequatio nostra generalis

$$\frac{ds^2}{tt}\int s\,dy = p\,dy^2\int\frac{y\,ds}{qaa+pyy};$$

haec utique in hoc casu abit in hanc

$$\frac{ds^2}{tt}\int s\,dy = dy^2\int\frac{ds}{y}.$$

Ut autem pateat, utrum respondeat necne rei veritati: sit ponderis $p$ distantia initialis a centro rotationis (qnando scil. tubus adhuc est in situ horizontali) $b$; erit ergo

$$y = \frac{ab}{t} = \frac{ab}{\sqrt{(aa-ss)}} \text{ et } dy = \frac{absds}{(aa-ss)^{\frac{3}{2}}},$$

quibus substitutis mutatur aeqnatio generalis in hanc specialem

$$\frac{ds^2}{aa-ss}\int\frac{abssds}{(aa-ss)^{\frac{3}{2}}} = \frac{aabbssds^2}{(aa-ss)^3}\int\frac{ds\sqrt{(aa-ss)}}{ab},$$

porroque in hanc

$$\int\frac{ssds}{(aa-ss)^{\frac{3}{2}}} = \frac{ss}{(aa-ss)^2}\int ds(aa-ss)^{\frac{1}{2}}.$$

Quae reducta non videtur fore identica.

Nota. Quod hic vocatur $s$, id in ipsa epistola est $x$.

### 31*.

### Euler an Bernoulli 22. September 1742.

Verloren; zitiert von Bernoulli in seinem Brief vom März 1743 („Defectus attentionis non permittit aliter respondere ad litteras Tuas d. 22. Sept. 1742 scriptas"). Vgl. auch den Brief von Daniel Bernoulli an Euler vom 20. Oktober 1742 (Fuss, a. a. O. II, S. 500).

### 32.

### Bernoulli an Euler März 1743.

Antwort auf Eulers verlorenen Brief vom 22. September 1742. Original im Archiv der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg. Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. S. 82–87.

*Inhalt.* Die Akademien in St. Petersburg und Berlin. — Das erste der in den zwei vorigen Briefen behandelten mechanischen Probleme. — Ein anderes ähnliches Problem, das Euler als neu bezeichnet hatte, dessen Lösung aber Bernoulli als eine unmittelbare Anwendung einer bekannten Methode betrachtet. — Die Bewegung eines Körpers auf Grund eines Stoßes, dessen Richtung nicht durch den Schwerpunkt des Körpers geht. — Über die Zuverlässigkeit der von Daniel Bernoulli in seiner *Hydro-*

*dynamica* angeführten Experimente. — Johann Bernoulli empfiehlt den Verleger Bousquet.

### 32*.

### Euler an Bernoulli 1744.

Verloren; zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Brief an Euler vom 29. August 1744 („Mein Vater hat mir beiliegende Schrift als eine Antwort auf Ew. letztes Schreiben übergeben", siehe Fuss, a. a. O. II, S. 566).

### 32**.

### Euler an Bernoulli 1745 (?).

Verloren; zitiert von Daniel Bernoulli in seinem Brief an Euler aus dem Anfang des Jahres 1745 („Dero Brief hab ich demselben [= meinem Vater] überliefert", siehe Fuss, a. a. O. II, S. 569).

### 33.

### Bernoulli an Euler 23. September 1745.

Original im Archiv der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg. Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. S. 88—91.

*Inhalt.* Fortgesetzte Wehklage über die Gebrechlichkeiten des Alters. — Über zwei von Euler übersandte Schriften. — Berichtigung der irrigen Angabe, daß Taylor die Bewegung eines Körpers in resistentem Medium bestimmt hatte für den Fall, daß der Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit des Körpers proportional ist. — Eulers Arbeit über isoperimetrische Kurven. — Leibniz' und Bernoullis *Commercium.*

### 34.

### Bernoulli an Euler 24. Mai 1746.

Original im Archiv der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg. Veröffentlicht von Fuss, a. a. O. S. 92—93.

*Inhalt.* Sieg des Prinzips der lebendigen Kraft in Frankreich.

# Über den Begriff der analytischen Funktion bei Jacobi und seine Bedeutung für die Entwickelung der Funktionentheorie.

Von L. Schlesinger in Klausenburg.

Die Formulierung des Umkehrproblems für die hyperelliptischen Integrale erster Gattung hat von jeher zu den am meisten bewunderten Leistungen Jacobis gehört. Was den Gedankengang anlangt, der Jacobi zu dieser Formulierung geführt hat, so könnte es nach der zeitlichen Aufeinanderfolge der beiden von ihm in den Jahren 1832 und 1834 veröffentlichten Arbeiten über das Umkehrproblem[1]) scheinen, daß er zunächst[2]) nach den Funktionen fragend, deren inverse Funktionen hyperelliptische (Abelsche) Integrale sind, und für welche das Abelsche Theorem in ähnlicher Weise ein algebraisches Additionstheorem liefert, wie das Eulersche Theorem für die elliptischen Funktionen, durch eine glückliche Divination geleitet, jene Formulierung gefunden, und erst dann, den tiefern Grund für die Notwendigkeit dieser Formulierung suchend, die Unmöglichkeit erkannt habe, durch Umkehrung eines einzigen hyperelliptischen Integrals, zu Funktionen zu gelangen, die analoge Eigenschaften besitzen, wie die Umkehrungsfunktionen des trigonometrischen und des elliptischen Integrals erster Gattung.

Indessen zeugen mehrere Umstände[3]) dafür, daß Jacobi gerade von

1) *Considerationes generales de transcendentibus abelianis;* Journ. für Mathem. **9** (1832), p. 394—403; *Werke* II (1882), p. 5—16; *De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis* etc., Journ. für Mathem. **13** (1834), p. 55—78; *Werke* II, p. 23—50.

2) *Werke* II, p. 10.

3) 1. Die Bemerkung, *Fundamenta* art. 19 (1829), *Werke* I, p. 87, welche Jacobi, *Werke* II, p. 25 selbst erwähnt.

2. Die Vorlesung über ellipt. Funktionen von 1829, wo (siehe L. Koenigsberger, *C. G. J. Jacobi*, Leipzig 1904, p. 106) der Satz ausgesprochen ist, „daß eine Funktion nie drei selbständige Perioden haben kann".

3. Dirichlets *Gedächtnisrede auf Jacobi*, des letzteren *Werke* I, p. 15, 16.

4. Jacobis Bemerkung, *Werke* II, p. 45 „quam in commentatione anteriore a longe aliis considerationibus profecti explicuimus".

der letzteren Unmöglichkeit ausgegangen ist und erst — wie er sich ausdrückt[1]) — „in hac quasi desperatione" den Übergang zu den Funktionen von mehreren Variablen vollzogen, daß er also bei der Lösung der Frage nach der Umkehrung der hyperelliptischen Integrale den ersten Schritt völlig selbständig und unabhängig[2]) getan und sich erst nachher des Abelschen Theorems als eines Wegweisers bedient hat.

Die Entwickelung der Funktionentheorie in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts gruppiert sich wesentlich um zwei Pole: Die Theorie der algebraischen und Abelschen Funktionen einerseits, die Theorie der linearen Differentialgleichungen und der Fuchsschen (allgemeiner, automorphen) Funktionen andererseits. Daß die erstere Theorie in den Arbeiten Jacobis wurzelt, ist evident; hier bildet jedoch das Abelsche Theorem die unverrückbare Grundlage, so daß sich Jacobi — wie er es ja selbst oft und freudig anerkannt hat — mit Abel in den Ruhm teilen muß, die Veranlassung zu dieser Reihe von Untersuchungen gegeben zu haben. Dagegen scheint es noch nicht nachdrücklich genug betont worden zu sein, daß auch die Reihe von Untersuchungen, welche sich auf die aus der Theorie der linearen Differentialgleichungen entspringenden Umkehrungsprobleme beziehen, aus der im 13. Bande des Journals für Mathematik enthaltenen Abhandlung Jacobis und zwar aus deren erstem, Jacobi ganz eigentümlichen Teile emporgewachsen ist, obwohl die Kette, die von Jacobis Abhandlung zu den Arbeiten von Fuchs über die Verallgemeinerung des Umkehrungsproblems und von diesen zu den Untersuchungen Poincarés führt, klar zu Tage liegt. — Dies des nähern zu erörtern ist der Zweck der folgenden Zeilen; daß dabei auf einen vielfach mißverstandenen und darum bisher nicht genügend gewürdigten Punkt jener Abhandlung vielleicht ein neues Licht fallen wird, ermutigt mich, mit denselben vor die Öffentlichkeit zu treten.[3])

Es ist von vielen Seiten[4]) beanstandet worden, daß Jacobi es als

1) *Werke* II, p. 45.

2) Vergl. Gundelfinger, Frankfurter Zeitung No. 203, 23. Juli 1904, 2. Seite, unter dem Strich.

3) Die vorliegende Notiz ist ein Auszug aus dem historischen Teile eines im mathematischen Seminar unserer Universität am Vorabend des 10. Dezember 1904 gehaltenen Vortrages, dessen theoretischer Teil „Über isoliertwertige Funktionen" in den Mathem. Annalen veröffentlicht werden soll.

4) Göpel, Journ. für Mathem. 35 (1847), p. 302, vergl. hierzu Jacobis Bemerkungen in der posthumen Note, *Werke* II, p. 516. — Casorati, Comptes rendus de l'acad. d. sc. de Paris 57 (1863) p. 1018; 58 (1864), p. 204; Acta Mathem. 8, (1886), p. 345ff. — Weierstrass, Fußnote, Jacobis *Werke* II, p. 516: „Vom Standpunkte der heutigen Funktionenlehre aus muß anerkannt werden, daß Göpel Recht hatte.." Vergl. auch Weierstrass' *Werke* II, p. 70 (1886). — H. Weber, Anmerkungen zu Ostwald, Klassiker der exakten Wissenschaften Bd. 64 (Jacobi) p. 36ff. Um

*absurd*[1]) bezeichnet hat, wenn eine Funktion einer komplexen Variabeln eine unendlich kleine Periode haben soll. Namentlich hat Casorati sich bemüht zu zeigen, daß die Umkehrungsfunktion eines hyperelliptischen Integrals, wiewohl ihr — wie Jacobi nachgewiesen hat — eine unendlich kleine Periode zukommt, doch einer analytischen Behandlung fähig sei, was freilich kaum jemals bezweifelt worden war; hatte ja doch Riemann — wie schon Herr H. Weber[2]) hervorgehoben hat — in seiner Theorie der Abelschen Funktionen[3]) die Umkehrungsfunktion eines Abelschen Integrals erster Gattung allgemein und in erschöpfender Weise diskutiert. Dirichlet hat in seiner Gedächtnisrede[4]) darauf hingewiesen, daß Jacobi a. a. O. nur *eindeutige* Funktionen im Sinne gehabt haben kann, später hat sich Hermite[5]) dieser Auffassung angeschlossen, und Herr Gundelfinger hat[6]) die wichtige Tatsache festgestellt, daß Jacobi in der 37. Vorlesung des von Rosenhain ausgearbeiteten Kollegs von 1835/36 ausdrücklich sagt, daß er nur von eindeutigen Funktionen handelt. Gleichwohl bleibt die Frage offen, weshalb Jacobi, in der in Rede stehenden Abhandlung selbst, es unterlassen hat, seinen Ausspruch auf eindeutige Funktionen einzuschränken, und ich glaube, daß diese Frage nicht einfach dadurch erledigt werden kann, daß man annimmt, Jacobi hätte es für selbstverständlich gehalten, daß nur solche Funktionen gemeint seien, weil zu jener Zeit andere als eindeutige Funktionen in der Analysis kaum behandelt worden sind.[7]) Ich bin vielmehr der Ansicht, daß Jacobi mit wohlbedachter Absicht an der betreffenden Stelle von einer *Funktion* schlechthin spricht, indem er erst auf Grund der in seiner Arbeit selbst (Art. 1—4) entwickelten Resultate in den Stand gesetzt wird, den Begriff der Funktionen, die er *analytische* nennt in voller Schärfe aufzustellen. — Nachdem er nämlich[8]) gezeigt hat, daß die Funktion $x = \lambda(u)$, die aus der Umkehrung des Integrals

---

Mißverständnissen vorzubeugen bemerken wir, daß die in den Arbeiten von Riemann (*Werke*, 1892, p. 294), Weierstrass (*Werke* II, p. 55), Kronecker (Berliner Sitzungsberichte 1884, p. 1071) behandelten Fragen hier nicht in Betracht kommen.

1) *Werke* II, p. 27, 32.

2) A. a. O., p. 37.

3) 1857; *Werke* (1892), p. 120—122.

4) Jacobis *Werke* I, S. 15, 16.

5) Comptes rendus de l'acad. d. sc. de Paris 58 (1864), p. 206 Fußnote: „que dans ma conviction, Jacobi n'a jamais en vue d'autres fonctions".

6) A. a. O.

7) Dieser Annahme stände auch der Umstand entgegen, daß Jacobi, Journal für Mathem. 9 (= *Werke* II, p. 8), als wesentliche Eigenschaft des sinus hervorhebt, daß er: „pro quolibet valore argumenti $u$ valorem unicum ac determinatum habet!".

8) *Werke* II, p. 43.

$$u = \int_0^x \frac{(\alpha + \beta x)\,dx}{\sqrt{X}}, \qquad X = x(1-x)(1-\varkappa^2 x)(1-\lambda^2 x)(1-\mu^2 x),$$

entspringt, unendlich kleine Indices (Perioden) besitzt, fährt er fort: „Unde functione $\lambda(u)$ immutata manente, ipsum $u$ induere posset valores omnes reales aut imaginarios, sive e numero valorum, quos ipsum $u$ induere potest functione $\lambda(u)$ immutata manente, semper forent, qui a data qualibet quantitate reali aut imaginaria minus different quam ulla quantitas data quantumvis parva". Und[1]) weiter heißt es dann: „Patet ex antecedentibus, quoties $X$ altioris quam quarti gradus sit, ipsum $x$ non spectari posse ut functionem analyticam ipsius $u$". JACOBI nennt also eine Funktion einer Variabeln eine *analytische*, wenn sie die für die Funktion $\lambda(u)$ hervorgehobene Eigenschaft nicht besitzt, d. h. wenn die Gesamtheit der Werte von $u$, für welche die Funktion einen und denselben Wert anzunehmen vermag, keine in der ganzen Ebene *überalldichte*[2]) Menge bildet. Die Funktionen, die JACOBI in seiner Abhandlung vor Augen hatte, sind für alle komplexen Werte der unabhängigen Variabeln definiert; daraus erklärt sich, daß JACOBI nur von dem Falle handelt, wo die $u$-Werte in der *ganzen Ebene* überalldicht liegen; will man auch die Fälle mit umfassen, wo die Funktion nur in einem beschränkten Gebiete der $u$-Ebene existiert, so wird man die Definition der *analytischen Funktion* so fassen müssen, daß die $u$-Werte, für welche die Funktion denselben Wert anzunehmen vermag, in keinem zweifach ausgedehnten Gebiete der $u$-Ebene überalldicht liegen sollen. —

Das Ergebnis der an dem Ausspruche JACOBIS geübten Kritik läßt sich nunmehr dahin resumieren, daß festgestellt wurde, daß sich JACOBIS Begriff der analytischen Funktion mit dem, was man nach LAGRANGE-

1) Ibid. p. 45.

2) Nach der von Herrn G. CANTOR, Mathem. Ann. 15 (1879), p. 2 eingeführten Terminologie. Es dürfte wohl in einer historischen Darstellung gestattet sein, Begriffe, die ein älterer Autor bereits in voller Schärfe aufgestellt hat, durch erst später eingeführte Termini zu bezeichnen; es wird dadurch nicht nur die Kürze der Darstellung gefördert, sondern auch der Sinn dessen, was der ältere Autor sagt, dem an die moderne Terminologie gewöhnten Leser deutlicher gemacht. — Herr P. STÄCKEL, der so gütig war, das Manuskript der vorliegenden Notiz durchzusehen, macht in einem Schreiben (vom 7. I. 05) die folgende Bemerkung: „Ferner möchte vielleicht geltend zu machen sein, daß das, was wir jetzt vermöge der modernen Terminologie kurz und präzise auszudrücken vermögen, für JACOBI nur durch lange Erörterungen zu fassen gewesen wäre, und daß bei ihm wohl über diesen ganzen Dingen das lag, was GOETHE einmal als die „Dumpfheit" des Genies bezeichnet, das die Dinge schaut, ohne dem Geschauten schon den klaren Ausdruck geben zu können, der durch die spätere Arbeit der Epigonen allmählich gewonnen wird."

Weierstrass mit demselben Namen bezeichnet, nicht deckt[1]), und an diese Feststellung reiht sich die andere, daß die eindeutigen Funktionen analytische im Sinne Jacobis sind; die Bedeutung des von Jacobi eingeführten Begriffes ist aber durch diese beiden Feststellungen keineswegs erschöpft.

Versuchen wir es, uns den Gedankengang Jacobis zu vergegenwärtigen! — Die Umkehrungsfunktionen des trigonometrischen und des elliptischen Integrals erster Gattung sind eindeutig; was ist der wesentliche Grund für diese Erscheinung? Jacobi findet ihn darin, daß die Punkte

$$u + mi$$

einerseits, und die Punkte

$$u + mi + m'i',$$

wenn $\frac{i'}{i}$ nicht real ist, andererseits, nicht in der ganzen Ebene überalldicht liegen, d. h. — um einen von Herrn Poincaré (1882) eingeführten Terminus zu gebrauchen — darin, daß die einfachperiodische und die doppeltperiodische Gruppe in der $u$-Ebene (*eigentlich*) *diskontinuierlich* sind Dagegen ist die drei- und mehrfachperiodische Gruppe

$$u + mi + m'i' + m''i'' + \ldots\ldots$$

in der $u$-Ebene nicht (eigentlich) diskontinuierlich, sondern überalldicht,

1) In der nicht von Jacobi selbst veröffentlichten Notiz (*Werke* II, p. 516ff.), spricht sich Jacobi über die Funktionen, die nicht in seinem Sinne analytische sind so aus, daß sie keine Analogie mit der elliptischen Funktion ein am darbieten „indem eine solche Funktion $\lambda(u)$ für jedes $u$ nicht bloß mehrere Werte erhält" (er hatte also auch nichteindeutige Funktionen „en vue") „sondern gänzlich unbestimmt wird, wofern nämlich zur Definition des Integrals" $\left(\text{sc. l. } u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{X}}\right)$ „bloß seine Grenzen angewandt würden, der Weg aber, welchen die Variable durch reelle oder imaginäre Werte hindurch von der einen Grenze zur anderen einschlägt, willkürlich bleibt. Denn man kann einen Wert gänzlich unbestimmt nennen, wenn er, wie es in diesem Falle geschieht, jedem reellen oder imaginären Werte so nahe kommen kann, daß der Unterschied weniger als jede gegebene noch so kleine Größe beträgt." Ob man die Bezeichnungen *„gänzlich unbestimmt"* für eine so präzisierte Größe, *„absurd"* für eine nicht *„analytische Funktion"*, den letzteren Terminus für die von Jacobi damit bezeichnete Funktionsklasse angemessen findet oder nicht, ist Geschmackssache, jedenfalls hat Jacobi das, was er mit diesen Worten bezeichnen will, völlig scharf und einwandfrei erklärt; die gegen ihn gerichteten Einwürfe können also nur ein Streit um Worte genannt werden. Man sieht ferner aus der angeführten Stelle, daß Jacobi (wenigstens 1847) sich über die Bedeutung der in seinem Sinne nicht analytischen Funktion auch „vom Standpunkte der heutigen Funktionenlehre aus" völlig klar war, daß er namentlich die Entstehung der Periodizitätsmoduln eines hyperelliptischen Integrals durch Abänderung des Integrationsweges — vor Puiseux (1851) — gekannt hat (vergl. für das letztere auch Gundelfinger a. a. O.; Königsberger, a. a. O. S. 189).

die Umkehrungsfunktion eines hyperelliptischen Integrals kann folglich nicht *analytisch* sein. — Hier sehen wir den bedeutsamen Schritt, durch welchen JACOBI einen Grad von analytischer Einsicht bekundet, wie wir ihn bei keinem seiner Zeitgenossen wiederfinden: nicht die Eindeutigkeit selbst ist ihm das Wesentliche, sondern die Tatsache, daß die Funktion eine analytische, d. h. daß die Gruppe der Werte der unabhängigen Variabeln, die zu einem und demselben Funktionswerte Veranlassung geben, eine diskontinuierliche ist.[1]) JACOBI abstrahiert also von dem Begriffe der Eindeutigkeit einer Funktion diejenige Eigenschaft, die wir als die Diskontinuität ihrer Gruppe bezeichnen können, während er die Eigenschaft, daß zu jedem Werte der unabhängigen Variabeln nur ein einziger Funktionswert gehört als sekundär bei Seite läßt. Daß er damit in der Tat das Wesentliche trifft, zeigt der Satz von Herrn POINCARÉ[2]), wonach man zu jeder diskontinuierlichen Gruppe eine eindeutige Funktion konstruieren kann, die diese Gruppe zuläßt.

Sehen wir weiter wie JACOBI von der in der $u$-Ebene überalldichten vierfachperiodischen Gruppe zu einer diskontinuierlichen Gruppe übergeht[3])! Er betrachtet zwei ultraelliptische Integrale $u$, $u'$ und zeigt, daß die Gruppe

$$u + m' i_2 + m''' i_4 + (m i_1 + m'' i_3)\sqrt{-1},$$
$$u' + m' i_2' + m''' i_4' + (m i_1' + m'' i_3')\sqrt{-1}$$

im Gebiete der beiden Variabeln $u$, $u'$ diskontinuierlich ist[4]); daß er auch hier in dieser Tatsache, nicht in der Eindeutigkeit der symmetrischen Funktionen von

$$x = \lambda(u, u'),\ y = \lambda'(u, u')$$

das Wesentliche erkennt[5]) zeigt die tiefsinnige Bemerkung[6]) die mit den Worten schließt: „Quae est istius periodicitatis proprietas characteristica, sine qua non locum habere possit". RIEMANN hat in der Tat einfach die beiden Integrale (wir bleiben bei dem speziellen Falle $p = 2$) $u$, $u'$ mit *derselben* oberen Grenze betrachtet und gezeigt, daß diese Grenze durch die Werte von $u$, $u'$ völlig bestimmt sei; dies ist das im Sinne JACOBIS

1) Für JACOBI wäre also z. B. auch die Umkehrungsfunktion eines elliptischen Integrals zweiter Gattung kein „absurdum" gewesen, obwohl dieselbe nicht eindeutig ist.

2) Comptes rendus de l'acad. d. sc. de Paris **92** (1892), p. 1335.

3) Vergl. F. KLEIN, Mathem. Ann. **45** (1894), p. 148.

4) *Werke* II, p. 49, 50.

5) In der Abh. Journ. für Mathem. **13**, findet sich die Eindeutigkeit von $x + y$, $xy$ gar nicht erwähnt, erst in der Fußnote zu der *Note sur les fonctions abéliennes*, ibid. **30** (1845) (*Werke* II, p. 86), werden $x$, $y$ als Wurzeln einer quadratischen Gleichung mit eindeutigen Koeffizienten charakterisiert.

6) Ibid. p. 50.

wesentliche Resultat; das Abelsche Theorem tritt dann gleichsam als sekundäres Element hinzu, indem es zu dem Aufbau der eindeutigen Funktionssysteme von $u$, $u'$ führt, die jene diskontinuierliche Gruppe zulassen. Aus der Bemerkung[1]) wo es in Bezug auf die vierfache Periodizität jenes Funktionssystems heißt: „Genus periodicitatis, quod theoremate antecedente explicitum est, nihil habet, quod legibus functionum analyticarum obversetur", geht ferner deutlich hervor, daß Jacobi den Begriff der analytischen Funktion auch für Funktionen von mehr als einer Veränderlichen gebildet hatte, und eben dieser Begriff ist es, an den Fuchs ein halbes Jahrhundert nach dem Erscheinen von Jacobis Abhandlung, seine auf die Verallgemeinerung des Umkehrungsproblems abzielenden Untersuchungen[2]) anknüpft.

In der Tat geht Fuchs[3]) von der Aufgabe aus „die Beschaffenheit der Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung $m$-ter Ordnung zu untersuchen, wenn durch die $m$ Gleichungen

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{\zeta_i}^{z_i} f_a(z)\, dz = u_a, \qquad (a = 1, 2, \ldots, m)$$

wo $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ Konstanten, $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung bedentet, $z_1, \ldots, z_m$ als analytische (sic!) Funktionen von $u_1, \ldots, u_m$ definiert werden sollen". — Für $m = 2$ haben diese Funktionen

$$z_1 = F_1(u_1, u_2), \quad z_2 = F_2(u_1, u_2)$$

die Eigenschaft[4])

$$(D.)\begin{cases} F_1(\alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \beta_1 c,\ \alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \beta_2 c) = F_1(u_1, u_2), \\ F_2(\alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \beta_1 c,\ \alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \beta_2 c) = F_2(u_1, u_2), \end{cases}$$

wo $(\alpha_{ik})$ eine Substitution der Gruppe der Differentialgleichung zweiter Ordnung, $\beta_1, \beta_2$ gewisse Konstanten bedeuten. Das von Fuchs formulierte Problem kommt also darauf hinaus, zu untersuchen, wie die Differentialgleichung beschaffen sein muß, damit die durch die Gleichungen $(D.)$ dargestellte Gruppe eine im Gebiete der $u_1, u_2$ diskontinuierliche sei, und es ergiebt sich das Resultat, daß dazu die Diskontinuität der projektiven Gruppe,

1) Ibid. p. 49.

2) Göttinger Nachrichten 1880, p. 170, p. 445; Journ. für Mathem. 89 (1880), p. 150; Abhandl. der Gesellsch. der Wissensch. in Göttingen 27 (1881). Vergl. auch die Arbeit, Sitzungsberichte der Akademie zu Berlin 1885, p. 5, wo Fuchs den Begriff „analytische Funktion" ebenfalls in dem Jacobischen Sinne anwendet.

3) Journal für Mathem. 89 (1880), p. 151.

4) Ibid. p. 152.

$$\frac{\alpha_{22}\zeta + \alpha_{21}}{\alpha_{12}\zeta + \alpha_{11}},$$

die zu der Differentialgleichung zweiter Ordnung selbst gehört, in einem zweifach ausgedehnten Gebiete von $\zeta$ erforderlich ist, indem für den Fall, wo die Funktionen $F_1$, $F_2$ selbst ein **eindeutiges** System bilden sollen, die Umkehrungsfunktion des Integralquotienten $\zeta$ der Differentialgleichung zweiter Ordnung ein- oder zweiwertig sein muß.[1]) Die Frage, wie die Differentialgleichung zweiter Ordnung beschaffen sein muß, damit ihre projektive Gruppe diskontinuierlich sei, war damit gleichsam als Voruntersuchung für die von FUCHS gestellte Aufgabe formuliert, und es ist bekanntlich Herrn POINCARÉ gelungen diese Frage allgemein und in prinzipiell erschöpfender Weise zu beantworten.[2])

Wir schließen diese Betrachtungen mit dem Hinweise auf die Ergänzung, welche die erste, auf den hier behandelten Gegenstand bezügliche Bemerkung JACOBIs, durch die, — wie wir gezeigt zu haben glauben — letzten Endes in seiner Auffassung der analytischen Funktion wurzelnden, Untersuchungen über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit diskontinuierlicher Gruppe, gefunden hat. Diese (bereits erwähnte) Bemerkung lautet:[3]) „E quo [sc. l. principio duplicis periodi], cum universam, quae fingi potest, amplectatur Periodicitatem Analyticam, elucet, functiones ellipticas non aliis adnumerari debere transcendentibus, quae quibusdam gaudent elegantiis, fortasse pluribus illas aut maioribus, sed speciem quandam iis inesse profecti et absoluti".

Die Vermehrung um eine Periode wird geometrisch durch eine Parallelverschiebung der komplexen Variabeln dargestellt, der erste Teil von JACOBIs Bemerkung besagt also, daß die doppeltperiodische Gruppe die allgemeinste diskontinuierliche Gruppe von Parallelverschiebungen der Ebene ist, und man weiß, daß sich überhaupt alle diskontinuierlichen Gruppen von (aus Parallelverschiebungen und Drehungen zusammengesetzten) Verschiebungen der Ebene in sich selbst im wesentlichen auf doppeltperiodische Gruppen zurückführen lassen. *Das gilt aber nur für die Ebene der EUKLIDschen Geometrie.* — Zur Zeit als JACOBI diese Bemerkung schrieb, hatten BOLYAI und LOBATSCHEFSKIJ bereits jene wunderbare Verallgemeinerung der EUKLIDschen Geometrie erdacht, in welcher die Verschiebungen der Ebene eine unvergleichlich viel größere Mannigfaltigkeit darbieten als es für die EUKLIDsche Ebene der Fall ist. Da sich die Verschiebungen einer Ebene

1) Abhandlungen der Gesellsch. d. Wissensch. in Göttingen 27, art. 8, p. 21.

2) Acta Mathem. 1 (1882), 3 (1883), 4 (1884).

3) *Fundamenta* (1829) art. 19, p. 35 (*Werke* I, p. 87); vergl. auch *Werke* II, p. 32 oben.

in dieser Auffassung analytisch durch projektive Substitutionen einer komplexen Variabeln darstellen lassen, ist mit jeder diskontinuierlichen Gruppe solcher Verschiebungen eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit diskontinuierlicher Gruppe gegeben.[1]) Sehen wir mit Bolyai das System der Geometrie als mit einer willkürlichen realen Konstanten (dem Krümmungsmaße) behaftet an und denken uns in der so entstehenden *absoluten* Ebene die sämtlichen diskontinuierlichen Verschiebungsgruppen aufgestellt, so erhalten wir — im Gebiete *einer* Variabeln — eine *periodicitas analytica*, welche über das von Jacobi formulierte Prinzip der doppelten Periodizität weit hinausreicht, und die für jene Gruppen unveränderlichen eindeutigen Funktionen stellen Transcendenten dar, denen die elliptischen Funktionen als besonderer Fall angehören.

1) Poincaré, Acta Mathem. 1 (1882).

# Über den Nutzen der Begründung eines Mathematikerarchivs.

Von G. Eneström in Stockholm.

Vor zwei Jahren habe ich in meinem Artikel über die Aufgaben einer mathematischen Zentralbibliothek[1]) darauf hingewiesen, daß es zweckmäßig wäre, mit einer solchen Bibliothek eine Zentralstelle für mathematisch-literarische Unternehmungen zu verbinden. Ich hoffte damals, daß der Plan der Begründung dieser Bibliothek recht bald zum Ziele geführt werden würde, nnd nachdem dies geschehen war, beabsichtigte ich, meine Ansichten über die Aufgaben einer Zentralstelle für mathematisch-literarische Unternehmungen ausführlich auseinanderzusetzen. Leider haben wir jetzt wenig Anlaß zu hoffen, daß die Zentralbibliothek in absehbarer Zeit zustande kommen wird, und ob eine Zentralstelle für mathematisch-literarische Unternehmungen bald gegründet werden kann, dürfte ebenfalls unsicher sein.

Unter solchen Umständen scheint es mir angebracht, auf eine Aufgabe der fraglichen Zentralstelle aufmerksam zu machen, welche Aufgabe bis zu einem gewissen Grade fast ohne Geldaufwand oder Beschwerde erledigt werden könnte, und die auf der anderen Seite für die Gegenwart und noch mehr für die Zukunft von großem Interesse sein würde. Diese Aufgabe bezieht sich auf das Sammeln und Aufbewahren des Nachlasses von verstorbenen Mathematikern.

Im allgemeinen darf man wohl annehmen, daß kein Mathematiker, der sich eingehender mit wissenschaftlichen Untersuchungen beschäftigt, bei seinen Lebzeiten alle Resultate derselben publizieren kann, es sei denn, daß er erst in sehr hohem Alter stirbt; darum läßt gewöhnlich ein Mathematiker bei seinem Tode einige noch nicht veröffentlichte Arbeiten nach. Teilweise können ja diese druckreif oder beinahe druckreif sein, und solche Arbeiten, sofern sie von allgemeinerem Interesse sind, werden seine Freunde oder Schüler vielleicht bald zum Abdruck bringen. Aber in vielen Fällen kommt es vor, daß der Nachlaß nur mehr oder weniger vollständiges Material zur Erledigung gewisser Fragen enthält, und dann

1) G. Eneström, *Über die Aufgaben einer mathematischen Zentralbibliothek;* Biblioth. Mathem. $4_3$, 1903, 82—85.

muß man natürlich von einer unmittelbaren Veröffentlichung absehen. Handelt es sich um einen Mathematiker ersten Ranges, so wird wohl ein solches Material aufbewahrt und später bei der Herausgabe seiner gesammelten Werke benutzt. Sonst stellt sich die Sache gewöhnlich weniger günstig. Zuweilen geht ein solcher Nachlaß sogleich verloren, oft wird derselbe bis auf weiteres von den Angehörigen des Verstorbenen aufbewahrt, weniger oft wird der Nachlaß an eine Bibliothek, die gewiß nicht immer eine große öffentliche Bibliothek ist[1]), geschenkt. Man kann darum behaupten, daß in sehr vielen Fällen der wissenschaftliche Nachlaß der bisher verstorbenen Mathematiker entweder verloren gegangen oder wenigstens den Fachgenossen schwer zugänglich ist.

Nun ist es aber klar, daß ein solcher Nachlaß, wenn derselbe einem Spezialisten zur Verfügung stände, zu wertvollen Arbeiten anregen könnte, und es ist darum unangebracht, daß der Zufall entscheiden soll, ob der Nachlaß auf die angegebene Weise zu Nutzen kommen wird oder nicht. Ebenso klar ist es, daß sich im Nachlaß Manuskripte finden können, die vom historischen Gesichtspunkte aus von Interesse sein werden.

Was ich bisher bemerkt habe, bezieht sich in erster Linie auf die Mathematiker, die sich mit der Weiterentwickelung ihrer Wissenschaft beschäftigen. Ziehe ich speziell die mathematisch-historischen Forscher in Betracht, so wage ich sogar zu behaupten, daß es fast ausnahmslos zu bedauern ist, wenn ihr wissenschaftlicher Nachlaß verloren geht oder wenigstens den Fachgenossen unzugänglich wird. Bei fast jeder eingehenden historischen Untersuchung findet nämlich ein solcher Forscher etwas, das zwar von Interesse ist aber für die in Angriff genommene Arbeit nicht benutzt werden kann, und er notiert es oft im Vorübergehen, um es bei Gelegenheit anzuwenden. Auf diese Weise bekommt er allmählich eine Sammlung von Exzerpten, von denen er für die Zukunft Nutzen haben wird, ohne dieselbe jemals vollständig ausnützen zu können, und wenn er stirbt, so geht unter den jetzigen Verhältnissen leider das noch nicht benutzte mathematisch-historische Material in der Regel verloren. Noch mehr zu bedauern ist der Verlust, wenn es sich um Sammlungen handelt, die nicht mehr oder weniger zufällig zusammengebracht worden sind, sondern direkt sehr umfassende Nachforschungen erfordert haben. Beispielsweise ist es mir bekannt, daß die Herren H Brocard und Felix Müller seit Jahrzehnten Material zu einem mathematischen Wörterbuche gesammelt haben, aber, so viel ich weiß, sind bisher keine Maßregeln ergriffen worden, um zu bewirken, daß diese

1) Aus einer Bemerkung von Herrn G. Loria in der Biblioth. Mathem. $2_3$, 1901, S. 414 scheint hervorzugehen, daß Angelo Genocchis Nachlaß in einer „Biblioteca comunale Passerini-Landi“ in Piacenza aufbewahrt ist.

Sammlungen, sofern die Forscher dieselben nicht selbst bearbeiten können, aufbewahrt und den Fachgenossen leicht zugänglich werden.

Im vorhergehenden habe ich das Wort „Nachlaß“ im beschränkten Sinne genommen, und darunter nur das verstanden, was der verstorbene Mathematiker selbst verfaßt oder notiert hat. Es gibt aber noch eine Art von wissenschaftlichem Nachlaß, nämlich die Briefe, die ein Gelehrter von seinen Fachgenossen bekommen hat, und dieser Nachlaß ist zuweilen viel wertvoller als der bisher in Betracht gezogene, denn nicht selten finden sich darin sehr wichtige Beiträge zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. In betreff solcher Briefe gilt also in noch höherem Grade, daß es bedauerlich ist, wenn es dem Zufall überlassen wird zu entscheiden, ob sie aufbewahrt werden oder nicht, und noch dazu ist es zu fürchten, daß dieser Nachlaß leichter als der andere verloren geht; in der Tat gibt es viele Gelehrte, die ihren wissenschaftlichen Briefwechsel nicht von dem übrigen trennen, und nach ihrem Tode werden darum leicht alle ihre Briefe zerstört.

Der Übelstand, worauf ich jetzt aufmerksam gemacht habe, könnte zum großen Teil beseitigt werden, wenn es eine mathematische Zentralbibliothek oder wenigstens eine Zentralstelle für mathematisch-literarische Unternehmungen gäbe. Wie ich schon oben angedeutet habe, sollte es nämlich meines Erachtens eine nicht unwichtige Aufgabe dieser Zentralstelle sein, geeignete Maßregeln zu ergreifen, um nach dem Tode eines Mathematikers seinen Nachlaß vor der Zerstörung zu retten. Aber ganz unabhängig von der Gründung einer solchen Zentralstelle wäre es möglich, diese Aufgabe zum Teil zu erledigen, wenn man jährlich nur einige hundert Mark zur Verfügung hätte. Um die Manuskripte und Briefe zu sammeln, brauchte man eigentlich kein Geld, denn im allgemeinen könnte man wohl darauf rechnen, dieselben als Geschenk zu bekommen. Ein Zimmer für die Aufbewahrung des Archivs würde nicht viel kosten, und wenigstens anfangs wäre es wohl nicht unmöglich, ein solches unentgeltlich zu haben; endlich die Arbeit, die nötig ist, um das Erhaltene zu ordnen und zu verzeichnen, dürfte während der ersten Zeit gewiß nicht besonders groß sein. Wann und auf welche Weise die Sammlungen den Fachgenossen zugänglich werden würden, sollte bei der Gründung des Archivs als eine noch offene Frage betrachtet werden, deren Erledigung von der Geldfrage abhängig gemacht werden sollte.

Die Schwierigkeit ist also eigentlich nur, zu bestimmen, wie die Initiative zur Gründung des vorgeschlagenen Mathematikerarchivs genommen werden soll. Am besten wäre es gewiß, eine durchaus internationale Anstalt dieser Art zu begründen, aber dies setzt wohl eine noch nicht existierende internationale Organisation der Mathematiker voraus. Zur Zeit dürfte es

darum nötig sein, sich wesentlich auf ein einzelnes Land zu beschränken, oder eventuell besondere Mathematikerarchive für die verschiedenen Länder einzurichten. Für Deutschland, das glücklicherweise eine besonders lebenskräftige Mathematikervereinigung besitzt, wäre es gewiß sehr leicht die Frage zu erledigen, und darum scheint es mir angebracht, daß der Vorstand der Deutschen Mathematikervereinigung dieselbe auf die Tagesordnung setzt. Zeigt es sich dann, daß die Vereinigung geneigt ist, ein Mathematikerarchiv zu begründen, so wäre meiner Ansicht nach folgendes Verfahren zu empfehlen. Die Vereinigung versendet an jedes Mitglied ein Zirkularschreiben, worin sie mitteilt, daß sie bereit ist, nach seinem Tode seinen wissenschaftlichen Nachlaß zu empfangen, um denselben aufzubewahren und auf geeignete Weise den Fachgenossen zugänglich zu machen. Falls das Mitglied geneigt ist, seine wissenschaftlichen Manuskripte und Briefe der Vereinigung zu überlassen, ergreift er die Maßregeln, die für diesen Zweck angebracht sind. Er kann dabei natürlich gewisse Bedingungen aufstellen, z. B. daß sein Nachlaß erst nach dem Ablauf einer bestimmten Zeit zugänglich sein wird oder veröffentlicht werden darf. Er kann auch nur ein halbes Versprechen geben, so daß er sich dadurch nicht endgültig verpflichtet, falls er künftighin eine bessere Anwendung für seine Manuskripte finden wird.

Sobald das Mathematikerarchiv Manuskripte bekommt, sollte dies im Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung angezeigt und die Anzeige wenn irgend möglich durch eine kurze Inhaltsangabe ergänzt werden. Wenn die finanziellen Verhältnisse so geordnet worden sind, daß eine Katalogisierung des Manuskriptbestandes zustande kommen kann, wird statt der kurzen Inhaltsangabe ein genaues Verzeichnis der neuen Geschenke gegeben werden. Selbstverständlich ist es erwünscht, daß seiner Zeit ein wirklicher Katalog des Archivs bearbeitet und herausgegeben wird; der Wert dieses Katalogs würde wesentlich erhöht werden, wenn darin auch die anderweitig aufbewahrten Manuskripte und Briefe von Mathematikern verzeichnet werden würden.

Zum Schluß erlaube ich mir hervorzuheben, daß die sofortige Begründung eines Mathematikerarchivs nicht nur durch die Leichtigkeit dies zu erwirken, motiviert ist, sondern auch dadurch, daß ein Aufschub in diesem Falle schädlicher wird, als wenn es sich z. B. um eine mathematische Zentralbibliothek handelt. Gedruckte Schriften können zuweilen schwer sein zu bekommen, wenn man sie nicht recht bald nach ihrem Erscheinen zu erwerben sucht, aber unmöglich ist es im allgemeinen nicht, sie auch später zu haben; Manuskripte dagegen können leicht verloren gehen, und dann ist der Verlust definitiv.

# Kleine Mitteilungen.

## Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik".

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen".
BM = Bibliotheca Mathematica.

**1 : 12**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 265. — **1 : 15**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 323. — **1 : 22, 29, 34**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 265—266. — **1 : 36, 64**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902 S. 137. — **1 : 103**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1 : 135**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266 $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137. — **1 : 144, 155, 169, 171**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137—138.

---

**1** : 188—201. Das ganze Kapitel über Hippokrates müßte bei einer dritten Auflage vollständig umgearbeitet oder vielmehr durch ein ganz neues ersetzt werden. Obwohl sich das Erforderliche zum größten Teile bereits aus meiner Abhandlung: *Der Bericht des Simplicius* etc. (BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 7—62; die Abhandlung wird in der Folge kurz mit *„Bericht"* zitiert) ergibt, so ist es doch höchst zweckmäßig, wenn alle Bemerkungen, die zur Vervollkommnung des Cantorschen Werkes dienen, an der von Herrn Eneström eröffneten Sammelstelle zusammengetragen werden.

Die eigentliche Quelle der vielen Unrichtigkeiten in dem genannten Kapitel besteht in dem Umstande, daß Bretschneider, auf den sich die ganze Darstellung stützt, nicht in der Lage gewesen war, aus dem Referate des Simplicius die eigenen Zutaten des Referenten auszuscheiden. Ich hebe das Wichtigste hervor. Auf die „mauvaise plaisanterie" in **1** : 189 hat schon Tannery hingewiesen (siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266). — Zu der Quadratur des Antiphon (**1** : 189—190) ist zu bemerken, daß jetzt nachgewiesen ist, daß Simplicius und Themistius aus derselben Quelle (höchst wahrscheinlich Eudemus) geschöpft haben, und daß es keine Berechtigung hat, zu sagen, Antiphon sei das eine Mal von einem Quadrate, das andere Mal von einem Dreiecke ausgegangen (siehe *„Bericht"*, Anm. 23 und 25). — Daß die Fig. 30 (**1** : 192) nicht bei Hippokrates vorkommt, sondern dem Alexander von Aphrodisias entlehnt ist, hat schon Tannery (siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266) bemerkt, und ebenso, daß man Simplicius nicht mehr nach Spengel sondern nach Diels zu zitieren habe (siehe auch *„Bericht"* S. 10). Die Bemerkung Tannerys behält ihre Berechtigung, obwohl die in jener Fig. 30 enthaltene Quadratur im wesentlichen mit derjenigen des ersten Möndchens des Hippokrates zusammenfällt (siehe *„Bericht"*, Fig. 4, S. 19). — Unbedingt zu beseitigen ist sodann Fig. 31 (**1** : 193) und die ganze Untersuchung über die Möndchen, die über den Seiten des Sechsecks

stehen. Auch diese Untersuchung ist der Darstellung des ALEXANDER entnommen und rührt nicht von HIPPOKRATES her. Dafür haben wir das ausdrückliche Zeugnis des SIMPLICIUS: „. . auch unternahm er (HIPPOKRATES) es keineswegs, den Kreis durch die Möndchen über der Seite des Sechsecks zu quadrieren, was ebenfalls ALEXANDER behauptet". Freilich hat BRETSCHNEIDER dieses Zeugnis bei der Übersetzung gerade in das Gegenteil verwandelt (siehe „*Bericht*", S. 24 und Anm. 98), und so ist diese Quadratur, die eines HIPPOKRATES ganz unwürdig ist, auch in die CANTORschen Vorlesungen eingedrungen. Es darf aber überdies hier noch gesagt werden, daß ein Urteil des SIMPLICIUS heute ein ganz anderes Gewicht besitzt, als noch vor wenigen Jahren, wo man von den geometrischen Kenntnissen dieses ausgezeichneten Gelehrten total unrichtige Vorstellungen hatte. — An Stelle dieser zu beseitigenden Quadraturen sollte nun aber unbedingt in einer neuen Auflage eine etwas eingehendere Darstellung der vier authentischen Konstruktionen und Quadraturen des HIPPOKRATES (Möndchen, dessen äußerer Bogen gleich einem Halbkreise, größer als ein Halbkreis, kleiner als ein Halbkreis ist, und Möndchen zusammen mit einem Kreise) gegeben werden, denn Untersuchungen, die mit solchem Scharfsinn und noch dazu 150 Jahre vor EUKLID angestellt worden sind, verdienen einen Ehrenplatz in einer Geschichte der Mathematik. Ist doch die Abhandlung des HIPPOKRATES zugleich die älteste uns überlieferte mathematische Veröffentlichung, die griechischem Boden entstammt! Mit Benutzung des schon Gesagten würden dann auch von selbst allerlei Ungenauigkeiten wegfallen, die sich **1**: 193 und 194 vorfinden. — Wegfallen muß weiter Fig. 32 (**1**: 195) und das, was dort über „das erste bekannte Vorkommen eines Vielecks mit einspringendem Winkel" gesagt ist (siehe „*Bericht*", Anm. 93). Mit demselben Rechte könnte man die viel ältere Figur, die durch ein rechtwinkliches Dreieck und die Quadrate über den Seiten gebildet wird, ein Neuneck mit 3 einspringenden rechten Winkeln nennen. — Am Schlusse derselben Seite 195 ist die verkehrte Definition der ähnlichen „Kreissegmente" aufzugeben (siehe „*Bericht*", S. 19 und Anm. 67). Was sodann noch die Proportionalität der Kreisflächen und der Quadrate ihrer Durchmesser anbetrifft, so sollte immerhin bemerkt werden, daß EUDEMUS diesen Satz ohne irgend welche Einschränkung dem HIPPOKRATES zuspricht. Denn wenn EUDEMUS in seiner *Geschichte der Geometrie* sagt: „Das bewies er aber dadurch, daß er zeigte, daß die Durchmesser in der Potenz dasselbe Verhältnis haben wie die Kreise", so muß er doch wohl den HIPPOKRATES für den Entdecker des Satzes gehalten haben. — Was in dem Absatze: „Kennzeichnend für die Schreibweise . . . . bekannt aussprechen" (**1**: 196—197) über Weitläufigkeit und dergl. gesagt ist, fällt ganz dahin, denn damit wird gar nicht HIPPOKRATES getroffen, sondern vielmehr ALEXANDER und SIMPLICIUS (siehe z. B. „*Bericht*", Anm. 41) und gehört also gar nicht in dieses Kapitel. Im folgenden Absatz (**1**: 197) wird dem HIPPOKRATES bezeugt, er habe die Gleichheit der Sechsecksseite und des Kreisradius gekannt. Einem so hervorragenden Geometer gegenüber ist das aber nicht nur überflüssig, sondern es erweckt auch ganz verkehrte Vorstellungen von dem damaligen Stande der geometrischen Wissenschaft. Dagegen ist der folgende Satz, daß nämlich das Quadrat einer Dreiecksseite größer (kleiner) als die Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten ist, falls letztere einen stumpfen (spitzen) Winkel miteinander bilden, mit Recht hervorgehoben, denn diesen Satz benutzt HIPPOKRATES als ein sehr geeignetes Hilfsmittel mit Vorliebe bei seinen Beweisen (siehe „*Bericht*", Anm. 95). — Zu

deu Bemerkungen, die sich anf die Trapeze des Hippokrates beziehen (**1**:197) ist zunächst zu sagen, daß wir ja doch die Ahhandlung des Hippokrates gar nicht selbst kennen, sondern nur das in dem Simpliciusschen Berichte enthaltene Referat des Eudemus. Ganz unzutreffend aher ist namentlich alles, was über den angeblichen Beweis, daß das zn dem zweiten Möndchen gehörige Trapez ein Sehnenviereck sei (**1**:197—198), gesagt ist. Daß dieser Beweis gar nicht von Hippokrates sondern von Simplicius herrührt, dürfte jetzt nachgerade endgültig entschieden sein (siehe „*Bericht*", Anm. 75). Damit dürfte aher auch einmal endlich das Märchen aus der Literatur verschwinden, Hippokrates habe die Beziehung zwischen Peripheriewinkel und zugehörigem Centriwinkel noch nicht gekannt (siehe auch „*Bericht*", Anm. 67). Dieses Mißverständnis, dessen Ursprung wieder auf Bretschneider zurückgeht, ist auch sonst überall zu finden z. B. in den *Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik* usw. (Leipzig 1892) von Felix Müller, wo es auf S. 9 ausdrücklich heißt: „Der Satz von Peripherie- und Centriwinkel ist ihm noch unbekannt". Der Irrtum ist aher für die Beurteilung des ganzen Znstandes der Geometrie znr Zeit des Hippokrates verhängnisvoll. Denn wie vieles andere müßte dann damals noch gefehlt hahen, wenn jener Satz dem Hippokrates unbekannt gewesen wäre! Der Riesenbau aher, den wir *Elemente des Euklid* nennen, hat sicherlich eine ungleich längere Entstehungszeit gebraucht, als man dann anzunehmen gezwungen wäre. Es ist auch gewiß nicht ohne Bedeutung, daß schon 30 Jahre vor Euklid eine *Geschichte* der Geometrie hat entstehen können.

Zürich. F. Rudio.

---

**1:190**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1:195**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 56. — **1:197, 202**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1:207**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 283. — **1:225, 234**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 138. — **1:255**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 238. — **1:272**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 396. — **1:283**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1:284, 321**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266—267. — **1:370**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 319. — **1:383**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:386**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 407. — **1:395**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 323. — **1:400**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:429**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 324. — **1:432**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:434—435**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 396—397. — **1:436**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 138. — **1:437, 440**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:457**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 238. — **1:463**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139, 324. — **1:466**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 397. — **1:467, 469**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:475**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267—268; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 283. — **1:476**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1:508**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 68. — **1:510**, siehe BM $\mathbf{1}_3$. 1900, S. 314. — **1:519—520**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **1:537, 540, 542**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1:622**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143. — **1:641**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:661**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1:662**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:663**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 405. — **1:671**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1:673, 675**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 407—408. — **1:687—689**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143—144; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 205—206. — **1:694**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 284.

---

**1**:694. Der Satz, wie man aus den drei Seiten eines sphärischen Dreiecks die Winkel herechnet, kommt, soweit jetzt hekannt, erst hei Nasireddin vor; nur in einem speziellen Falle hedient sich Albattani eines Verfahrens, das zu diesem Satze führen *kann* (vgl. Braunmühl, *Vorl. über Gesch. d. Trigon.* **1**, S. 53—54, 69). G. Eneström.

**1**: 704, 706, 708, 714, 735, 736, 744, 748, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 499—500. — **1**: 749, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 268.

1: 752. Die Bemerkung, daß die Schrift: *Joannis Hispalensis liber algorismi de pratica arismetrice* mehr als dreimal umfangreicher als der Traktat *Algorismi de numero indorum* ist, gibt, obgleich an sich richtig, keine exakte Auskunft über die relative Ausführlichkeit jener Schrift, denn die von Boncompagni benutzte Handschrift des Traktates *De numero indorum* ist unvollständig, und der Inhalt derselben entspricht nur den Seiten 25—68 der Druckausgabe der *Liber algorismi de pratica arismetrice.* Statt „mehr als dreimal" könnte man also mit besserem Rechte „beinahe zweimal" setzen. G. Eneström.

**1**: 753, 754, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 408—409.

1: 754. Die Angabe, daß an einer Stelle der dem Johannes Hispalensis beigelegten und von B. Boncompagni im Jahre 1857 herausgegebenen Schrift *Liber algorismi de pratica arismetrice* die Unbekannte „tantum quantum" heißt, scheint mir auf einem Mißverständnis zu beruhen. Die betreffende Stelle lautet: „uis scire quantum uixerit qui uiuiens tantum quantum uixit, et iterum tantum et dimidium tanti, et dimidium dimidi, . *C*. annos complet". Fragt man jetzt, durch welchen Ausdruck die Unbekannte bezeichnet ist, so darf man kaum „tantum quantum", sondern vielmehr „tantum" antworten. Auf der anderen Seite dürfte klar sein, daß „tantum" hier kein eigentliches Kunstwort ist, sondern lediglich „so lange Zeit" bedeutet. Beiläufig sei bemerkt, daß die Wörter „tantum" und „quantum" zusammen auch an einer Stelle der dem Gherardo Cremonese zugeschriebenen Übersetzung einer arabischen Algebra benutzt werden( siehe S. 51 der Boncompagnischen Monographie über Gherardo Cremonese: „queritur que sint ille partes denarii per quarum unam si ipse multiplicetur tantum producitur quantum ex reliqua in se"), aber hier können sie gar nicht als Kunstwörter aufgefaßt werden. G. Eneström.

**1**: 756, 757, 767, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 500—501. — **1**: 794, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 139. — **1**: 804, 805, 807, 808, 812, 823, 852, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 268—269. — **1**: 853, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 501. — **1**: 854, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 501; **3**$_3$, 1902, S. 324; **4**$_3$, 1903, S. 206

1: 854. Z. 22 ist „Oxford" statt „London" zu setzen. Auf die Möglichkeit, daß der betreffende Algorismus von Gherardo Cremonese verfaßt worden sei, hat wohl zuerst Chasles hingewiesen, aber sicherlich nur aus dem Grunde, weil seine Quelle (Heilbronner) als Verfasser der Schrift „Magister Gerardus" angab. Aber der cod. Digby 61, der den Algorismus enthält, gibt nach einer freundlichen Mitteilung des Herrn A. A. Björnbo als Titel: „Algorismus magistri Gernandi in integris et minutiis" an und wenn Chasles dies gewußt hätte, so würde er wohl kaum seine Vermutung ausgesprochen haben. Übrigens hat Herr P. Duhem kürzlich nachgewiesen (siehe Biblioth. Mathem. 6$_3$, 1905, S. 9—15), daß der fragliche Algorismus mit dem von J. Schöner 1534 herausgegebenen *Algorithmus demonstratus* identisch ist.

G. Eneström.

**1 : 855**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501.

**2 : 7**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351. — **2 : 8, 10**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501—502. — **2 : 14—15**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 200. — **2 : 20**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **2 : 25**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 274.

2 : 30. Es ist nicht ganz richtig, wenn Herr CANTOR sagt, daß die Araber bei der Quadratwurzelausziehung eine dritte Annäherung (nämlich $\sqrt{a^2+r} = a + \frac{r}{2a} - \frac{\left(\frac{r}{2a}\right)^2}{2\left(a+\frac{r}{2a}\right)}$) stets als letzte betrachteten; EL-ḤAṢṢÂR gibt in seinem Rechenbuch (Biblioth. Mathem. $\mathbf{2}_3$, 1901, p. 38) noch eine weitere Annäherung, die allerdings im allgemeinen eine unbedeutende Verbesserung gegenüber der dritten bedeutet. Bezeichnen wir die oben gegebene dritte Annäherung mit $a + \frac{p}{q}$, so ist nach EL-ḤAṢṢÂR $a + \frac{p}{q} - \frac{\left(\frac{1}{q}\right)^2}{2\left(a+\frac{p}{q}\right)}$ eine weitere Annäherung.

H. SUTER.

**2 : 31**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351—352; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239—240.

2 : 32. Bei der Kubikwurzelausziehung gibt LEONARDO von Pisa (vergl. in seinen *Scritti* I, p. 380—382; II, p. 149, 150 die Beispiele $\sqrt[3]{47}$, $\sqrt[3]{900}$ und $\sqrt[3]{2345}$) nach der zweiten Annäherung $\left(\sqrt[3]{n} = \sqrt[3]{a^3+r} = a + \frac{r}{3a^2+3a+1}\right)$ noch eine dritte, die, wenn man die zweite mit $a_1$ bezeichnet, ausgedrückt wird durch: $a_1 + \frac{n-a_1^3}{3a_1(a+1)}$; in der Tat gibt die erste Formel oft einen zu ungenauen Wert, z. B. erhält man für $\sqrt[3]{900}$ den Wert $9\frac{171}{271} = 9{,}631$ . . ; die zweite ergibt, wenn man um die Rechnung zu vereinfachen, wie es LEONARDO auch tut, $a_1 = 9\frac{2}{3}$ annimmt, den Wert 9,6553 . . (richtiger Wert = 9,6549 . .). Die zweite Annäherung hat wohl LEONARDO von den Arabern entlehnt (sie kommt bei dem Perser EL-HASAN B. EL ḤOSEIN EL-MERWAZÎ vor, c. 1216), die dritte dürfte LEONARDOS eigenes Produkt sein.

H. SUTER.

**2 : 34**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144. — **2 : 37**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502.

2 : 37. Das Wort casus, das auch bei JORDANUS NEMORARIUS vorkommt, ist die Übersetzung des arabischen Wortes masqiṭ = Ort des Herabfallens; masqiṭ el-ḥagar = Ort des Herabfallens des Steines (Senkbleis), oder bloß el-masqiṭ nennt der arabische Mathematiker den Fußpunkt einer Höhe des Dreieckes, dann auch die Entfernung dieses Fußpunktes von einer Ecke des Dreieckes (vgl. MUH. B. MÛSÂS *Algebra*, edit. ROSEN, p. 60, Übers. 80; doch gibt die Übersetzung nicht den arabischen Wortlaut genau wieder).

H. SUTER.

**2**:38, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352. — **2**:**39**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502. — **2**:41, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352.

---

**2**:51. Von den mit Hilfe der Algebra gelösten Aufgaben über Fünfecke und Zehnecke, die sich in der *Practica geometriae* des LEONARDO befinden (p. 207—216), ist der größte Teil (c. 16) der Schrift über das Fünfeck und Zehneck des ABÛ KÂMIL ŠOĞÂʿ B. ASLAM entnommen (vergl. *Festschrift zum 80. Geburtstage* MORITZ STEINSCHNEIDERS, Leipzig 1896, p. 169—194), und zwar mit denselben Zahlenbeispielen und ebenso gelöst wie bei dem arabischen Mathematiker. Vielleicht lag LEONARDO noch die ganze im *Fihrist* genannte Schrift dieses Autors vor, nämlich das Buch der Ausmessungslehre und der Geometrie, von welchem die genannte Abhandlung nur ein Bruchstück sein wird; vielleicht kannte LEONARDO auch die Algebra dieses ohne Zweifel sehr bedeutenden arabischen Mathematikers, die sehr wahrscheinlich noch im Pariser Ms. 7377 A neben der Schrift über die Fünfecke und Zehnecke in lateinischer Übersetzung vorhanden ist. H. SUTER.

---

**2**:**53**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 201. — **2**:**57**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352 — **2**:**59**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502. — **2**:**63**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 206. — **2**:**70**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 417. — **2**:**73**, 82, 87, 88, 89, 90, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502—503. — **2**:91—92, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503; **5**$_3$, 1904, S. 409—410. — **2**:**97**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 406. — **2**:**98**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 269—270.

---

**2**:98—99. Es scheint uns etwas zu leicht über die Optik des WITELO weggegangen zu sein, wenn Herr CANTOR sagt: „Dessen erstes Buch übrigens eine ganz nette Geometrie sein soll". Allerdings ist die Mehrzahl der Sätze dem gleichnamigen Werke des Arabers ALHAZEN (EL-ḤASAN B. EL-HAIṬAM) entlehnt, aber gerade bei diesen hätten einige interessante historische Bemerkungen ihren Platz finden können. So trifft man in beiden Werken (ALHAZEN p. 189, WITELO p. 48: Ausgabe von RISNER, Basel 1572) den Satz, daß auf jeder Geraden, welche die von vier harmonischen Punkten ausgehenden Strahlen eines Büschels schneidet, wieder vier harmonische Punkte entstehen. Ob ALHAZEN diesen Satz aus den *Collectiones* des PAPPUS oder aus den Porismen des EUKLIDES entnommen habe, können wir nicht entscheiden, denn er führt keine Quellen an (die im Text der Beweise hinzugefügten Zitate stammen von RISNER her). Ebenso findet man bei beiden Autoren (ALHAZEN p. 259, WITELO p. 23 und 24) den Satz über die Größe des Winkels, der von zwei sich innerhalb oder außerhalb des Kreises schneidenden Sekanten gebildet wird. Eine Reihe von Sätzen über die Kegelschnitte, die bei beiden vorkommen, sind den Schriften des APOLLONIUS und SERENUS entnommen, die Sätze in WITELO über die Brennpunktseigenschaften der Parabel (p. 393—404) jedenfalls arabischen Mathematikern. Ebenso trifft man bei WITELO (p. 396, 470) die Ausdrücke sinus und sinus versus, wenngleich er die Größe eines Winkels mit Hilfe einer Sehnentafel und nicht einer Sinustafel bestimmt, es wird ihm also keine solche von hinreichender Genauigkeit zu Gebote gestanden haben. — Die Namen antiker Autoren, wie EUKLIDES, PTOLEMÄUS, APOLLONIUS, MENELAUS, THEODOSIUS, SERENUS, THEON, PAPPUS, PROKLUS, und auch des Arabers ALHAZEN, die jeweilen den Lehrsätzen des WITELO als Quellenangaben beigegeben sind, stammen vom Herausgeber RISNER her, wie dieser in der „Praefatio" ausdrücklich bemerkt;

wir müssen also annehmen, daß WITELO die meisten dieser Autoren studiert haben wird, denn die vielen Sätze, die wir sowohl bei jenen Mathematikern als in seiner Optik finden, kann er doch unmöglich selbständig erfunden haben. WITELO selbst zitiert in seinen Beweisen den EUKLIDES sehr oft, einige Male den APOLLONIUS (Kegelschnitte), sowie auch ARISTOTELES, und einmal (p. 223) den ANTHEMIUS von Tralles mit seiner Schrift über die Brennspiegel. Vielleicht ist hierin die Mithilfe WILHELM VON MOERBECKES zu erkennen; wie viel er aber diesem von seinen Kenntnissen aus der griechischen Mathematik, und wie viel er den Arabern verdanke, kann hier nicht festgestellt werden. — Man sieht aus dem Angeführten, daß ein genaueres Studium beider Werke über Optik auch heute noch sehr zu empfehlen ist. H. SUTER.

---

**2 : 100**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2 : 101**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325. — **2 : 104—105**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 397—398. — **2 : 111**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 116**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406.

---

2 : 117—118. Aus dem stereometrischen Teile der *Geometria speculativa* des TH. BRADWARDINUS hätte Herr CANTOR, da er p. 97 die Beschäftigung des ROGER BACO mit dem Problem der Raumausfüllung durch regelmäßige Körper erwähnt hat, auch die Stelle anführen können, an der BRADWARDINUS die Behauptung des AVERROES (denn von diesem hatte BACO dieses Problem entnommen: vergl. auch ENESTRÖM in der Biblioth. Mathem. $\mathbf{3}_3$, 1902, p. 406) widerlegt, daß 12 an einer Ecke zusammenstoßende Tetraeder, sowie auch 9 Oktaeder den Raum ausfüllen. Er fügt dann noch hinzu, man könnte höchstens im Zweifel darüber sein, ob nicht 20 Tetraeder den Raum ausfüllen; das wäre nämlich der Fall, wenn es sicher wäre (BRADWARDIN läßt dies ungewiß), ob das Ikosaeder sich vom Zentrum aus in 20 Tetraeder zerlegen lasse (*Geometria speculativa*, Pariser Ausgabe von 1530, fol. 17 und 18).

H. SUTER.

---

**2 : 122**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503—504. — **2 : 126, 127**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2 : 128**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2 : 132**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 515—516. — **2 : 143**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2 : 155**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 410—411. — **2 : 157, 158**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 163, 166**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2 : 175**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2 : 210**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352—353. — **2 : 218**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 284. — **2 : 219**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353. — **2 : 229, 242, 243**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504—505. — **2 : 253**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353. — **2 : 273**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 505. — **2 : 274**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325. — **2 : 281**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 411. — **2 : 282, 283**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 506; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353—354. — **2 : 284, 286, 287, 289, 290, 291**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 506—507. — **2 : 296**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354. — **2 : 313**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2 : 317**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 69. — **2 : 328**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 285. — **2 : 334**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2 : 353**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87. — **2 : 358, 360**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87. — **2 : 381**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2 : 385**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 81; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 207. — **2 : 386**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 306. — **2 : 395**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507—508.

---

2 : 399. Die hier erwähnte, 1520 in Wien erschienene Ausgabe des *Algorithmus linealis* von HEINRICH STROMER ist nicht die erste Auflage. In der von Herrn CANTOR (S. 400) zitierten Schrift von S. GÜNTHER werden nach

Denis (*Wiens Buchdruckergeschichte bis MDLX*, Wien 1782, S. 78, 116) zwei ältere Auflagen aus den Jahren 1512 und 1515 [1514] erwähnt. Zwei noch ältere Auflagen verzeichnet E. Wappler in seinem *Beitrag zur Geschichte der Mathemathik* (Abhandl. zur Gesch. der Mathem. 5, 1890, S. 154), nämlich die 1504 und 1510 gedruckten. Eine Auflage aus dem Jahre 1506 scheint B. Boncompagni besessen zu haben; im *Catalogo della insigne biblioteca appartenuta alle chiara memoria del principe D. Baldassarre Boncompagni*. I (Roma 1895) wird nämlich S. 490: „Stromer (Henr.). — Algorithmus linealis. Herbipoli 1506 in 4$^{0}$“ verzeichnet. Dagegen findet sich im *Catalogo della bibliotheca Boncompagni*. I (Roma 1898), S. 178: „Stromer, Henricus Auerbachensis, Algorithmus linealis cum regula de Tri perstringens. Lipsiae, Martinus Lansberck 1504, in 4$^{0}$“. Auffallenderweise wird etwas früher in diesem Kataloge (S. 155) ein anonymer „Algorithmus linealis una cum regula de Tri perstringens“ (Lipsiae, Jac. Thanner 1517) aufgeführt. Ob dieser eine anonyme Ausgabe der Stromerschen Schrift ist? G. Eneström.

---

**2**: **401, 405, 425,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2**: **429,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 201—202. — **2** : **430,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 145. — **2** : **440,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 285. — **2** : **442,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 325. — **2** : **449,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140. — **2** : **454,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 242. — **2** : **474, 480,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140—141. — **2** : **481,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 508. — **2** : **482,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 508; **2**$_3$, 1901, S. 354; **3**$_3$, 1902, S. 240. — **2**: **484,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2**: **486, 489, 490,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2** : **497,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509; **4**$_3$, 1903, S. 87. — **2** : **509,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270, 509. — **2**: **510,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2**: **512,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2** : **514, 516, 517,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2** : **530,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 354—355; **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2** : **532, 535, 541, 548, 549,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509—510. — **2** : **550,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 355. — **2** : **554,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2**: **555, 565, 567, 568,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 285—286. — **2** : **569,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2** : **572—573,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510; **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2**: **576,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 355—356. — **2**: **579,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 145. — **2** : **580—581,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 207. — **2** : **582,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2**: **583,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270; **2**$_3$, 1901, S. 356. — **2** : **585,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 69—70. — **2** : **592,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2** : **594,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270. — **2** : **597,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270; **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2** : **599—600,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2** : **602, 603—604,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270—271.

---

2 : 604. Z. 10 muß „in den Auflagen von 1608 und 1612“ statt „in der Auflage von 1612“ gesetzt werden (vgl. S. 619, wo Herr Cantor die unvollständige Angabe der 1. Auflage der *Vorlesungen* verbessert hat).

G. Eneström.

---

**2** : **611,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 356—357. — **2** : **612,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2** : **613,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357; **5**$_3$, 1904, S. 306. — **2** : **614,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141.

---

2 : 617. Die Angabe, daß Bürgi ein Pünktchen zur Abgrenzung von Dezimalstellen benutzt hat, beruht nach N. L. W. A. Gravelaar (*De notatie der decimale breuken;* Nieuw archief voor wiskunde **4**$_2$, 1900, S. 61) ursprünglich auf einem Übersehen von R. Wolf. Dieser hat nämlich eine von Frisch eingeführte Modifikation der Keplerschen Bezeichnung als von Kepler selbst herrührend aufgefaßt, und darum behauptet, daß sich Bürgi des

Dezimalkommas bedient hat. In Wirklichkeit hat man gar keinen Grund anzunehmen, daß Bürgi ein Komma oder ein Pünktchen als Dezimalzeichen benutzte. Nach Herrn Gravelaar (a. a. O. S. 73) ist Neper der erste, bei dem das Komma (*Rhabdologia*, 1617) und das Pünktchen (*Constructio*, 1619) als wirkliche Dezimalzeichen vorkommen; Pitiscus hatte zwar schon 1608 ein Pünktchen angewendet, aber dies ist nur als ein Scheidezeichen anzusehen.

G. Eneström.

---

2 : 619. Z. 4 lies: „nicht in der ersten Auflage“ statt „nicht in den früheren Auflagen“ (vor 1608 gab es nämlich nur eine einzige Anflage der Trigonometrie des Pitiscus). G. Eneström.

---

**2 : 620**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 621**, **623**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146–147.

---

2 : 632. Mit Recht vermutet Herr Cantor, daß die Drucklegung der Schrift des Viète: *Ad logisticem speciosam notae priores* nicht zu Lebzeiten des Verfassers stattfand; auf der anderen Seite ist die Schrift nicht zuerst in der Gesamtausgabe von 1646 gedruckt worden. Sie erschien nämlich 1631 in kleinem Duodezformat unter dem Titel: *Francisci Vietae fontenaeensis in artem analyticem isagoge. Eiusdem ad logisticem speciosam notae priores, nunc primùm in lucem editae. Recensuit, scholiisque illustrauit J. D. B.* Parisiis, apud Gvillelmvm Bavdry, vià amygdalinâ, propè collegium Grassinorum M.DC.XXXI. Cum Privilegio Regis. Der Herausgeber war J. de Beaugrand. Wie aus dem Titel hervorgeht, sind die *Notae priores* hier mit der *Isasoge* vereinigt, haben aber ein besonderes Titelblatt bekommen, das beginnt: „*Francisci Vietae fontanaeensis ad logisticem speciosam notae priores.* Parisiis“, worauf die Angabe des Buchdruckers und des Druckjahres folgt. G. Eneström.

---

**2 : 638**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 147. — **2 : 642**, **643**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271. — **2 : 655**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357. — **2 : 656**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 286. — **2 : 659**. **660**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 147—148. — **2 : 665**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271. — **2 : 669**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 203. — **2 : 674**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88. — **2 : 683**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2 : 693**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 287. — **2 : 700**, **701**, **703**, **704**, **705**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271—273. — **2 : 715**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 412. — **2 : 719**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357. — **2 : 720**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 287. — **2 : 721**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2 : 742**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142. — **2 : 746**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2 : 747**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 173; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 225. — **2 : 749**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88. — **2 : 766**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 412–413 — **2 : 767**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148, 357—358. — **2 : 770**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 208. — **2 : 772**, **775**, siehe BM $\mathbf{2}_3$. 1901, S. 358—359. — **2 : 777**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 204. — **2 : 783**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88—89. — **2 : 784**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2 : 793**, **798**, **799**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307. — **2 : 802**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 208. — **2 : 812**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 37. — **2 : 820**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307. — **2 : 825**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2 : 832**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 203—204. — **2 : 840**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148—149. — **2 : 843**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 328.

---

2 : 850. Angeregt durch eine Anfrage in der BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 208—209, hat Herr A. Favaro teils in aller Kürze in der BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 415, teils

ausführlich in den Rendiconti dell' istituto Lombardo (Milano) **38**$_2$, 1905, S. 358—372 die Frage behandelt, ob Cavalieri und Grégoire de Saint-Vincent bei ihrer Zurückführung der Quadratur der Spirallinie auf die Auffindung der Fläche eines Parabelstückes unabhängig voneinander gearbeitet haben oder nicht. Herr Favaro hat dabei bewiesen, daß Cavalieri schon 1623 im Besitz seiner Methode war, und daß man nicht den leisesten Zweifel an seiner Unabhängigkeit von Grégoire de Saint-Vincent hegen kann. Auf der anderen Seite hat man gar keinen Grund anzunehmen, daß dieser seine Methode von Cavalieri entlehnt hat. Nimmt man noch hinzu, daß der Grundgedanke dieser Methode schon bei Archimedes zu finden ist (vgl. H. G. Zeuthen, *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert*, Leipzig 1903, S. 42, 291), so ist es wohl erlaubt zu behaupten, daß Cavalieri und Grégoire de Saint-Vincent sicherlich zu ihrer Methode unabhängig voneinander gelangten, und folglich wäre es angebracht, das Stück auf S. 850, das mit den Worten: „Ein Zusammentreffen" beginnt, gänzlich zu streichen oder wesentlich zu modifizieren.

G. Eneström.

---

**2 : 856, 865,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149. — **2 : 876, 878, 879,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511. — **2 : 891,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 278. — **2 : 898,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 37, 208. — **2 : 901,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511. — **2 : 919,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 204. — **2 : VIII** (Vorwort), siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2 : IX, X** (Vorwort), siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511—512.

---

**3 : 9,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359. — **3 : 10,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 518. — **3 : 11,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209. — **3 : 12, 17,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512. — **3 : 22,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512; **4**$_3$, 1903, S. 209. — **3 : 24,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209. — **3 : 25,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209, 399. — **3 : 26,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359. — **3 : 45—48, 49, 50,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512—513. — **3 : 70,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 360. — **3 : 82,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 308. — **3 : 100,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149. — **3 : 112,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209—210. — **3 : 116,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513. — **3 : 117,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 518. — **3 : 123,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513; **4**$_3$, 1903, S. 399. — **3 : 124,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 407—408; **4**$_3$, 1903, S. 400. — **3 : 126,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 288 — **3 : 131,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 210. — **3 : 151,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 326. — **3 : 167, 172—173,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 400. — **3 : 174,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149—150. — **3 : 183,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 432. — **3 : 188,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 241. — **3 : 201,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513. — **3 : 207,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 519. — **3 : 215,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 150. — **3 : 218,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513. — **3 : 220,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 326. — **3 : 224,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514. — **3 : 225, 228,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 150. — **3 : 232,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514. — **3 : 244—245,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 205, 413. — **3 : 246,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514; **2**$_3$, 1901, S. 151. — **3 : 250,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514. — **3 : 303,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 155. — **3 : 330—331,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 241—242. — **3 : 337,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 206. — **3 : 370—371,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 308. — **3 : 447, 455,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 151. — **3 : 473,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 154—155; **4**$_3$, 1903, S. 401 — **3 : 477, 479,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 151—152. — **3 : 497, 498,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 309. — **3 : 507,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 71—72. — **3 : 521,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441. — **3 : 535,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 401. — **3 : 536,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 206. — **3 : 565,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 326—327. — **3 : 571,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 327; **5**$_3$, 1904, S. 72. — **3 : 578,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 327; **5**$_3$, 1904, S. 309. — **3 : 586, 609,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 309—310. — **3 : 614,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 89—90. — **3 : 636—637,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441. — **3 : 646—647,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 206—207. — **3 : 652,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 446; **5**$_3$, 1904, S. 207. — **3 : 660,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441. — **3 : 667,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441—442; **5**$_3$, 1904, S. 207—208, 310. — **3 : 686,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 208. — **3 : 689, 695,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 442.

**3** : 736. Schon vor EULER und CLAIRAUT hatte sich JOHANN BERNOULLI des Buchstabens $\varphi$ als Funktionalzeichen bedient und zwar in der Abhandlung: *Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des problèmes sur les isopérimètres* (Mém. de l'acad. d. sc. de Paris 1718, 100—138 = *Opera omnia* II, S. 235—260). Er nennt $\varphi$ „la caractéristique de la fonction" (S. 108; *Opera omnia* II, S. 243); am Ende des „Problème I" (S. 112; *Opera omnia* II, S. 246) kommt die Differentialgleichung $dy : dz = (\varphi x \pm c) : a$, und am Ende des „Problème II" (S. 116; *Opera omnia* II, S. 250) die Differentialgleichung $dy : dx = (\varphi z \pm c) : a$ vor. Auf diesen Umstand habe ich in meinem Aufsatze: *Note historique sur les symboles qui servent à désigner des fonctions quelconques de variables données* (Biblioth. Mathem. 1891, S. 89—90) aufmerksam gemacht. JOHANN BERNOULLI klammert ebenso wenig wie später CLAIRAUT und nach ihm D'ALEMBERT das Argument der Funktion ein. G. ENESTRÖM.

---

**3 : 750, 758,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446. — **3 : 759,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 208. — **3 : 760, 766,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446–447. — **3 : 774, 798,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 442—443. — **3 : 845,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327—328. — **3 : 848, 881,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443. — **3 : 882,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 414. — **3 : 890,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 401. — **3 : 892,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 143. — **3 : IV** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443.

---

## Vermischte historische Notizen.

**Sur la division du temps en instants au moyen âge.** Le traité d'algorithme, publié par CURTZE dans les Abhandl. zur Gesch. der Mathem. **8**, 1897, p. 17 suiv., indique au début du premier livre une singulière subdivision de l'heure. „Instans pars temporis est cujus pars nulla est. Momentum vero pars temporis est constans ex DLXXIIII instantibus." Le *momentum* est au reste $\frac{1}{40}$ de l'heure; mais le nombre 574 est erroné. Il faut certainement lire 564 (DLXIIII), comme le prouvent les textes bien concordants que LASSWITZ a réunis dans sa *Geschichte der Atomistik* (Hamburg 1890, p. 34, 35). L'heure était ainsi considérée comme composée de 22560 *instantia* ou *atomi*. Je ne crois pas que l'explication du choix de ce nombre 564 ait encore été donnée ni même tentée. La voici.

$564 = 12 \times 47$. D'autre part $235 = 5 \times 47$, et 235 est le nombre des mois du cycle de MÉTON. On a donc cherché à établir une commune mesure entre l'année julienne et le mois lunaire de façon à pouvoir les exprimer l'une et l'autre par des nombres entiers et faciliter ainsi le calcul des jours de la lune. Il fallait pour cela introduire dans la subdivision de l'heure le facteur 47. On l'a fait d'ailleurs en le multipliant suffisament par les facteurs simples pour arriver à un intervalle assez petit (au dessous d'un sixième de nos secondes) pour pouvoir être regardé comme indivisible.

L'opinion que le temps est composé d'éléments indivisibles semble avoir été transmise au moyen âge par MARTIANUS CAPELLA (IX, § 97); elle est expressément professée par ISIDORE DE SÉVILLE, puis par BÈDE LE VÉNÉRABLE, auquel seulement paraît remonter la détermination précise du nombre des atomes de l'heure. Après lui elle est relativement fréquente, et le mot d'atome est resté en italien, sous la forme *attimo*, pour désigner un instant. P. TANNERY.

---

**Über die Bedeutung des Ausdruckes „regula coeci".** In den „Nachträgen und Berichtigungen" zu meiner Schrift *Die Mathematiker und Astronomen der Araber* etc., die im **14.** Heft der Abhandlungen zur Geschichte der mathem. Wissenschaften erschienen sind, habe ich p. 163 und 169 die Aufgabe oder Rechnung „el-talâqî" erwähnt, über die Qostâ b. Lûqâ und Ibn el-Haitam geschrieben haben. Ich übersetzte „el-talâqî" durch „das Zusammentreffen"; Woepcke übersetzte (*L'algèbre d'Omar Alkhayyâmî*, p. 75) den Titel der Abhandlung Ibn el-Haitams durch „Mémoire sur les problèmes d'intersection". Nun bedeutet das arabische Verbum „talâqâ" insbesondere „zusammentreffen", „zusammenkommen" (von Personen an einem Orte), und wird genau wiedergegeben durch das lateinische Verbum „coire"; der Infinitiv von „talâqâ" heißt „el-talâqî" und bedeutet also „das Zusammenkommen", „die Zusammenkunft", und wird wiedergegeben durch das lateinische „coetus" (Nebenform von „coitus"); unsere Regel hieß also ursprünglich jedenfalls „regula coetus" oder „regula coeti" (da man im mittelalterlichen Latein die 4. Deklination oft durch die 2. ersetzt hat); das „t" ist also später fälschlich als „c" gelesen worden (was bekanntlich sehr leicht möglich ist) und daraus ist dann also „regula coeci" entstanden. Hiermit stimmt auch trefflich die türkische Form „sikisch", die man in der Arithmetik von Lauremberg findet (vergl. Carra de Vaux, in der Biblioth. Mathem. $11_2$, 1897, p. 32); die Wörter „talâqî", „sikisch", „coetus" sind identisch, sie bedeuten alle drei „die Zusammenkunft", „Vereinigung" (von Personen zu einer Gesellschaft) [1]). Nach dem Gesagten ist es wohl kaum mehr nötig, das Petersburger Ms. 192,7°, das die Abhandlung des Ibn el-Haitam über die Aufgaben „el-talâqî" enthält, zur endgültigen Erledigung unserer Frage heranzuziehen; in materieller Hinsicht, d. h. um den Weg kennen zu lernen, den die Araber zur Lösung dieser unbestimmten Aufgaben eingeschlagen haben, wäre ein Studium desselben immerhin wünschenswert.

Zürich. Heinrich Suter.

---

**Walter Brytes Theorica planetarum.** Schon seit langer Zeit hat man bemerkt, daß die mit den Worten *Circulus ecentricus* .... anfangende *Theorica planetarum*, welche allgemein dem Gherardo da Sabbionetta zugeschrieben wird, im Cod. Digby 15 einem gewissen Walter Bryte beigelegt ist. Die dadurch entstandene Frage von dem wirklichen Verfasser des Werkes muß noch als offen betrachtet werden, obwohl Steinschneider [2]) schon die wahrscheinliche Lösung richtig angedeutet hat. Im ganzen kenne ich 59 Hss., in denen eine *Theorica planetarum* mit den obigen Anfangsworten vorkommt. Schon bei der Registrierung nach Textanfang und -Schluß scheiden sich indessen — wenn wir von defekten Abschriften absehen — zwei verschiedene Texte aus:

**1.** *Circulus ecentricus uel egresse cuspidis uel egredientis centri dicitur, qui non habet centrum . . . iuncti linea non corporaliter.* [3])

---

1) Die nächstliegende Bedeutung von „sikisch" im Türkischen ist allerdings = coitus, es bedeutet aber auch cohabitatio im allgemeinen Sinne.

2) Steinschneider, *Hebräische Übersetzungen* (Berlin 1893), S. 631—632.

3) Ein Text mit demselben Anfang und dem Schluß: . . . *aut maioris quantitatis*, welcher in 6 Hss. vorkommt, ist mit Text 1 identisch; nur fehlt das letzte (8.) Kapitel. — Ein Text mit demselben Anfang und dem Schluß: . . . *non est magna inequalitas anni Christi gradus, minuta, secunda*, den ich aus 2 Hss. kenne, ist gleichfalls mit Text 1 identisch; nur fehlen ca. 11 Zeilen am Ende.

2. *Circulus eccentricus egresse cuspidis, et circulus egredientis centri sunt idem . . . et ideo luna non retrograditur et istius capitum subditur figura.*

Daß diese beiden Texte wirklich wesentlich verschieden sind, zeigt schon der Raum, den sie einnehmen; Text 2 ist nämlich viel umfangreicher als Text 1. Letzterer ist der oft gedruckte Text, der in allen ältesten Hss. und in den Ausgaben dem GERARDUS CREMONENSIS, d. h. wie BONCOMPAGNI[1]) nachgewiesen hat, dem GHERARDO DA SABBIONETTA beigelegt wird, an dessen Autorschaft kaum zu zweifeln ist, obwohl derselbe Text in mehreren Hss. dem JOHANNES HISPALENSIS, dem ROBERTUS LINCOLNIENSIS oder dem SIMON BREDON zugeschrieben wird.[2])

Text 2, der umfangreichere, ist meines Wissens nie zum Druck befördert worden, und während der kürzere Text 1 in allen Ländern in Hss. des 13. bis 15. Jahrhunderts weit verbreitet ist, so habe ich Text 2 vorläufig nur in vier jüngeren englischen Hss. gefunden, und zwar im Cod. Egerton (Brit. Mus.) 847, fol. $105^r$—$122^r$ (14. Jh. spät); Digby 15, fol. $58^v$—$92^r$ (15. Jh.); Digby 48, fol. $96^r$—$112^v$ (15. Jh.); Digby 98, fol. $132^r$—$145^r$ (15. Jh.). Die erste und zweite Abschrift sind anonym; im Cod. Digby 15 ist die Unterschrift: *Explicit theorica domini WALTERI BRIT, quondam socii collegii de Merton;*[3]) im Cod. Digby 48 hat eine jüngere Hand dem ursprünglich anonymen Texte die Überschrift: *Theorica planetarum BREDON* hinzugefügt und hinten folgende Verse geschrieben:[4])

„Qui cupis astrorum septem bene scire sophiam
Hunc lege tractatum qui continet astronomiam.
Namque domus Merton hanc fecerat arte potitus
Astronomus BREDON consocius atque peritus.
O Deus astripotens anime BREDON miserere
Cum sanctie statuas qui dicunt Kyria chere."

Alle diese Indizien weisen ganz bestimmt auf Oxford und das da befindliche „Merton College" hin, und zwar zunächst auf WALTER BRYTE, einen „Fellow" dieses College, da der Verweis auf SIMON BREDON eine Eintragung von jüngerer Hand ist.

Nach den äußeren Kriterien läßt sich also feststellen, daß in der Tat zwei verschiedene Texte vorliegen, eine ältere kurze italienische Arbeit und eine jüngere viel umfangreichere Oxforder-Arbeit. Unter diesen Umständen erwartet man in dem Oxforder-Texte eine jüngere Bearbeitung des italienischen Urtextes zu finden, was sich selbstverständlich nur durch innere Kriterien nachweisen läßt. Schon ein oberflächlicher Vergleich der beiden Texte zeigt auch, daß sie inhaltlich Punkt für Punkt übereinstimmen, und daß der Oxforder-Text nur die von GHERARDO DA SABBIONETTA behandelten Fragen der theoretischen Astronomie viel eingehender erörtert. A. A. BJÖRNBO.

---

1) BONCOMPAGNI, *Gherardo Cremonese* (Roma 1851), S. 65 ff.

2) In dem Inhaltsverzeichnis vorne im Cod. Cantab. Ji. 1. 13 wird Text 1 dem SACROBOSCO zugeschrieben.

3) Nach dem Kataloge über die Digbeanischen Hss. soll sich diese Unterschrift in anderen englischen Hss. finden, die ich also noch nicht registriert habe.

4) Vgl. MACRAY, *Cat. codd. mss. bibl. Bodl.* Pars IX, p. 44.

## Anfragen.

**121. Über den Bearbeiter oder Übersetzer des von Boncompagni (1857) herausgegebenen „Liber algorismi de pratica arismetrice".** Als zweites Heft (S. 25—136) der *Trattati d'aritmetica* gab B. Boncompagni im Jahre 1857 eine Schrift heraus, die sich in einem Manuskripte der Pariser Nationalbibliothek (ancien fonds 7359, Bl. 85—111) findet, und die mit den Worten: „Incipit prologus in libro alghoarismi de pratica arismetrice. Qui editus est a magistro Johanne yspalensi" beginnt. Auf Grund der Anfangsworte gab Boncompagni seiner Ausgabe den Titel: *Joannes Hispalensis liber algorismi de pratica arismetrice*, nnd darum wird die Schrift von den mathematisch-historischen Forschern fast ohne Ausnahme dem Johannes Hispalensis als Bearbeiter oder Übersetzer zugeschrieben. Nur im Vorübergehen haben E. Wappler (*Beitrag zur Geschichte der Mathematik;* Abhandl. znr Gesch. d. Mathem. 5, 1890, S. 158—159) aus M. Steinschneider (*Über die mathematischen Handschriften der amplonianischen Sammlung;* Biblioth. Mathem. 1891, S. 47) fast gleichzeitig darauf hingewiesen, daß cod. Ampl. Qu. 355 (Bl. 85—115) in Erfurt dieselbe Schrift enthält, aber mit der Unterschrift: „Explicit liber algorismorum et omnium fraccionum in numeris translatus ex arabico a magistro G. cremonensi". Freilich legt Steinschneider auf diesen Umstand so wenig Gewicht, daß er in der Biblioth. Mathem. 1896 S. 79 die Schrift ohne weiteres dem Johannes Hispalensis zuschreibt.

Indessen scheint mir eine nähere Untersuchung der Frage durchaus notwendig, bevor man etwas über die Antorschaft zum Traktate feststellen kann. Außer den zwei schon genannten Handschriften des fraglichen *Algorismus* gibt es wenigstens zwei andere, nämlich cod. Dresd. C. 80 (vgl. Wappler, a. a. O. S. 158) und cod. Vatic. reg. Sn. 1285 (vgl. Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, S. 410—411), die beide anonym sind; vermntlich enthalten anch die Manuskripte cod. Paris. fonds Sorbonne 972 und 981 (vgl. Libri, *Hist. d. sc. mathém. en Italie* II, S. 300) nnd cod. Mazarin. 3642 (früher 1258, vgl. Chasles, Comptes rendns de l'acad. d. sc. [de Paris] **13**, 1841, S. 523) Abschriften des Traktates. Aus den Anfangsworten der von Boncompagni benutzten Handschrift darf man also nicht ohne weiteres folgern, daß der Traktat von Johannes Hispalensis herrührt.

Sollte es sich aber heransstellen, daß der betreffende *Algorismus* von Johannes Hispalensis bearbeitet oder übersetzt worden ist, so gibt es noch eine hierher gehörende Frage, deren Erledigung wünschenswert ist. Der von Boncompagni heransgegebene Text enthält nämlich teils den eigentlichen *Algorismus*, teils eine Sammlung von Excerpten, die mit dem vorangehenden in keinem direkten Zusammenhange stehen (vgl. G. Friedlein, *Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des christlichen Abendlandes*, Erlangen 1869, S. 155), nnd die wenigstens in einigen der übrigen Handschriften fehlen; cod. Dresd. C. 80 geht nach Wappler nnr his zur Seite 49 des gedruckten Textes, cod. Vatic. reg. Sn. 1285 höchstens his zur Seite 93, cod. Ampl. Qu. 355 höchstens his zur Seite 127. Es wäre eine dankenswerte Aufgabe zu ermitteln, woher die Excerpte herrühren.

G. Eneström.

# Rezensionen.

**S. Günther.** **Geschichte der Erdkunde.** Wien, Deuticke 1904. 8⁰, XI + 343 S. 11.60 Mk.

Mathematik, Astronomie, Physik bilden zusammen eine Gruppe jener zahlreichen Wissenschaften, die man als Hilfswissenschaften der Geographie bezeichnen muß, und nehmen geradezu den ersten Platz unter denselben ein. Wenn daher eine Geschichte der Geographie, d. h. eine historische Darstellung der Entwickelung, welche die geographischen Kenntnisse im Laufe der Jahrhunderte erfahren haben, auf Vollständigkeit Anspruch machen soll, so muß sie in erster Linie die Geschichte jener Wissenschaften zu rate ziehen. Daß dies in dem vorliegenden hochinteressanten Werke mit besonderer Vorliebe und spezieller Sachkenntnis geschehen ist, ist für denjenigen selbstverständlich, der weiß, daß der gelehrte Verfasser seit Jahrzehnten zur Förderung des geschichtlichen Studiums der mathematischen und astronomischen Wissenschaften hervorragend beigetragen hat. In der Tat wird auch der Fachmann aus der stupenden Belesenheit des Verfassers noch manche Anregung gewinnen können.

Das ganze Buch zerfällt in neun Abschnitte, von denen die ersten fünf die Entwickelung der Geographie im Altertum und Mittelalter, der sechste und siebente das Zeitalter der Entdeckungen, der achte und neunte das XVII. und XVIII. Jahrhundert umfassen, während in einem Anhang von 84 Seiten „der Eintritt der Geographie in das reife Mannesalter geschildert“, d. h. ein Überblick über ihre geschichtliche Entwickelung im XIX. Jahrhundert gegeben wird. In dem Kapitel über das Altertum gibt uns der Verfasser unter anderem eine Übersicht über die Kartographie der Alten, wir erfahren, daß Marinus von Tyrus die ersten Plattkarten konstruierte, die uns durch Ptolemaeus überliefert wurden, und lernen des letzteren Methoden zur Herstellung von Gradnetzen kennen. Ferner werden die Ansichten der alten Philosophen über die Gestalt der Erde, ihr erster Versuch einer wissenschaftlichen Gradmessung und ihre Methoden zur Ortsbestimmung auf der Erdoberfläche, die wieder bei Ptolemaeus ihre beste Entwickelung fanden, dargelegt. Endlich finden auch die antiken Weltsysteme eine kurze Erwähnung. Aus dem Kapitel über das Mittelalter heben wir namentlich die Darstellung der damals herrschenden kosmographischen Anschauungen hervor, über die der Verfasser schon früher selbständige Untersuchungen angestellt hat. Von Interesse für den Mathematiker sind auch die Anschauungen der Orientalen über die Kugelgestalt der Erde, die bei denselben vereinzelt vorkommenden Anklänge an Koppernicus und Kepler und die orientalischen Erdmessungsversuche sowie die Methoden zur Lösung mathematisch-geographischer Aufgaben. Nebenbei mag hier zu Seite 49 bemerkt werden,

daß das bei den Arabern so vielfach verwendete Planisphaerium nicht mit dem Analemma des PTOLEMAEUS identisch ist, indem das erstere ein *stereographisches* Abbild des Himmels darstellt, während das letztere zur Berechnung dienende Hilfsfiguren liefert, die durch *orthogonale* Projektion der Kugel auf die Ebenen des Horizontes, des Meridians und des ersten Vertikals erhalten werden.

Bei der im VII. Abschnitt geschilderten Neugestaltung der Kartographie konnte freihlich, dem Charakter des Buches entsprechend, nicht genauer auf die mathematische Seite der Sache eingegangen werden, doch sind überall die nötigen Quellen angeführt, die demjenigen, der sich für das Detail interessiert, eine eingehende Information ermöglichen. Zudem erfahren wir noch manche sonst weniger bekannte Einzelheiten, so z. B. (p. 139) daß bereits LEIBNIZ die Anregung gab im Interesse der Schiffahrt Karten in gnomonischer und MERCATOR-Abbildung zu kombinieren, ein Gedanke, dem allerdings damals keine weitere Folge gegeben wurde. — Eine interessante Darstellung erhält durch den Verfasser auch der Einfluß, den die im XVII. Jahrhundert gewaltig aufstrebende astronomische Wissenschaft auf die mathematische Geographie ausübte (S. 142—147) sowie die Verwendung der vervollkommneten trigonometrischen Methoden (Triangulation) zur Gradmessung durch SNELLIUS und PICARD, wodurch hinwiederum neue Untersuchungen über die Erdgestalt angeregt wurden. Nicht weniger interessant und lehrreich ist die Schilderung der Kartographie und der Globentechnik im XVIII. Jahrhundert (p. 183—193) sowie der in betracht kommenden astronomischen Grundlagen, nur möchten wir nicht in einem Atem mit EULER und CAGNOLI auch den älteren TOBIAS MAYER als hervorragenden Förderer der sphärischen Astronomie (S. 195) genannt wissen, da die beiden ersteren schon in der Handhabung der modernen Formelsprache den letzteren weit überragen.

Wir haben hier nur auf einiges wenige aus der Fülle des Stoffes hingewiesen, der das Buch auch für den Mathematiker interessant und lesenswert macht, nicht minder befriedigt wird es aber derjenige aus der Hand legen, welcher sich für Physik interessiert, da auch die Geschichte der geophysikalischen Erscheinungen trefflich dargestellt ist.

Daß es dem Verfasser überhaupt gelungen ist, den enormen Stoff, den die Geographie einer geschichtlichen Behandlung von den ältesten Zeiten bis heute darbietet, auf wenig über 300 Seiten in lückenloser Weise zu behandeln und ein wirklich übersichtliches Bild zu entwerfen, in dem auch die den Fachmann interessierenden Details deutlich zu erkennen sind, zeigt von einer souverainen Beherrschung des Stoffes und einer kaum zu übertreffenden Gewandtheit der Darstellung. Möge das lehrreiche Buch auch den Lesern dieser Zeitschrift Genuß und Nutzen bringen.

München. A. v. BRAUNMÜHL.

# Neuerschienene Schriften.

**Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.**

## Autoren-Register.



### a) Zeitschriften. Allgemeines.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8⁰. [1
$5_3$ (1904) : 4.

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8⁰. [2
1904 : 4.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik herausgegeben von E. Lampe. Berlin. 8⁰. [3
33 (1902) : 3.

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la société mathématique d'Amsterdam par P. H. Schoute, D. J. Korteweg, J. C. Kluyver, W. Kapteyn, J. Cardinaal. Amsterdam. 8⁰. [4
13 : 1 (avril — octobre 1904).

Atti del congresso internazionale di scienze storiche (Roma 1—9 aprile 1903). Volume XII. Atti della sezione VIII: storia delle scienze fisiche, matematiche, naturali e mediche. Roma 1904. [5
8⁰, XXIV + 333 S. — [10 lire.] — [Rezension:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 14, 1905, 136—137. (Krazer.)

**Eneström, G.**, Über kulturhistorische und rein fachmäßige Behandlung der Geschichte der Mathematik (1903). [Rezension:] Congresso intern. di sc. storiche 1903, Atti 12, 1904, 215—216. (G. Loria.) [6

**Lazzeri, G.**, Sull' utilità ed importanza della storia delle matematiche. Prolusione al corso libero di storia della geometria letto nell' università di Pisa il 14 gennaio 1905. [7

Periodico di matem. 20, 1905, 145—162.

**Cantor, M.**, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. — $1^2$ (1894). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, 407—409. (G. Eneström.) — $2^2$ (1900). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, 409—413. (G. Eneström.) — $3^2$ (1901). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, 413—414. (G. Eneström.) [8

***Úlehla, J.**, [Geschichte der Mathematik.] 1. Prag 1901. [9

8°. — Czechisch. — [Rezension:] Časopis pro pěstov. matem. 33, 1904, 176.

**Zeuthen, H. G.**, Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert. Deutsche Ausgabe (1903). [Rezension:] Arch. der Mathem. $8_3$, 1904, 248—252. (M. Cantor.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 7, 1904, 113—115. (G. L.) — Congresso intern. di sc. storiche 1903, Atti 12, 1904, 216—217 (G. Loria.) — Götting. gelehrte Anzeigen 1905, 83—88. (A. von Braunmühl.) [10

**Sturm, A.**, Geschichte der Mathematik (1904). [Rezension:] Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, 417—420. (G. Eneström.) — Deutsche Literaturz. 26, 1905, 243—244. [11

**Tropfke, J.**, Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. 1—II (1902—1903). [Rezension:] L'enseignement mathém. 7, 1905, 167—171. (H. Suter.) — Naturw. Rundschau 19, 1904, 152—153. (E. Lampe.) [12

***Cunnington, S.**, The story of arithmetic. Short history of its origin and development. London, Sonnenschein 1904. [13

12°, 256 S. — [2 sh.] — Mit einem Vorwort von W. H. H. Hudson.

***Fabinger, Fr.**, [Über die Entwickelung des Zahlenbegriffs, der Zahlwörter und der Zahlzeichen.] [14

Časopis pro pěstov. mathem. 33, 1904, 74—93, 198—209, 297—307. — Czechisch.

**Vacca, G.**, Sulla storia della numerazione binaria. [15

Congresso intern. di sc. storiche 1903, Atti 12, 1904, 63—67.

**Picard, E.**, Sur le développement de l'analyse mathématique et ses rapports avec quelques autres sciences. Conférence faite au congrès des arts et sciences de Saint-Louis (1904). [16

Bullet. d. sc. mathém. $28_2$, 1904, 267—278, 282—296. — [Englische Übersetzung durch G. B. Halsted:] Science $20_2$, 1904, 857—872. — [Auszug:] Mathesis $5_3$, 1905, 41—42.

**Picard, E.**, Sur le développement de l'analyse et ses rapports avec diverses sciences. Conférences faites en Amérique. Paris, Gauthier-Villars 1905. [17

8°, (5) + 167 + (1) S. — [3.50 fr.] — Abdruck dreier Vorlesungen aus dem Jahre 1899 und einer Vorlesung aus dem Jahre 1904 (siehe den vorangehenden Titel).

**Darboux, G.**, Etude sur le développement des méthodes géométriques, lue le 24 septembre 1904 au congrès des sciences et arts à Saint-Louis. [18

Bullet. d. sc. mathém. $28_2$, 1904, 234—263.

**Loria, G.**, Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Deutsche Ausgabe (1902). [Rezension:] L'enseignement mathém. 7, 1905, 77—83. (A. Buhl.) [19

**Braunmühl, A. von**, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. I—II (1900—1903). [Rezension:] Götting. gelehrte Anzeigen 1905, 67—77. (P. Stäckel.) — Monatsh. für Mathem. 16, 1905; Lit.-Ber. 19. (R. v. St.) — Revue génér. d. sc. 15, 1904, 77. [20

**Dannemann, F.**, Grundriß einer Geschichte der Naturwissenschaften. II. Aufl. 2 (1903). [Rezension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 35, 1904, 546—548. (K. Weiss.) [21

***Mach, E.**, Die Mechanik in ihrer Entwickelung historisch-kritisch dargestellt. Fünfte verbesserte und vermehrte Auflage. Leipzig, Brockhaus 1904. [22

8°, XVI + 561 S. — [8 Mk.]

**Duhem, P.**, L'évolution de la mécanique (1903). [Rezension:] L'interméd. d. mathém. 11, 1904; Supplement XX. (A. G.) — [Polnische Übersetzung durch S. Dickstein:] Wiadomości matem. 8, 1904, 1—27, 191—286. [23

**Duhem, P.**, Les origines de la statique. [24

*Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. $7_3$, 1905, 96—149.

***Burckhardt, F.**, Zur Geschichte des Thermometers. [25

*Basel*, Naturf. Ges., Verhandl. 16, 1903, 1—69.

***Frischauf, J.**, Grundriss der theoretischen Astronomie und der Geschichte der Planetentheorien. Zweite vermehrte Auflage. Leipzig, Engelmann 1903. [26

8°, XV + 199 S. — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 26, 1905, 303.

**Almagià, R.**, Sulla dottrina della marea nell' antichità classica e nel medio evo. [27

Congresso intern. di sc. storiche 1903, Atti 12, 1904, 151—164.

**Müller, F.**, Über mathematische Zeitschriften. [28

Congresso intern. di sc. storiche 1903, Atti 12, 1904, 105—113.

**Ahrens, W.**, Scherz und Ernst in der Mathematik (1904). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. $29_2$, 1905, 32—33. (G. D.) [29

**Hayashi, T.,** A brief history of the Japanese mathematics. [30
*Amsterdam*, Wisk. genoots., Nieuw archief $6_2$, 325—361.

**Harzer, P.,** Die exakten Wissenschaften im alten Japan. Rede gehalten an der Christian-Albrechts-Universität den 27. Januar 1905. Kiel, Lipsius 1905. [31
8°, 39 S.

b) Geschichte des Altertums.

**Lazzeri, G.,** Sull' origine del nostro sistema di numerazione scritta. [32
Supplemento al periodico di matem. 8, 1904, 3—7.

**Fazzari, G.,** Breve storia dell' aritmetica e dell' algebra nei tempi antichi. [33
Il Pitagora 11, 1904—1905, 14—19, 55—58.

***Schack-Schackenburg, H.,** Nr. 60 des Mathematischen Handbuches. [34
Zeitschr. für ägyptische Sprache 41, 1904.

***Schiaparelli, G.,** Die Astronomie im Alten Testament. Übersetzt von W. Lüdtke. Giessen, Ricker 1904. [35
8°. — [3.20 Mk.]

***Manitius, K.,** Fixsternbeobachtungen des Altertums. [36
Das Weltall 1904.

**L[azzeri], G.,** I calcoli numerici degli antichi Greci. [37
Supplemento al periodico di matem. 8, 1905, 33—37.

**Tannery, P.,** A propos des fragments Philolaïques sur la musique. [38
Revue de philologie (Paris) $28_2$, 1904, 233—249.

**Tannery, P.,** Inauthenticité de la „division du canon" attribuée à Euclide. [39
*Paris*, Acad. d. belles-lettres, Comptes rendus 1904, 439—445.

**Vallati, G.,** La dimostrazione del principio della leva data da Archimede nel libro primo sull' equilibrio delle figure piane. [40
Congresso intern. di sc. storiche 1903, Atti 12, 1904, 243—249.

***Voigt, M.,** Die offiziellen Bruchrechnungssysteme der Römer. [41
*Leipzig*, Sächs. Ges. d. Wiss., Verhandl. (Phil. Kl.) 56, 1904.

c) Geschichte des Mittelalters.

**Curtze, M.,** Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance (1902). [Rezension:] Journ. d. savants 1904, 457—470. (P. Tannery.) [42

**Tannery, P.,** Sur l'auteur d'un texte algorithmique du 12e siècle publié par Curtze. [43
Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, 416. — Antwort auf eine Anfrage.

**Duhem, P.,** Un ouvrage perdu cité par Jordanus de Nemore: le Philotechnes. [44
Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, 321—325.

**Eneström, G.,** Woher hat Leonardo Pisano seine Kenntnisse der Elementa des Euklides entnommen? [45
Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, 414—415. — Anfrage.

***Hümer, A.,** Zur Einführung des indisch-arabischen Zahlensystems in Frankreich und Deutschland. [46
Zeitschr. für die österreich. Gymnasien 55, 1904.

**Wegener, A.,** Die Alfonsinischen Tafeln für den Gebrauch eines modernen Rechners. Berlin 1905. [47
8°, 63 + (1) S. + 2 Taf. — Inauguraldissertation. — Nur zum Teil historischen Inhalts.

**Diamilla-Muller, D.,** Erronea credenza popolare sull' invenzione della bussola. [48
Congresso intern. di sc. storiche 1903, Atti 12, 1904, 267—270.

**Günther, S.,** Lo sviluppo del celebre strumento astronomico-geodetico nominato Jacobstab, ovvero Radius astronomicus. [49
Congresso intern. di sc. storiche 1903, Atti 12, 1904, 187—189.

**Favaro, A.,** Nuove ricerche sul matematico Leonardo Cremonese. [50
Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, 326—341.

**Pittarelli, G.,** Intorno al libro „de prospectiva pingendi" di Pier dei Franceschi. [51
Congresso intern. di sc. storiche 1903, Atti 12, 1904, 251—266.

d) Geschichte der neueren Zeit.

**Cantor, M.,** Hieronymus Cardanus. Ein wissenschaftliches Lebensbild aus dem XVI. Jahrhunderte. [52
Congresso intern. di sc. storiche 1903, Atti 12, 1904, 31—43.

**Tonni-Bazza, V.,** Frammenti di nuove ricerche intorno a Nicolò Tartaglia. [53
Congresso intern. di sc. storiche 1903, Atti 12, 1904, 293—307 + Porträt.

**Tannery, P.,** Sur l'histoire des mots analyse et synthèse en mathématique. [54
Congresso intern. di sc. storiche 1903, Atti 12, 1904, 219—229.

**Hasselberg, B.,** Einige Bemerkungen über Tycho Brahes „Astronomiae instauratae mechanica, Wandesburgi 1598". [55
*Leipzig*, Astron. Ges. Vierteljahrsschr. 39, 1904, 180—187.

**Bosmans, H.,** La méthode d'Adrien Romain pour effectuer les calculs des grands nombres. [56
*Bruxelles*, Soc. scient., Annales 28 : 2, 1904. 19 S.

**Bosmans, H.,** Note sur la trigonométrie d'Adrien Romain. [57
Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, 342—354.

**Bosmans, H.,** Trois ouvrages célèbres d'Adrien Romain. [58
*Bruxelles*, Soc. scient., Annales 29, 1905. 12 S.

**Klug, J.,** Simon Marius aus Gunzenhausen und Galileo Galilei. Ein Versuch zur Entscheidung der Frage über den wahren Entdecker der Jupitertrabanten und ihrer Perioden. [59
*München*, Akad. d. Wiss., Abhandl. 22 (Mathem. Cl.), 385—526.

Le opere di Galileo Galilei. Edizione sotto gli auspicii di sua maestà il re d'Italia. Volume XIV—XV. Firenze, Barbera 1904. [60
4°, 469 + (1) S.; 393 + (1) S. — Herausgegeben von A. Favaro.

**Favaro, A.,** Serie decimaquarta di scampoli Galileiani. [61
*Padova*, Accad. d. sc., Atti e memorie 21, 1905, 9—38.

**Favaro, A.,** Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. XII. Vincenzio Renieri. [62
*Venezia*, Istituto Veneto, Atti 64 : 2, 1904, 111—195. — Herr Favaro hat ermittelt, daß Renieri am 30. Mai 1606 geboren ist.

**Favaro, A.,** Cavalieri ed il teorema dell' area delle spirali. [63
Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, 416. — Antwort auf eine Anfrage.

**Loria, G.,** Un' impresa nazionale di universale interesse (pubblicazione delle opere di Evangelista Torricelli). [64
Congresso intern. di sc. storiche 1903, Atti 12, 1904, 23—27.

**Burckhardt, F.,** Jacobus Rosius, Philomathematicus, der mathematischen Künste besonderer Liebhaber. [65
*Basel*, Naturf. Ges., Vierteljahrsschr. 16, 1903, 376—387.

**Brocard, H.,** Louis de Pujet, François Lamy, Louis Joblot, leur action scientifique, d'après de nouveaux documents. Contribution à l'histoire des sciences physiques et naturelles de 1671 à 1711. Bar-le-Duc 1905. [66
4°, (2) + VIII + 232 S. + Facsim. + 2 Taf. — Auflage 125 Expl.

**Simon, M.,** Lunulae Hippocratis. [67
Arch. der Mathem. $8_3$, 1904, 269. — Es wird festgestellt, daß der allgemeine Satz über die Möndchen wenigstens schon 1683 von G. Pardies ausgesprochen werden ist.

**Braunmühl, A. von,** Beiträge zur Geschichte der Integralrechnung bei Newton und Cotes. [68
Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, 355—365. — Congresso intern. delle sc. storiche 1903, Atti 12, 1904, 271—284.

**Bosmans, H.,** Sur une soutenance de thèses présidée à Groningue par Jean Bernoulli, en 1701. [69
Revue des bibliothèques de Belgique 2, 1904, 464—467.

**Saccheri, G.,** Euclide emendato. Traduzione e note di G. Boccardini (1904). [Rezension:] Gaceta de matemáticas elementales 2, 1904, 183—184. (M. Vegas.) [70

**Hoffmann, E.,** Die Entwickelung der verschiedenen Probleme der Maxima der Anziehung. [71
Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, 366—397.

**Sauerbeck, P.,** Einleitung in die analytische Geometrie der höheren algebraischen Kurven nach den Methoden von J. P. de Gua de Malves (1902). [Rezension:] The mathem. gazette 3, 1904, 66. [72

**Müller, Conrad H.,** Studien zur Geschichte der Mathematik an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert (1904). [Rezension:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 13, 1904, 587. (P. Stäckel.) [73

**Mori, A.,** Il carteggio scientifico di Leonardo Ximenes. [74
Congresso intern. di sc. storiche 1903, Atti 12, 1904, 211—213.

**Meyer, W. Fr.,** Kant und das Wesen des Neuen in der Mathematik. [75
Arch. der Mathem. $8_3$, 1905, 287—305. — Aus dem Werke: „Zur Erinnerung an Immanuel Kant" (Halle a/S. 1904).

***Falter, L.,** Die erkenntnistheoretischen Grundlagen der Mathematik bei Kant und Fries. Gießen 1903. [76
8°, 71 S. — [2 Mk.]

***Schur, F.,** Johann Heinrich Lambert als Geometer. Karlsruhe, Braun 1905. [77
8°. — [0.60 Mk.]

**Zanotti-Bianco, O.,** I concetti moderni sulla figura matematica della terra. Appunti per la storia della geodesia. I. [78
*Torino*, Accad. d. sc., Atti 39, 1904, (sc. matem.) 539—565.

*La correspondance de A. Volta et M. van Marum, publiée par J. Bosscha. Leiden, Sijthoff 1905. [79
8°, XX + 203 S. — [7 Mk.] — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 26, 1905, 54—56. (E. Gerland.)

**Somigliana, C.**, Notizie sulla letteratura Voltiana. [80
Congresso intern. di sc. storiche 1903, Atti 12, 1904, 231—242.

***Brzozowski, S.**, Jan Śniadecki, życie i dziela. Warzawa 1904. [81
32°, 147 S. — [Rezension:] Wiadomości matem. 8, 1904, 327—328. (S. D.)

**Pierpont, J.**, The history of mathematics in the nineteenth century. Address delivered before the department of mathematics of the international congress of art and science, St. Louis, september 20, 1904. [82
*New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin $11_2$, 1904, 136—159.

**Macfarlane, A.**, Bibliography of quaternions (1904). [Rezension:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 13, 1904, 597. (G.) [83

**Gauss, C. F.**, Werke. Band IX (1903). [Rezension:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 14, 1905, 66—72. (Knopp.) [84

**Klein, F.**, Über den Stand der Herausgabe von Gauss Werken. Sechster Bericht. [85
*Göttingen*, Gesellsch. d. Wiss., Nachrichten 1904; Geschäftl. Mitt. 15—19.

**M[ansion], P.**, Gauss, sur l'existence du plan. [86
Mathesis $4_2$, 1904, 265—267.

**Bertrand, J.**, Eloge de Augustin-Louis Cauchy. [87
*Paris*, Acad. d. sc., Mémoires CLXXXIII—CCV.

Nicolas-Léonard Sadi Carnot [1796—1832]. [88
Nouv. ann. de mathém. $4_1$, 1904; Suppl. XXIV + Porträt.

**Padé, H.**, Barré de Saint-Venant et les principes de la mécanique. [89
Revue génér. d. sc. 15, 1904, 761—767.

**Darval, M.**, Vita di Giovanni Bolyai. [90
Congresso intern. di sc. storiche 1903, Atti 12, 1904, 45—49.

***Czuber, E.**, L. K. Schulz von Strassnitzki. Zur hundertsten Wiederkehr seines Geburtstages. [91
Zeitschr. für Realschulwesen (Wien) 28, 1903. 14 S.

**Königsbarger, L.**, Carl Gustav Jakob Jacobi. Festschrift (1904). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. $28_2$, 1904, 300—301. (J. T.) [92

**Müller, F.**, Karl Schellbach. Rückblick auf sein wissenschaftliches Leben, nebst zwei Schriften aus seinem Nachlaß und Briefen von Jacobi, Joachimsthal und Weierstrass. Leipzig, Teubner 1905. [93
8°, 86 S. + Porträt. — Sonderabdruck aus den „Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften" 20. — [Résumé:] *Berlin*, Mathem. Ges., Sitzungsber. 4, 1905, 8—10. (F. Müller.)

***Friedländer, S.**, Julius Robert Mayer. Leipzig, Thomas 1905. [94
8°, (6) + 210 S. + Porträt.

**Egoroff, D. Th. et Mlodziejowski, B. K.**, Notice sur K. M. Peterson. [95
*Toulouse*, Fac. d. sc., Annales $5_2$, 1904, 459—479. — Übersetzung aus dem Russischen durch E. Davaux (vgl. Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, 92).

Correspondance d'Hermite et de Stieltjes publiée par les soins de B. Baillaud et H. Bourget. Tome I (1882—1889). Paris, Gauthier-Villars 1905. [96
8°, XX + (1) + 477 S. + 2 Porträts. — [16 fr.] — Mit einem Vorwort von E. Picard.

***Maatz, A.**, Zur Geschichte der Polyederkoordinaten. Rostock 1903. [97
4°, 44 S. — [2 Mk.]

**Lampe, E.**, Das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Rückblick und Ausblick. [98
Congresso intern. di sc. storiche 1903, Atti 12, 1904, 97—104. — [Wieder abgedruckt:] Jahrb. über die Fortschr. d. Mathem. 33 (1902), 1905, LXIX—LXXV.

**Fiske, Th. S.**, Mathematical progress in America. Presidential address delivered before the American mathematical society december 29, 1904. [99
*New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin $11_2$, 1905, 238—246. — Science $21_2$, 1905, 209—215.

**Poincaré, H.**, L'état actuel et l'avenir de la physique mathématique. Conférence lue le 24 septembre 1904 au congrès d'art et de science de Saint-Louis. [100
Bullet. d. sc. mathém. $28_2$, 1904, 302—324. — [Englische Übersetzung durch G. B. Halsted:] The monist 14, 1905. 24 S.

**J. C. Poggendorffs** Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften. Vierter Band herausgegeben von A. J. von Oettingen (1904). [Rezension:] Naturwiss. Rundschau 19, 1904, 671. [101

Bulletin of the american mathematical society. General index 1891 — 1904, compiled by Emilie N. Martin. New York 1904. [102
8°, 79 S.

Lord Rayleigh. [103
Nature 70, 1904, 361—363 [mit Porträt.]

**Marcolongo, R.**, Per il quarantesimo d'insegnamento di Giovanni Garbieri. [104
Periodico di matem. 20, 1904, 118—122. — [Wieder abgedruckt:] Il Pitagora 11, 1905, 35—38.

**[Guimarães, R.,]** Gino Loria. [105
Gacota de matemáticas elementales 2, 1904, 149—152 [mit Porträt].

**Wölffing E.**, Abhandlungsregister [aus dem Gebiete der angewandten Mathematik] 1903. [106
Zeitschr. für Mathem. 51, 1904, 179—224.

## e) Nekrologe.

Joseph Louis François **Bertrand** (1822—1900). [107
*Paris*, Acad. d. sc., Mémoires 47, 1904, CCCXXI—CCCLXXXVI. (G. Darboux.)

Karl Anton **Bjerknes** (1825—1903). [108
Naturwiss. Rundschau 20, 1905, 25. (E. Lampe.)

Octave **Callandreau** (1852—1904). [109
Bulletin astronomique 21, 1904. (Janssen, Loewy, Lippmann, Villier.)

Luigi **Cremona** (1830—1903). [110
*Lucca*, Accad. d. sc., Atti 32, 1903. 5 S (A. Tonelli.) — *Milano*, Istit. Lombardo, Rendiconti $36_2$, 1903, 753—754. (G. Celoria.) — *München*, Akad. d. Wiss., Sitzungsber. 34, 1904, 249—252. (A. Voss.) — Annali di matem. $9_3$, 1904, 91—92. (G. Jung.)

C. G. **Erbiceanu** (1872—1904). [111
Gazeta matematica (Bukarest) 9, 1904, 173. (A. Davidoglou.)

Joseph David **Everett** (1831—1904). [112
Nature 70, 1904, 397.

Wilhelm Ferdinand **Fuhrmann** (1833—1904). [113
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 14, 1905, 56—60 [mit Porträt]. (L. Saalschütz.)

Josiah Willard **Gibbs** (1839—1904). [114
*Manchester*, Philos. soc., Proceedings 48, 1904, XXX. — *München*, Akad. d. Wiss., Sitzungsber. 34, 1904, 245—248. (C. Voit.)

Prosper **Henry** (1849—1903) [115
*Paris*, Acad. d. sc., Comptes rendus 137, 1903, 375. (Janssen.) — Bulletin astronomique 21, 1904. (Ch. Adam, Laussedat, Callandreau, Trépied.)

Charles **Hermite** (1822—1901). [116
Nouv. ann. de mathém. $5_4$, 1905, 49—53 [mit Porträt]. (P. Painlevé; aus der Zeitschrift „La nature" 1901.)

Karol **Hertz** (1842—1904). [117
Wiadomości matem. 8, 1904, 338.

Erich **Hoffmann** (1881—1903). [118
Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, 366. (A. Wangerin.)

Ronald William Henry Turnbull **Hudson** (1876—1904). [119
L'enseignement mathém. 6, 1904, 484. — Nature 70, 1904, 533.

Karl **von Ott** (1835—1904). [120
L'enseignement mathém. 6, 1904, 484.

François **Perrier** (1833—1888). [121
*Paris*, Acad. d. sc., Mémoires 47, 1904, CDXXXV—CDLXXIV. (G. Darboux.)

Joseph **Perrotin** (1845—1904). [122
Nature 69, 1904, 468.

George **Salmon** (1819—1904). [123
*Manchester*, Philos. soc., Proceedings 48, 1904, XXXI—XXXII.

Wilhelm **Schell** (1826—1904). [124
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 14, 1905, 113—121 [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. (J. Lüroth.)

Chajim Selig **Slonimski** (1810—1904). [125
Wiadomości matem. 8, 1904, 337—338.

Franz Josef **Studnička** (1836—1903). [126
Časopis pro pěstov. matem. 32, 1903, 297; 33, 1904, 369—480. (A. Pánek.)

Peter Guthrie **Tait** (1831—1901). [127
L'enseignement mathém. 7, 1905, 5—10. (J. S. Mackay.)

Paul **Tannery** (1843—1904). [128
Favaro, A., *Nota commemorativa letta alla r. accademia di scienze, lettere ed arti in Padova, nell' adunanza del 15 gennaio 1905.* Padova 1905. 8°, 10 S.
*Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. $7_3$, 1905, 352. (J Thirion.) — L'enseignement mathém. 7, 1905, 51—52. (H. Fehr.) — Revue de la philosophie 1905. 15 S. (P. Duhem.) — Revue génér. d. sc. 16, 1905, 97—99.

Ludwig **von Tetmajer** (1850—1905). [129
L'enseignement mathém. 7, 1905, 147.

François Félix **Tisserand** (1845—1896). [130
*Paris*, Acad. d. sc., Mémoires 47, 1904, CCLX—CCLXXXII. (J. Bertrand.)

Wojciech **Urbański** (1820—1903). [131
Wiadomosci matem. 8, 1904, 145—150 [mit Porträt]. (I. Zakrzewski.)

Wilhelm **Weiss** (1859—1904). [132
Monatsh. für Mathem. 16, 1905, 3—6. (E. Waelsch.)

Eduard **Weyr** (1852—1903). [133
Časopis pro pěstov. mathem. 33, 1904, 1.

## f) Aktuelle Fragen.

**Dyck, W. von**, Einleitender Bericht über das Unternehmen der Herausgabe der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. [134
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 13, 1904, 531—545. — Aus der „Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften" I, Heft 8.

**Tannery, P.**, Propositions ayant pour but d'activer le progrès de l'histoire des sciences. [135
Congresso intern. di sc. storiche 1903, Atti 12, 1904, 7—13.

**Eneström, G.**, Ein neues literarisches Hilfsmittel zur Verbreitung mathematisch-historischer Kenntnisse. [136
Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, 398—406.

**Braunmühl, A. von**, Le séminaire d'histoire des mathématiques à l'école polytechnique de Munich. [137
L'enseignement mathém. 7, 1905, 65—66.

**Barduzzi, G., Giacosa, P., Loria, G.,** In qual modo ed in quale misura la storia delle scienze matematiche, fisiche, naturali e mediche possa costituire oggetto di un corso universitario. [138
Congresso intern. di sc. storiche 1903, Atti 12, 1904, 15—21.

**Müller, F.,** Abgekürzte Titel von Zeitschriften mathematischen Inhalts (1903). [Rezensien:] Monatsh. für Mathem. 15, 1904; Lit.-Ber. 54—55. (L. H.) [139

**Lebon, E.,** Plan d'une bibliographie analytique des écrits contemporains sur l'histoire de l'astronomie. [140
Congresso intern. di sc. storiche 1903, Atti 12, 1904, 81—95.

**Mori A.,** Per una bibliografia geodetica italiana. [141
Congresso intern. di sc. storiche 1903, Atti 12, 1904, 167—169.

**Pringsheim, A.,** Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik (1904). [Wieder abgedruckt:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 13, 1904, 357—382. [142

**Lindemann, F.,** Lehren und Lernen in der Mathematik. Rede beim Antritt des Rektorats der Ludwig-Maximilians-Universität gehalten am 26. November 1904. München 1904. [143
4°, 32 S.

**Stäckel, P.,** Angewandte Mathematik an den preußischen Universitäten. [144
Monatschrift für höhere Schulen (Berlin) 3, 1904, 289—297.

**Stäckel, P.,** Angewandte Mathematik und Physik an den deutschen Universitäten. [145
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 13, 1904, 313—341.

**Stäckel, P.,** Die Notwendigkeit regelmäßiger Vorlesungen über Elementar-Mathematik an den Universitäten. [146
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 13, 1904, 524—530.

**Gutzmer, A.,** Über die auf die Anwendungen gerichteten Bestrebungen im mathematischen Unterricht der deutschen Universitäten. [147
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 13, 1904, 517—523.

**Fehr, H.,** Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens. [148
L'enseignement mathém. 6, 1904, 376—378.

[Internationaler Mathematiker-Kongress in Heidelberg 1904.] [149
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 13, 1904, 509—516. (L. Heffter.) — New York, Americ. mathem. soc. $11_2$, 1905, 191—217, 247—263. (H. W. Tyler, E. B. Wilson.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 7, 1904, 126. — Wiadomości matem. 8, 1904, 309—314. (S. Dickstein.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. 35, 1904, 566—584. (H. Schotten.)

[Mathematisch-historischer Kongress in Genf 1904.] [150
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 13, 1904, 574. — New York, Americ. mathem. soc., Bulletin $11_2$, 1904, 95—96. — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 7, 1904, 128. (G. Vailati.) — L'enseignement mathém. 6, 1904, 465—466, 470—476. (E. Lebon.)

[Mathematiker-Kongress in Saint-Louis 1904.] [151
L'enseignement mathém. 7, 1905, 52—54 (J. W. Young); 142—144.

[Deutsche Mathematiker-Versammlung in Breslau 1904.] [152
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 13, 1904, 561—569. (A. Gutzmer.) — New York, Americ. mathem. soc., Bulletin $11_2$, 1905, 263—268. (R. E. Wilson.) — L'enseignement mathém. 7, 1905, 56—58. — Naturwiss. Rundschau 19, 1904, 554—555. (R. Pyrkosch.)

[Englische Mathematiker-Versammlung in Cambridge 1904.] [153
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 13, 1904, 573. — New York, Americ. mathem. soc., Bulletin $11_2$, 1904, 28, 93—94. — L'enseignement mathém. 6, 1904, 403—404.

[Französische Mathematiker-Versammlung in Grenoble 1904.] [154
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 13, 1904, 573. — New York, Americ. mathem. soc. $11_2$, 1904, 94. — L'enseignement mathém. 6, 1904, 401—403.

[Amerikanische Mathematiker-Versammlung in Philadelphia 1904.] [155
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 14, 1905, 129. — New York, Americ. mathem. soc., Bulletin $11_2$, 1905, 315—319. (L. G. Weld.) — Science $21_2$, 1905, 174—178. (L. G. Weld.)

# Wissenschaftliche Chronik.

**Ernennungen.**

— Dr. Fr. Allan in Ithaca zum Professor der Physik an der Universität von Manitoba in Winnipeg (Canada).

— Privatdozent H. Benndorf zum Professor der Physik an der Universität in Wien.

— Dr. E. M. Blake in Berkeley znm Professor der Mathematik an der Universität von Arizona in Tucson.

— Privatdozent K. Böhm in Heidelberg zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— E. Borel in Paris zum Professor der Funktionentheorie an der Universität daselbst.

— W. D. Cairns znm Professor der Mathematik am „Oberlin college".

— Professor M. Cantone in Pavia zum Professor der Physik an der Universität in Neapel.

— Privatdozent B. Dessau in Bologna zum Professor der Physik an der Universität in Perugia.

— Professor M. Disteli in Straßburg zum Professor der Mathematik an der Technischen Hochschnle in Dresden.

— E. Doležal in Leoben zum Professor der Geodäsie und Markscheidekunst an der Bergakademie daselbst.

— Professor Fr. Dolezalek in Danzig zum Professor der physikalischen Chemie an der Universität in Göttingen.

— E. Doolittle in Philadelphia zum Professor der Astronomie an der Universität von Pennsylvania daselbst.

— Professor P. Drude in Gießen zum Professor der Physik an der Universität in Berlin.

— Privatdozent O. Eggert in Berlin zum Professor der Geodäsie an der Technischen Hochschule in Danzig.

— Professor T. C. Esty in Rochester zum Professor der Mathematik am „Amherst college".

— H. B. Evans in Philadelphia zum Professor der Mathematik an der Universität von Pennsylvania daselbst.

— Dr. Ph. Furtwängler in Potsdam zum Professor der Mathematik an der landwirtschaftlichen Akademie zu Poppelsdorf bei Bonn.

— E. D. Grant in Honghton zum Professor der Mathematik am „Michigan college of mines" daselbst.

— Professor H. V. Gummere am „Ursinus college" in Collegeville, Montgomery county, Pa. zum Professor der Mathematik am „Drexel institute" in Philadelphia.

— Dr. G. H. Hallett in Philadelphia znm Professor der Mathematik an der Universität von Pennsylvania daselbst.

— Professor L. Houllevigue in Caen zum Professor der Physik an der „Faculté des sciences" in Marseille.

— Privatdozent E. Jahnke in Berlin zum Professor der Mathematik an der Bergakademie daselbst.

— J. N. James zum Professor der Mathematik an der „Epworth university", Oklahoma, O. T.

— Dr. J. H. Jeans in Cambridge zum „university lecturer" der Mathematik an der Universität daselbst.

— Professor A. Kneser in Berlin zum Professor der Mathematik an der Universität in Breslau.

— Professor W. König in Greifswald zum Professor der Physik an der Universität in Gießen.

— Privatdozent J. Königsberger in Freiburg i/Br. zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Professor G. Kowalewski in Greifswald zum Professor der Mathematik an der Universität in Bonn.

— Professor F. Kurlbaum in Berlin zum Professor der Physik an der Technischen Hochschule daselbst.

— Dr. M. Lamotte in Clermont-Ferrand zum Professor der Physik an der „Faculté des sciences" daselbst.

— Professor G. Landsberg in Heidelberg zum Professor der Mathematik an der Universität in Breslau.

— Dr. D. N. Lehmer in Berkeley zum Professor der Mathematik an der Universität von California daselbst.

— Privatdozent H. Liebmann in Leipzig zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Professor F. London in Breslau zum Professor der Mathematik an der Universität in Bonn.

— Professor E. O. Lovett in Princeton zum Professor der Astronomie an der Universität daselbst.

— Professor O. Lummer in Berlin zum Professor der Physik an der Universität in Breslau.

— H. M. Macdonald in Cambridge zum Professor der Mathematik an der Universität in Aberdeen.

— Professor R. E. Moritz an der Universität von Nebraska zum Professor der Mathematik an der Universität von Washington, in Seattle, Wash.

— Professor E. Neumann in Breslau zum Professor der Mathematik an der Universität in Marburg.

— P. Painlevé in Paris zum Professor der Mechanik an der „Ecole polytechnique" daselbst.

— Privatdozent A. Pánek in Prag zum Professor der Mathematik an der böhmischen Technischen Hochschule daselbst.

— Professor H. Poincaré in Paris zum Professor der Astronomie an der „Ecole polytechnique" in Paris.

— Dr. G. Prasad zum Professor der Mathematik am „Muir central college" in Allahabad.

— Direktor Fr. Prochazka in Nachod zum Professor der darstellenden Geometrie an der böhmischen Technischen Hochschule in Brünn.

— Professor C. K. Russian in Krakau zum Professor der Mathematik an der Universität in Lemberg.

— Dr. P. L. Saurel in New York zum Professor der Mathematik am „College of the city of New York" daselbst.

— Professor G. Schmidt in Erlangen zum Professor der Physik an der Universität in Königsberg.

— K. Schmidt zum Professor der Mathematik an der Universität von Florida in Lake city, Florida.

— Professor F. Severi in Pisa zum Professor der Geometrie an der Universität in Parma.

— Privatdozent Skutsch in Braunschweig zum Professor der Mechanik an der Technischen Hochschule daselbst.

— Professor C. Somigliana in Pavia zum Professor der mathematischen Physik an der Universität in Turin.

— Professor P. Stäckel in Kiel zum Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Hannover.

— Dr. J. Stebbins an der Universität von Illinois zum Professor der Astronomie daselbst.

— Professor F. Streintz in Graz zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Dr. Stroobant in Brüssel zum Professor der Astronomie an der Universität daselbst.

— Privatdozent K. Th. Vahlen in Königsberg zum Professor der Mathematik an der Universität in Greifswald.

— Professor E. Warburg in Berlin zum Präsidenten der Physikalisch-technischen Reichsanstalt daselbst.

— Regierungsbaumeister M. Weber in Nikolassee bei Berlin zum Professor der Mechanik an der Technischen Hochschule in Hannover.

— Privatdozent A. Wehnelt in Erlangen zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— C. P. Weston an der Universität von Maine zum Professor der Mechanik daselbst.

— A. W. Whitney in Berkeley zum Professor der Mathematik an der Universität von California daselbst.

— Privatdozent J. Zenneb in Strassburg zum Professor der Physik an der Technischen Hochschule in Danzig.

— Professor K. Zsigmondy in Wien zum Professor der Mathematik an der deutschen Technischen Hochschule in Prag.

### Todesfälle.

— Ernst Abbe, früher Professor der Astronomie an der Universität in Jena, geboren in Eisenach den 23. Januar 1840, gestorben in Jena den 13. Januar 1905.

— J. M. Bacon, Verfasser auf dem Gebiete der Astronomie und Physik, gestorben den 25. Dezember 1904, 58 Jahre alt.

— Timoteo Bertelli, früher Direktor der Vatikanischen Sternwarte, geboren in Bologna den 26. Oktober 1826, gestorben in Florenz den 6. Februar 1905.

— Heinrich Bertram, früher Stadtschulrat in Berlin, gestorben in Berlin den 5. November 1904, 78 Jahre alt.

— H. C. DeMotte, Professor der Mathematik an der „Illinois Vesleyan university", gestorben den 16. Dezember 1904.

— Leander Ditscheiner, Professor der Physik an der Technischen Hochschule in Wien, geboren in Wien den 4. Januar 1839, gestorben daselbst den 1. Februar 1905.

— Miss Achsah Mount Ely, Professor der Mathematik am „Vassar college" in Poughkoepsie, N. Y., gestorben den 13. Dezember 1904.

— Adrien Féraud, Astronom an der Sternwarte in Bordeaux, geboren in Les Pennes den 19. November 1866, gestorben den 7. Januar 1905.

— Fredrik Emil Theodor Fogelmarck, früher Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Stockholm, geboren in Vestervik den 1. Januar 1833, gestorben in Stockholm den 28. Dezember 1904.

— François Jacques Philippe Folie, früher Direktor der Sternwarte in Brüssel, geboren in Venloo den 11. Dezember 1833, gestorben in Lüttich den 29. Januar 1905.

— Guido Hauck, Professor der darstellenden Geometrie an der Technischen Hochschule in Berlin, geboren in Heilbronn den 26. Dezember 1845, gestorben in Berlin den 26. Januar 1905.

— G. W. Hemming, Englischer mathematischer Verfasser, gestorben 1904, 80 Jahre alt.

— Paul Pierre Henry, Astronom an der Sternwarte in Paris, geboren in Nancy den 21. August 1848, gestorben den 4. Januar 1905.

— Immanuel Carl Volkmar Hoffmann, Begründer der „Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht", geboren zu Mauna bei Meissen den 24. Dezember 1825, gestorben zu Volkmarsdorf bei Leipzig den 22. Januar 1905.

— Corneille L. Landré, Versicherungsmathematiker, Verfasser verschiedener mathematischer Arbeiten, geboren in Utrecht den 31. August 1838, gestorben in Amsterdam den 10. Februar 1905.

— G. Lilley, Professor der Mathematik an der Universität von Oregon, gestorben den 8. Juni 1904, 68 Jahre alt.

— Frank Mac Clean, Spektralanalytiker, geboren in Belfast den 13. November 1837, gestorben in Brüssel den 8. November 1904.

— Miguel Martínez, Professor der Mathematik am „Instituto del cardenal Cisneros" in Madrid, gestorben in Madrid den 24. Oktober 1904.

— James Weir Mason, früher Professor der Mathematik am „College of the city of New York", gestorben in Easton, Pa., den 10. Januar 1905, 69 Jahre alt.

— David Murray, früher Professor der Mathematik am „Rutgers college", gestorben den 2. März 1905, 75 Jahre alt.

— Gottlieb Anton Müttrich, Professor der Physik und Meteorologie an der Forstakademie in Eberswalde, geboren in Königsberg den 23. Oktober 1833, gestorben in Eberswalde den 16. Dezember 1904.

— Paolo Paci, Professor der Mathematik an der höheren Handelsschule in Genna, geboren in Ameglia den 13. Mai 1847, gestorben in Genua den 19. November 1904.

— Schering, früher Professor der Mathematik an der Forstakademie in Münden, gestorben 1904, 70 Jahre alt.

— Josef Schram, Gymnasialprofessor, gestorben in Graz den 29. Januar 1905, 71 Jahre alt.

— Pietro Tacchini, früher Direktor des Observatoriums des „Collegio romano" in Rom, geboren in Modena den 21. März 1838, gestorben zu Spilamberto bei Modena im März (?) 1905.

— Ludwig von Tetmajer, Professor der technischen Mechanik an der Technischen Hochschule in Wien, geboren den 14. Juli 1850, gestorben in Wien den 31. Januar 1905.

— Robert Tucker, früher Lehrer der Mathematik an der „University-college-school" in London, geboren in Walworth den 26. April 1832, gestorben den 29. Januar 1905.

— Paul Uhlich, Professor der Geodäsie an der Bergakademie in Freiberg, geboren in Chemnitz den 22. April 1859, gestorben den 25. Januar 1905.

— Georg Henry With, englischer Astronom, gestorben 1904, 77 Jahre alt.

**Mathematisch-historische Vorlesungen.**

— An der Universität in Pisa hat Professor G. Lazzeri in diesem Jahre eine Vorlesung („corso libero") über Geschichte der Geometrie begonnen.

— Professor A. Macfarlane bas given this year (April 7—17) at the „Lehigh university" a course of six lectures on following British mathematicians of the nineteenth century: G. B. Airy [1801—1892], J. Ch. Adams [1819—1892], J. F. W. Herschel [1792—1871], I. Todhunter [1820—1884], D. F. Gregory [1813—1844], G. Green [1793—1841], G. Salmon [1819—1904].

**Gekrönte Preisschriften.**

— *Académie des sciences de Paris.* Un prix a été décerné en 1904 à M. M. Servant pour son mémoire sur la question: „Développer et perfectionner la théorie des surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution". — Des prix ont été décernés à MM. E. Borel et R. Bricard pour leurs mémoires sur la question: „Déterminer et étudier tous les déplacements d'une figure invariable dans lesquels les différents points de la figure décrivent des courbes sphériques".

**Preisfragen gelehrter Gesellschaften.**

— *Société scientifique de Bruxelles.* Concours pour 1905. Trouver les caractères distinctifs des maxima ou minima d'une fonction de trois variables $f(x, y, z)$, dans le cas où l'ensemble des termes du second ordre dans le développement de $f(a+h, b+k, c+l) - f(a, b, c)$ peut s'annuler sans changer de signe.

— *Académie des sciences de Danemark à Kjöbenhavn.* Concours de l'année 1905. Indiquer une règle de multiplication qui soit applicable aux *numérales* que T. N. Thiele a étudiées dans les Mémoires de l'académie des sciences de Danemark (Section des sciences $2_6$ [1886], p. 508) et moyennant laquelle on obtienne des produits (aussi bien que des sommes) présentant la même forme tridimensionale qui caractérise les facteurs; examiner ensuite si les théorèmes principaux de multiplication et de division y sont tous satisfaits. De plus il serait à souhaiter qu'on examinât si les dites *numérales* sont susceptibles d'une interprétation géométrique.

— *Real academia de ciencias exactas, fisicas y naturales de Madrid.* Concurso del año 1906. Calcular y disponer ordenadamente en tablas numéricas los valores de una ó varias funciones transcendentes, que sean de utilidad y uso frecuente en las aplicaciones de las ciencias matemáticas y que todavia non estén calculadas de este modo.

— *Circolo matematico di Palermo.* Premio internazionale di geometria. Il premio sarà conferito a una memoria che farà fare un progresso essenziale alla teoria delle curve gobbe algebriche.

— *Académie des sciences de Paris.* Concours de l'année 1906. Perfectionner, en quelque point important, l'étude de la

convergence des fractions continues algébriques. — Concours de l'année 1907. 1) Reconnaître d'une manière générale si les coordonnées des points d'une surface algébrique peuvent s'exprimer en fonctions abéliennes de deux paramètres, de telle sorte qu'à tout point de la surface corresponde plus d'un système de valeurs des paramètres (aux périodes près). Etudier en particulier le cas où l'équation de la surface serait de la forme $z^2 = f(x, y)$, $f$ étant une polynome, et donner des exemples explicites de telles surfaces. 2) Perfectionner, en un point important, le problème d'analyse, relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées, c'est-à-dire le problème de l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x, y)$$

avec les conditions que la fonction $u$ et sa dérivée suivant la normale au contour de la plaque soient nulles. Examiner plus spécialement le cas d'un contour rectangulaire.

### Vermischtes.

— An der deutschen Technischen Hochschule in Brünn hat sich Dr. Fr. Strunz als Privatdozent für Geschichte der Naturwissenschaften habilitiert.

— Un des prix de l'académie des sciences de Paris (prix Binoux, 2000 francs) sera décerné en 1905 à un auteur de travaux sur l'histoire des sciences.

# Die astronomischen Werke Alfons X.

Von ALFRED WEGENER in Berlin.

Inhaltsverzeichnis.



Als ich das Material zu meiner Arbeit: *Die ALFONSinischen Tafeln für den Gebrauch eines modernen Rechners*[1]) sammelte, sah ich mich genötigt, auch die geschichtlichen Daten über die astronomische Tätigkeit Königs ALFONS X von Castilien eingehender zu studieren, wobei sich die Angaben der gebräuchlichen Geschichtswerke bald als so dürftig und in manchen Punkten unzutreffend herausstellten, daß ich mich fast überall auf die in den Fachzeitschriften zerstreuten Abhandlungen und auf die alte Literatur zurückzugreifen genötigt sah. Hierdurch und durch das Bestreben, über die gesamte astronomische Tätigkeit Königs ALFONS ein möglichst zusammenhängendes Bild zu gewinnen, haben sich diese Untersuchungen viel weiter ausgedehnt, als es ursprünglich beabsichtigt war. Vielleicht werden daher die folgenden Zusammenstellungen für denjenigen, der eine eingehendere Untersuchung auf diesem Gebiete auszuführen beabsichtigt, als eine vorläufige Orientierung nicht ohne Nutzen sein.

An eine Lösung der Frage nach der Umrechnung oder Fälschung der ALFONSinischen Tafeln — dem dunkelsten Punkte des ganzen Materials — konnte ich wegen meiner geringen Erfahrung auf bibliographischem Gebiet nicht herantreten. Was ich hier tun konnte, ist das, daß ich auf einige Punkte der astronomischen Seite dieser Frage aufmerksam machte, denen man bisher wohl zu wenig Beachtung geschenkt hat.

1) Dissertation (Berlin 1905).

Einer eingehenden Erläuterung der Theorie und Einrichtung der Alfonsinischen Planetentafeln in der Form, wie sie im 15. und 16. Jahrhundert im Druck erschienen, glaubte ich mich entschlagen zu dürfen, wenngleich die bisher vorhandenen Erläuterungen, z. B. bei Delambre[1]) und Herz[2]) keineswegs befriedigen. Man findet indessen die Tafeln selbst in nur wenig geänderter Form und unter Beibehaltung der gesamten alten Terminologie nebst einer eingehenden Erläuterung ihrer Theorie in meiner obengenannten Schrift.

Ich kann nicht umhin, dem Leiter dieser Zeitschrift, Herrn Eneström, an dieser Stelle meinen Dank dafür auszusprechen, daß er mir die Fertigstellung dieser Abhandlung in der gegenwärtigen Form durch die liebenswürdige Angabe einer Reihe von neueren, das vorliegende Thema berührenden Arbeiten ermöglichte, ohne deren Berücksichtigung diese Abhandlung wohl kaum vor den Augen der Fachgenossen hätte bestehen können.

## 1. Das Zeitalter Alfons X.

Das Zeitalter Alfons X. gehört in kultureller Hinsicht zu den merkwürdigsten des ganzen Mittelalters. Vom 8. bis zum 11. Jahrhundert hatte Spanien unter der arabischen Herrschaft der Ommajaden, namentlich unter den Chalifen Abderrahman III. und Hakem II. eine Höhe der Kultur erreicht, welche es an die Spitze der gesamten damals bekannten Welt stellte. Es ist das Zeitalter, von welchem Whewell[3]) eine so begeisterte Schilderung gibt: „Zu dieser Zeit war es, und nicht, wie viele glauben, unter Ferdinand und Isabella, wo Amerika entdeckt wurde, zu jener ersten Zeit war es, daß Spanien sein wahrhaft goldenes Jahrhundert und die höchste Stufe seines Glanzes erreicht hatte. Damals goß Spanien, von arabischem Feuer erwärmt, sein geistiges Licht in reichen Strömen aus über das ganze übrige, in finsterer Nacht der Barbarei liegende Europa, und selbst über den fernen Osten, aus welchem dieses Licht zuerst gekommen war. Hier fügte der glänzende Hof der Ommajaden zu dem Rufe der Waffen noch den Ruhm der Kunst und Wissenschaft, und aus allen Teilen Europas, ja selbst aus den entferntesten Ländern Asiens wanderte man nach der Akademie von Cordova. Nie vielleicht wurde die Wissenschaft nnd jede Blüte des menschlichen Geistes höher geschätzt und mehr geehrt als am Hofe Hakems II., und der Ruf seiner Akademie zu Cordova ließ den der längst

1) *Histoire de l'astronomie du moyen âge*, S. 249.

2) *Geschichte der Bahnbestimmung von Planeten und Kometen*, II (Leipzig 1894), S. 38.

3) *Geschichte der induktiven Wissenschaften.* Deutsch von J. J. v. Littrow (Stuttgart 1840—1844)

verschollenen zu Alexandrien, ließ selbst den Ruf der kurz zuvor von HARUN und MAMUN gestifteten Hochschulen von Bagdad, Kufa, Bassora u. a. weit hinter sich zurück. Auch war zu keiner Zeit Spanien intelligenter und reicher und glücklicher, und nie waren daselbst die Finanzen, die Verwaltung, die Industrie, der innere und äußere Handel, der Landbau und selbst der Zustand der öffentlichen Straßen besser besorgt als in dieser glänzenden Zeit.“ Auch die Astronomie, die uns hier in erster Linie angeht, gelangte damals zu einer bedeutsamen Blüte. Am berühmtesten ist die Schule maurischer und auch jüdischer Astronomen geworden, die im 11. Jahrhundert in Toledo wirkte, und aus deren Händen die Toledanischen Planetentafeln hervorgingen.

Diese Blütezeit arabischer Kultur in Spanien war vorüber. Nachdem dem weiteren Vordringen der Mauren nach Europa ein Halt geboten war, fanden auch die Spanier die Kraft, sich gegen die Fremdherrschaft zu erheben, und nun folgte ein Jahrhunderte währendes Ringen dieser beiden Nationen, welchem die einst so stolze Kultur des Landes fast ganz zum Opfer fiel. Verschwunden sind heute jene berühmten Akademien, verschollen die großen Bibliotheken (HAKEMS Bibliothek soll 600000 Manuskripte enthalten haben!), und von den maurischen Prachtbauten, die damals Spanien schmückten, findet man nur noch spärliche Reste. Mit dem Landesfeinde jagte man auch seine Kultur zum Lande hinaus, ohne aber einstweilen imstande zu sein, eine eigene an deren Stelle zu setzen. Spanien sank damals so tief in die Barbarei zurück, daß die Araber verächtlich auf ihre Gegner herabsahen.

In dieser Zeit lebte ALFONS X. Es läßt sich kaum ein größerer Gegensatz denken als zwischen diesem Herrscher und seiner Zeit. Es unterliegt kaum einem Zweifel, daß ALFONS „der Weise“ oder „der Gelehrte“, wie man seinen schon in früher Jugend erworbenen Beinamen „el Sabio“ vielleicht am richtigsten übersetzt, manchen praktischen Anforderungen seines Herrschertums nicht gerecht zu werden verstand, allein sollen wir ihn deshalb tadeln? Gelang es ihm doch trotz aller kriegerischen und politischen Unruhen eine wenn auch kurze, so doch sehr bedeutsame Nachblüte jener einstigen maurischen Kultur zur Entfaltung zu bringen. Die außerordentliche Vielseitigkeit seiner wissenschaftlichen Interessen wird um so bewunderswerter, wenn man die zahllosen Mißgeschicke und Widerwärtigkeiten in Betracht zieht, in welche er außer durch die Kämpfe mit den Mauren auch durch seine bekannte Anwartschaft auf die deutsche Kaiserkrone während des Interregnums, namentlich aber durch die wiederholten Empörungen und Bürgerkriege im eigenen Lande verstrickt wurde, welche letzteren schließlich zu seiner Entthronung durch seinen eigenen Sohn führten. Um 1226 (nach anderen 1221) geboren, folgte ALFONS

seinem Vater Ferdinand am 1. Juni 1252 nach, erhielt 1257 von den deutschen Fürsten den Königstitel, ohne aber jemals deutschen Boden zu betreten, und wurde 1282 von seinem Sohn Sancho entthront und der Gotteslästerung angeklagt. Er starb 1284 zu Sevilla.[1])

Da fast alle Quellen, aus denen Alfons schöpfen konnte, maurischen Ursprungs waren, so trägt auch seine ganze Geisteskultur noch einen ausgeprägt maurischen Charakter. War doch noch der größte Teil der wissenschaftlichen Literatur in arabischen Manuskripten enthalten, und hatte man doch soeben erst begonnen, durch Übertragung derselben in die lateinische Gelehrtensprache sich die Werke der alten griechischen und römischen Literatur zugänglich zu machen. Ebenso wie einst das Zeitalter, in dem die Araber die Kultur der von ihnen unterjochten Völker in sich aufnahmen, ist auch diese Periode des Übergangs arabischen Wissens auf das Abendland durch eine an manchen Stellen in großartigem Stil betriebene Übersetzertätigkeit gekennzeichnet, wovon Suter in seinem Büchlein: *Die Araber als Vermittler der Wissenschaften in deren Übergang vom Orient zum Occident*[2]) ein anschauliches Bild entworfen hat. Eine solche Stelle bildete auch Alfons Hof, und die zahlreichen Übersetzungen arabischer Werke, die er ausführen ließ, zeugen von dem Anteil, den er an diesem Prozeß genommen hat. Freilich hatte diese Tätigkeit bei ihm eine besondere Färbung: er wollte offenbar seinem Volke eine Literatur in der Landessprache schaffen, welche diesem so sehr fehlte. Denn wie er auch in der Rechtsprechung statt der bisher üblichen lateinischen die Landessprache einführte, so sind auch alle Werke, die er selbst schrieb oder schreiben ließ, und alle Übersetzungen, die er ausführen ließ, in der altkastilianischen Sprache verfaßt. Ich habe keine einzige zuverlässige Nachricht finden können, daß Alfons irgend ein Werk in lateinischer Sprache schreiben ließ.[3]) Vielleicht mag hierin der Grund zu

1) Genauere Geschichtsangaben findet man in: Gaspar Ibañez, *Memorias historicas del Rei D. Alonzo el Sabio* etc., Madrid 1777, sowie: Joseph de Vargas y Pance, *Elogio del Rey D. Alonso el Sabio*, Madrid 1782. — Eine kurze Biographie gibt auch Hasse in: Ersch und Gruber, *Allg. Encycl. d. Wiss. u. Künste*, Band III, Leipzig 1819.

2) 2. Aufl., Aarau 1897.

3) Steinschneider berichtet freilich (*Hebr. Übers.* p. 579), daß die auf Alfons Befehl hergestellte kastilianische Version des astrologischen Werkes Abenragels *wiederum auf seinen Befehl* von Aegidius de Thebaldis und Petrus de Regio (Real) ins Lateinische übertragen sei, doch dürfte diese Notiz ungenau sein. Ebenso schreibt er (a. a. O. p. 525) vom *Tetrabiblos:* „die zweite Übersetzung des Textes (nämlich ins Lateinische) besorgte ... Aegidius de Thebaldis *auf Befehl Alfons* X. nach einer durch denselben Herrscher veranlaßten spanischen“. Mir kommen aber beide Angaben verdächtig vor, da in beiden Fällen die lateinische Übersetzung nach einer spanischen Version hergestellt wurde, welche letztere auf Alfons Befehl ausgeführt worden war, so daß der Gedanke an eine Verwechselung nahe liegt.

suchen sein, warum ALFONS so wenig ein Vermittler zwischen der maurischen Wissenschaft und dem Abendlande geworden ist, zu welcher Stellung er doch gleichsam geschaffen erschien, und daß seine zahlreichen Werke nur einen recht bescheidenen Einfluß auf die Geistesentwickelung der folgenden Jahrhunderte gewonnen haben. Nur in vereinzelten Fällen wurden sie über die Grenzen ihres Heimatlandes hinaus bekannt und ruhen zum größten Teil noch heute unbeachtet im Staube der spanischen Bibliotheken, ohne auch nur eine einzige Druckauflage erlebt zu haben. Freilich mögen hierzu auch noch andere Einflüsse beigetragen haben. Die unaufhörlichen, jahrhundertelangen Kämpfe mit den Arabern verbrauchten die besten Kräfte des spanischen Volkes. ALFONS X. Liebe zur Wissenschaft war eine seltene Ausnahme in jenen kriegerischen Zeiten, und was er in der Kürze eines Menschenlebens geschaffen, mußte unter solchen Umständen im Drange der kriegerischen und politischen Ereignisse bald wieder vergessen werden. Auch die furchtbaren Krankheiten, deren verheerender Einfluß auf die gesamte Kultur des Mittelalters gar nicht groß genug geschätzt werden kann (wie J. J. v. LITTROW in seiner Übersetzung von WHEWELLS oben zitierter Arbeit und an anderen Orten mit Recht hervorgehoben hat), namentlich der 1347 erschienene schwarze Tod, der Südeuropa und überhaupt die ganze damals bekannte Welt entvölkerte, sind hier zu nennen. Soll doch durch diese verheerende Krankheit, welcher auch ALFONS XI. im Jahre 1350 zum Opfer fiel, die Bevölkerungsziffer Spaniens auf den dritten Teil reduziert worden sein!

## 2. Alfons Werke.

Von den zahlreichen Werken, die unter dem Namen ALFONS X. genannt zu werden pflegen, stammt nur ein geringer Bruchteil aus seiner eigenen Feder, obwohl er auch den übrigen nie ganz ferngestanden hat, wie die zahlreichen Vorworte beweisen, die er selbst ihnen beigefügt hat. Er scheint bei diesen Werken, die auf sein Geheiß angefertigt wurden, nur eine Art Zensur ausgeübt zu haben. Von ihm selbst stammen drei Gedichte („El libro de las querellas", ferner „El libro de la vida y hechos de ALEXANDRO MAGNO", und das Gedicht „De las loores y milagros de nuestra Señora"). Ferner kennt man außer einem philosophischen Werk („El libro del tesoro") mehrere chemische oder alchemistische Schriften von ihm (z. B. „El candido"), auch werden eine Reihe von Geschichtswerken genannt, nämlich eine allgemeine Geschichte Spaniens („La historia general de España"), eine anscheinend davon verschiedene allgemeine Geschichte („Grande y general historia"), eine Geschichte der Kreuzzüge („La gran conquista de ultramar")[1]), und eine Geschichte der Kirche

1) Wurde 1503 zu Salamanca (Huns Scheffer) gedruckt.

(„Historia sagrada"). Desgleichen hat er außer einem anderen juristischen Werke („El fuero Real") auch eine nach ihren sieben Teilen benannte Gesetzsammlung („Las siete partidas") hinterlassen, welche dann im Jahre 1501 auf dem Reichstage zu Toro als das allgemeine Landrecht in Spanien bestätigt wurde und einen großen Ruf genoß.[1]) Um auch der Theologie zu gedenken, wird berichtet, Alfons habe das alte Testament in die kastilianische Sprache übersetzen lassen. Ferner ist ein Schiffahrtsbuch, und endlich ein prächtig illustriertes Spielbuch[2]) erhalten.

Das regste Interesse brachte aber Alfons unstreitig der Astronomie und wie es scheint auch der Astrologie entgegen. Sagt man doch, er habe in den Sternen seine Entthronung gelesen und sei dadurch hart und ungerecht geworden, was seinen Sturz beschleunigt habe. Auch ist bekannt, daß er angesichts der Komplikation der Ptolemäischen Planetentheorie den Ausspruch tat, der ihm bei seiner Entthronung eine Anklage wegen Gotteslästerung zuzog: wenn er bei der Erschaffung der Welt zu Rate gezogen wäre, so würde manches besser angeordnet sein.

Über die astronomischen Gelehrten, welche am Hofe Alfons tätig waren, ist ein Geschichtsschreiber des 14. Jahrhunderts, der Pater Romanus de la Higueira, an einer eigentümlichen Verwirrung schuld, welche man noch heutzutage in fast allen Geschichtswerken findet, obwohl Steinschneider bereits im Jahre 1848 den Irrtum berichtigt hat. In seiner Geschichte von Toledo[3]) berichtet der erstere nämlich von einem astronomischen Kongreß unter der Leitung Alfons X., an dem etwa 50 arabische, jüdische und christliche Astronomen aus aller Herren Länder teilgenommen hätten, von denen er eine ganze Reihe bei Namen zu nennen weiß. Er will diese Angaben aus Alfonsinischen Handschriften entnommen haben, die er selbst eingesehen hat. Richtig wird aber diese Schilderung erst dann, wenn man alle arabischen Namen streicht. Selbst wenn man nämlich nicht wüßte, daß diese Araber fast alle jahrhundertelang vor Alfons gelebt haben, so wäre es schon der politischen Lage nach so gut wie ausgeschlossen, daß am Hofe Alfons X. arabische Gelehrte tätig gewesen

1) Gedruckt zum erstenmal 1576 zu Salamanca, zum letztenmal 1758 zu Valencia unter dem Titel: *Leyes de las partidas*. 1836 hat die Akademie zu Madrid eine Ausgabe der *Opusculos legales* veranstaltet.

2) Dies wenig bekannte Werk, das kulturhistorisch nicht ohne Interesse sein dürfte, ist betitelt: „Iuegos diversos de axedrez, dados y tablas con sus explicationes, ordenados por mandado del Rey d. Alonso el Sabio". Siehe Joseph Rodriguez de Castro, *Biblioteca Española*, Madrid 1781, I p. 650.

3) P. Geronimo Roman de la Higueira, *Historia Eclesiastica de la imperial Ciudad de Toledo y su tierra* (Cap. XII des XXII. Buches), welche sich im Originalmanuskript (9 Bände in folio) in Madrid befindet.

seien. Die Sache hängt aber sehr einfach folgendermaßen zusammen: die astronomischen Werke des Königs ALFONS waren fast sämtlich Übersetzungen aus dem Arabischen, und daher sind in ihnen meist die Namen der älteren arabischen Autoren und die der jüdischen und christlichen Übersetzer genannt. Unserem Historiker ist hier nur das Versehen passiert, daß er auch die arabischen Namen unter die Zahl der ALFONSinischen Gelehrten aufnahm. Nach diesem Stückchen dürfen wir uns freilich nicht wundern, daß man nun auch seiner übrigen sehr detaillierten Schilderung von der Tätigkeit dieses Kollegiums etwas skeptisch gegenübersteht. Die Sicherheit seiner Darstellung hat freilich die Historiker von nicht weniger als sechs Jahrhunderten geblendet, und STEINSCHNEIDERS Klage, daß es noch immer nicht gelungen sei, diesen auch durch HUMBOLDTS *Kosmos* sanktionierten Irrtum auszurotten, ist nur allzu berechtigt. Man findet den betreffenden Passus von HIGUEIRA bei vielen spanischen Autoren im Urtext zitiert. NICOLAUS ANTONIUS Hispalensis[1]) gibt außerdem auch eine lateinische Übersetzung. Bei WEIDLER, DELAMBRE u. a. und sogar noch bei HOUZEAU und LANCASTER[2]) findet man wenigstens inhaltliche Auszüge.

Den wahren Sachverhalt hat aber, wie erwähnt, STEINSCHNEIDER bereits 1848[3]) aufgedeckt. Hiernach beschäftigte ALFONS eine Reihe jüdischer und christlicher Gelehrten, von denen den ersteren wohl im allgemeinen die eigentliche Übersetzung der arabischen Originale, den letzteren dagegen die sachgemäße Redaktion und Umarbeitung zufiel.

Über die astronomischen und astrologischen Werke, welche ALFONS auf diesem Wege aus dem Arabischen ins Spanische übersetzen ließ, herrschte bei den älteren Geschichtsschreibern infolge der Verstümmelung der arabischen Namen eine außerordentliche Konfusion, welche sich erst durch die Arbeiten neuerer Orientalisten gelichtet hat.

IBN EL-HAITHAMS „Weltkonstruktion" wurde auf ALFONS Befehl von dem jüdischen Arzt ABRAHAM DE BALMES ins Spanische übersetzt, woraus dann die handschriftlich erhaltene lateinische Übersetzung geflossen ist mit dem Titel: „Liber de mundo et coelo, de motibus planetarum etc. in partes duas distinctus, per ABRAH. Hebraeum iubente ALPHONSO Hispaniae rege de Arab. in Hispanum, postea ab anonymo quodam in Lat. versus, cum figuris, praeviis capitulorum elencho et ALPHONSI epistola".[4])

1) *Bibliotheca Hispana vetus*, Romae 1696.

2) *Bibliographie générale de l'astronomie*, Bruxelles 1887, I, p. 248.

3) *ALFONS X. astronomischer Kongreß und ISAK IBN SID;* Mag. f. d. Lit. des Ausl. 1848, S. 226, 230.

4) SUTER, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber u. ihre Werke.* Leipzig 1900, p 94; STEINSCHNEIDER, *Notice sur un ouvrage astronomique inédit d'IBN HAITHAM;* Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. 14, 1881, p. 721.

Das astrologische *Quadripartitum* oder *Tetrabiblos* des Ptolemäus, über dessen Echtheit man im Zweifel ist, wurde gleichfalls von einem unbekannten Übersetzer [Isaak ibn Sid?] auf Befehl Alfons ins Spanische übertragen [dann aus dem Spanischen ins Lateinische von Aegidius de Thebaldis].[1])

Die Nachricht, daß Isaak ibn Sid auf Alfons Geheiß den *Almagest* des Ptolemäus ins Spanische übersetzt haben soll,[2]) geben wir mit allem Vorbehalt wieder, denn wir vermuten mit Steinschneider,[3]) daß hier eine Verwechselung mit dem oben erwähnten *Quadripartitum* vorliegt, um so mehr, als bei Ibañez auch der spanische *Almagest* sodann durch Aegidius de Thebaldis ins Lateinische übersetzt sein soll[4]).

Die sogen. *Canones* des Albategnius oder al-Battani wurden wahrscheinlich von Isaak ibn Sid [bei Antonius Rabi Çag (= Isak) de Toledo] ins Spanische übersetzt.[5])

Das astrologische Werk Abenragels oder Ibn abi'l-Ridjals wurde 1256 von dem jüdischen Arzt Jehuda ben Mose Kohen auf Alfons Befehl ins Spanische übersetzt. Diese spanische Version wurde später wieder mehrmals ins Lateinische übertragen, in welcher Form dies Werk unter dem Titel: *Praeclarissimus liber completus in judiciis astrorum* etc. sehr bekannt wurde und mehrfach im Druck erschien.[6])

Außer diesen Übersetzungen ließ Alfons noch eine Reihe anderer anfertigen, welche über astronomische Instrumente handeln; die arabischen Originale sind mehrere Schriften von Zarkali, ferner Al-Sufi, Costa ben Luca, Ali ben Khalaf, Abûl-Kasim As'bag ibn as-Sam'h und „Iran" (so bei Alfons). Diese Übersetzungen ließ er im Jahre 1276 und 1277 zu einem zusammenhängenden und vollständigen Lehrbuch der astronomischen Instrumentenkunde unter dem Titel *Libros del saber de astronomia y de los instrumentos* zusammenstellen, zu welchem Ziele sie zum Teil umgearbeitet werden mußten.

Dieses Lehrbuch liegt uns in der fünfbändigen Prachtausgabe der Akademie zu Madrid unter dem Titel: *Libros del saber de astronomia del Rey D. Alfonso X de Castilla, copilados, anotados y commentados*

---

1) Steinschneider, *Hebr. Übers.* p. 525; Antonius, a. a. O.

2) Ibañez, a. a. O. Lib. VII, p. 453.

3) *Hebr. Übers.* p. 522 Anm. 158, wo übrigens merkwürdigerweise Aegidius de Thebaldis als der spanische Übersetzer genannt wird.

4) Vgl. auch Wüstenfeld, *Die Übersetzungen arabischer Werke ins Lateinische seit dem 11. Jahrhundert*, Göttingen 1877, p. 91.

5) Antonius, a. a. O.; Steinschneider, *Hebr. Übers.* p. 549, Anm

6) Steinschneider, *Hebr. Übers.* p. 579; Suter, a. a. O. p. 100.

*por Don* MANUEL RICO Y SINOBAS, Madrid 1863—1867[1]) vor. Da wir es im folgenden detailliert besprechen wollen, so können wir es an dieser Stelle übergehen.

ALFONS hat aber noch ein zweites, diesem ähnliches Sammelwerk zusammenstellen lassen, welches über Astrologie handelt. Der Titel dieses noch recht wenig untersuchten Werkes lautet zu deutsch: Das Buch von den Figuren und Sternbildern des Himmels und von den Einflüssen und Wirkungen, welche von ihnen auf die irdischen Körper hervorgehen, welches aus den Büchern der alten Philosophen zusammenstellen ließ der sehr hohe und verehrungswürdige Don ALPHONSO, der Diener (wörtlich: Liebhaber) der Wissenschaften und der Weisheit, durch Gottes Gnade König von Castilien etc.; Sohn des sehr verehrungswürdigen Königs Don FERNANDO und der Königin Donna BEATRIX; und es wurde begonnen im Jahre 1276 und beendigt im Jahre 1279, im 28. Jahre seiner Regierung.[2])

Dieses Werk zerfällt in 11 Teile, deren jeder eine Übersetzung darstellt, und zwar von

1. ABOLAYS (ABU'L-'AISCH?), „De la propriedad de las piedras". Dies Werk soll ursprünglich „caldäisch" geschrieben, dann von ABOLAYS ins Arabische übertragen sein. Diese arabische Version wurde von JEHUDA BEN MOSE KOHEN, einem der ALFONSinischen Gelehrten, ins Spanische übersetzt. Es handelt von 360 Gesteinen, welche nach Farbe, Häufigkeit, Fundort sowie Eigenschaften beschrieben werden, wobei letztere von dem ihnen zugeordneten Grad des Tierkreises sowie vom jeweiligen Stand der Sonne in demselben abgeleitet werden. Nach STEINSCHNEIDER (*Hebr. Übers.* p. 980) ist dieses Werk gemeinsam mit drei anderen ähnlichen „Lapidarien" von der Akademie zu Madrid herausgegeben worden (*Lapidario di Alonso*, 1881), wobei man aber den ganzen Prolog und Index des ALFONSinischen Sammelwerkes „de las formas et de las imagines", der doch zu dem einzelnen Buch nicht gehört, versehentlich mit abgedruckt hat.

Vermutlich haben die folgenden Bücher in ähnlicher Weise wie das

1) Band V, welcher ganz bibliographischen Untersuchungen gewidmet ist, wird nur als erste Hälfte des fünften Bandes bezeichnet und ist 1867 erschienen. Von einer Ergänzung ist mir nichts bekannt (vgl. HOUZEAU und LANCASTER, a. a. O., 1, S. 514).

2) Libro de las formas et de las imagines que son en los cielos et de las virtudes et de las obras que salen de ellas en los cuerpos que son de yuso de cielo, que mando componer de los libros de los Philosophos antiguos el mucho alto et honrado Don ALPHONSO amador de sciencias et de saberes por la gracia de Dios Rey de Castiella etc. fijo del muy honrado Rei Don FERNANDO et de la Reina Donna BEATRIS e se començo año de MCCLXXVI et se acabo año de MCCLXXIX. XXVIII año de su Reinado. — Ausführlichere Angaben über diesen Kodex findet man bei CASTRO, a. a. O I, p. 159.

vorangehende die Wirkung der Gestirne auf die irdische Welt beschrieben. Die Autoren sind: 2. Timtim (bei Steinschneider, *Hebr. Übers.* p. 856 auch Tomtom). 3. Pitagoras. 4. Yluz. 5. Belyenus und Yluz. 6. Plinius und Belyenus und andere Gelehrte. Man sieht aus diesen Angaben, daß auch hier, wie in dem Werk über die astronomischen Instrumente, die Übersetzungen nicht wörtlich sein können, sondern offenbar frei behandelt und bisweilen ganz umgearbeitet sind. 7. Utarit. 8. Ragiel; vielleicht das schon erwähnte astrologische Werk Abenragels, welches 1256 von Jehuda ben Mose Kohen ins Spanische übersetzt wurde, oder wenigstens ein Teil davon. 9. Yacoth. 10. Aly. 11. Kein Verfasser genannt.

Dies Sammelwerk, welches ein Gegenstück zu den *Libros del saber de astronomia y de los instrumentos* darstellt, ist abgesehen vom 1. Teil bisher nur als spanische Handschrift bekannt.

Das bekannteste nicht nur der astronomischen, sondern überhaupt aller Werke Alfons X, bilden aber die „tablas astronomicas", welche in den folgenden Jahrhunderten in lateinischer Übersetzung oder Umarbeitung als „tabulae Alfonsinae" eine außerordentliche Verbreitung gefunden haben. Man findet überall die Angabe, daß diese Tafeln im Jahre 1252 von den Alfonsinischen Astronomen unter der Leitung Isaak ibn Sid's vollendet worden seien, und manche Autoren fügen sogar hinzu, sie seien Alfons bei seiner Thronbesteigung am 1. Juni überreicht worden. Auch wird vielfach eines Berichts Erwähnung getan, nach welchem Alfons vier Jahre darauf (1256) die Tafeln habe umrechnen lassen, indem er statt der bisher verwendeten Trepidationstheorie die einfache Präzessionstheorie des Albategnius einführte, nach welcher die Längen der Fixsterne gleichförmig um 1° in 66 Jahren wachsen. Diese Dinge werden Gegenstand der folgenden Untersuchungen sein. Zur Orientierung will ich vorweg nehmen, daß nach meiner Meinung die Tafeln erst etwa im Jahre 1270 gemeinsam von Jehuda ben Mose und Isaak ibn Sid angefertigt wurden, nachdem diese eine Reihe von Jahren hindurch mit den Instrumenten, die ihnen Alfons zu diesem Zweck unter erheblichem Kostenaufwande[1]) anfertigen ließ, Beobachtungen angestellt hatten. Diese Beobachtungen dienten dazu, um diejenigen Bewegungen in den älteren Tafeln, welche mit dem Himmel nicht mehr in Übereinstimmung waren, zu rektifizieren, während die übrigen Konstanten, bei denen man keine Abweichung bemerkte, von älteren Werken [vermutlich den Toledanischen Tafeln] übernommen wurden. Der Bericht von der 1256 erfolgten Umrechnung beruht, wie später gezeigt

1) Erasmus Reinhold schreibt in der Einleitung seiner Prutenischen Tafeln: „Hunc (Alfonsum) scribunt . . . in tabularum constructionem contulisse quadringenta millia aureorum". Andere sind mit quadraginta zufrieden. — Es lohnt nicht, zu untersuchen, ob diese Nachricht zuverlässig ist.

werden soll, wahrscheinlich auf einer irrtümlichen Auslegung der Nachricht von der 1256 erfolgten Übersetzung des Fixsternverzeichnisses des AL-SUFI.

Das kastilianische Original dieser ALFONSinischen Tafeln ging in der Folgezeit verloren und dürfte während der ganzen Zeit, in welcher die Tafeln eine allgemeine praktische Verwendung fanden, vollkommen unbekannt gewesen sein. Ihre große Verbreitung gewannen sie erst in der lateinischen Bearbeitung des JOHANNES DE SAXONIA, der nach neueren Forschungen zu Beginn des 14. Jahrhunderts blühte. Was indessen zwischen jener ersten spanischen Redaktion und der lateinischen Ausgabe von JOHANNES DE SAXONIA mit den Tafeln geschehen ist, ist gegenwärtig noch in ein undurchdringliches Dunkel gehüllt. Von dem spanischen Original besitzen wir nämlich seit der Herausgabe der *Libros del saber de astronomia* etc von RICO wenigstens den Text, den RICO bei seinen umfangreichen bibliographischen Arbeiten in einem handschriftlichen Sammelband entdeckte, während allerdings die Tafeln selbst leider nach wie vor fehlen. Dieser Text genügt aber immerhin, um zu beweisen, daß das Original der Tafeln ganz anders gebaut war als diejenigen des JOHANNES DE SAXONIA, die uns ziemlich rein in den zahlreichen Druckauflagen des 15. und 16. Jahrhunderts vorliegen. Daher gewinnt nun die alte Überlieferung von einer Umrechnung der Tafeln eine ganz neue Gestalt.

Auch RICO ist dieser Widerspruch zwischen den lateinischen Tafeln und dem spanischen Original nicht verborgen geblieben, und er kommt durch seine Untersuchungen zu dem Schluß, daß eine Fälschung vorliegt. Leider scheint er aber in bezug auf das wahre Aussehen der originalen Tafeln einem Irrtum zum Opfer gefallen zu sein, denn er publiziert im Anschluß an den glücklich gefundenen originalen Text ein Tabellenwerk als das Original der gesuchten Tafeln, welches nichts weiter ist als eine jener „immerwährenden Ephemeriden", die auf der Tabulierung von Perioden beruhen, und eine zeitlang in der Astronomie des Mittelalters sehr gebräuchlich waren. Natürlich können diese Ephemeriden nichts mit den gesuchten Planetentafeln zu schaffen haben und passen überdies garnicht zu dem originalen Text, welcher ganz andere Tafeln voraussetzt.

Diese Angaben mögen für eine vorläufige Orientierung genügen. In den folgenden Untersuchungen werde ich eingehendere Belege dafür bringen.

Ich möchte hier gleich noch auf eine andere Konfusion hinweisen, die aber glücklicherweise so grob ist, daß ihr wohl keine lange Lebensdauer beschieden sein wird. Weil nämlich RICO im IV. Bande der *Libros del saber* den wirklich originalen Text und die vermeintlich originalen Zahlentabellen der ALFONSinischen Tafeln gegeben hat, haben einige Autoren geglaubt, ALFONS habe ein einziges großes Werk über Astronomie hinterlassen, zu dem die zahlreichen Bücher über die Instrumente (eins von diesen

nahmen sie dabei fälschlich für eine Darlegung der Planetentheorie) und auch die Tafeln gehörten, während doch beides ganz getrennte Werke sind. So hält Mädler[1]) die *Libros del saber* für eine „neue und vollständige Ausgabe der Alfonsinischen Tafeln"! In Newcombs populärer Astronomie[2]) liest man: „Alfons X läßt von zahlreichen Gelehrten eine Art neuen *Almagest*, die nach ihm genannten Alfonsinischen Tafeln konstruieren. Sie bilden einen Teil der ... *Libros del saber de astronomia* etc., die das Ptolemäische Werk in vielen Stücken verbessern und ergänzen". Aus einer ähnlichen Unklarheit entsprang auch wohl die Bemerkung bei Wolf[3]), die *Libros del saber* bildeten einen „förmlichen Kodex des astronomischen Wissens im 13. Jahrhundert", was schon deswegen nicht zutrifft, weil sie gar keine Planetentheorie enthalten, sondern nur über Instrumente handeln. Auch Herz muß hier genannt werden, der den *Libros del saber* wohl nicht so viel Platz in seiner *Geschichte der Bahnbestimmung*[4]) eingeräumt hätte, wenn er nicht die Beschreibung der Äquatorien für eine Darlegung der Planetentheorie gehalten hätte.

## 3. Das Lehrbuch von den astronomischen Instrumenten.

Das erwähnte Alfonsinische Sammelwerk über die astronomischen Instrumente hat niemals eine große Verbreitung erlangt. Bis zu seiner Herausgabe seitens der Akademie zu Madrid war es in der Geschichte der Astronomie zwar nicht gänzlich unbekannt, doch bestanden meist nur sehr unklare Vorstellungen über seine Existenz. Nicolaus Antonius (a. a. O.) teilt die Einleitung mit und konstatiert, daß dies Werk von den Tafeln verschieden sein müsse;[5]) Riccioli[6]) hat nur bei Egnatio Dante etwas über ein Alfonsinisches Werk von den Instrumenten gelesen, Weidler kennt es in seinem Hauptwerk, *Historia astronomiae*, gar nicht, und berichtet nur ganz kurz in seiner *Bibliographia astronomica*,[7]) daß Joh. de Roias und Nicolaus Antonius auf Alfonsinische Bücher über

1) *Geschichte der Himmelskunde* II, p. 351—360. Er nimmt dabei an, daß „die zahlreichen und meistens sehr ausführlich eingeteilten und bezifferten Kreise die Stelle der eigentlichen Tafeln vertreten". Übrigens kennt er nur Bd. I—III, so daß es für ihn noch leichter war als für die anderen, diesem Mißverständnis zu entgehen.

2) Deutsche Ausgabe von R. Engelmann (Leipzig 1881), p. 609.

3) *Handbuch der Astronomie* I, p. 16.

4) Teil II, p. 31—54. Siehe hierüber auch weiter unten.

5) „Hucusque praefatio, ex qua liquido apparet diversum hoc esse opus a Tabulis."

6) *Almagestum novum*, p. XXX.

7) Wittenbergae 1755, in den angefügten *Supplementa historiae astronomiae*, p. 14.

Instrumente Bezug nehmen. Bei BAILLY, DELAMBRE und den meisten anderen sucht man überhaupt vergebens nach unserem Werk. Nur CASTRO hat 1781 in seiner *Biblioteca Española*,[1]) die von seinen Zeitgenossen nicht die gebührende Beachtung gefunden zu haben scheint, einen längeren Auszug gegeben. Erst um die Mitte des 19. Jahrhunderts ist dieser ALFONSinische Kodex durch eingehende Quellenforschungen in Spanien von neuem entdeckt und, wie schon erwähnt, in den Jahren 1863—67 nebst den bibliographischen Untersuchungen RICOs von der Akademie der Wissenschaften zu Madrid publiziert worden. Aber auch in denjenigen Geschichtswerken der Astronomie, die nach dieser Publikation erschienen, ist der Inhalt dieses Werkes nur in sehr unbefriedigender Weise verarbeitet worden, und erst die Arbeiten neuerer Forscher haben hier einigermaßen Ordnung geschaffen.

Die Handschriften unseres Lehrbuches sind selten, und wenn wir RICO trauen dürfen,[2]) so gibt es nur zwei einigermaßen vollständige, von denen die eine das bekannte Manuskript von Alcala de Henarez ist, das als Grundlage für die Reproduktion in der Akademieausgabe benutzt wurde, während das andere (in der Vaticanischen Bibliothek) eine italienische Übersetzung darstellt, welche von NARDUCCI beschrieben worden ist.[3]) Außer diesen sind noch mehrere unvollständige spanische Handschriften sowie lateinische Übersetzungen einzelner Teile bekannt. Ohne hierauf näher einzugehen, verweisen wir hier auf die umfangreiche Aufzählung ALFONSinischer Handschriften im V. Bande der *Libros del saber*[4]) sowie auf STEINSCHNEIDER, *Etudes sur ZARKALI*[5]). Es sei noch erwähnt, daß die Kgl. Bibliothek zu Berlin in der Nr. Lat. qu. 23 ein lateinisches Manuskript besitzt, das eine (unvollständige?) Übersetzung des Lehrbuches zu sein scheint und wohl einer genaueren Untersuchung wert wäre.

Die Entstehung unseres Lehrbuchs von den Instrumenten hat sich anscheinend folgendermaßen abgespielt. Unter den zahlreichen anderen arabischen Werken über Astronomie ließ ALFONS auch einige Werke über

---

1) I, p. 117 ff.

2) *Libros del saber* V, p. 87.

3) *Intorno ad una traduzione italiana fatta nell'anno 1341 di una compilazione astronomica di ALFONSO X re de Castiglia*, Giorn. arcadico (Roma) **42**, 1864, p. 81—112; auch im Separatdruck.

4) Hier werden außer den Handschriften des Lehrbuchs sowie der Tafeln auch noch allerhand andere genannt, denen RICO ALFONSinischen Ursprung zuschreibt, z. B. auch die der Toledanischen Tafeln, welche, wie wir jetzt wissen, von der älteren maurischen Schule in Toledo, namentlich IBN SAÏD (nicht mit IBN SID zu verwechseln!) und ZARKALI herrühren. Siehe STEINSCHNEIDER, *Etudes sur ZARKALI* etc., Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **14**, 1881, p. 174, und SUTER, a. a. O. p. 107.

5) Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **17**, 1884.

astronomische Instrumente ins Spanische übersetzen, so z. B. 1255 die Schrift von ZARKALI über seine „Azafeha", 1256 AL-SUFI über die Fixsterne, und wahrscheinlich noch andere Werke über dasselbe Thema, 1259 KOSTA BEN LUKA über den Gebrauch des Globus. Später entstand dann der Plan, unter Benutzung dieser vorhandenen Übersetzungen und noch anderer, die erst auszuführen waren, ein Lehrbuch zusammenzustellen, in welchem alle gebräuchlichen astronomischen Instrumente beschrieben, abgebildet und ihr Gebrauch gelehrt wurde Zu diesem Ziele mußten also die vorhandenen Übersetzungen umgearbeitet werden, — bisweilen so, daß sie nun kaum noch als Übersetzungen betrachtet werden können —, eine Anzahl neuer Übersetzungen angefertigt werden, und außerdem noch einige Teile, für die man kein vorhandenes Werk benutzen konnte, von den ALFONSinischen Gelehrten selbst verfaßt werden.

Dieses Lehrbuch entstand in den Jahren 1276 und 1277 und bildet also nicht lediglich eine Reihe von zusammengehefteten Übersetzungen, sondern ein einheitliches Ganzes, an dem es uns manchmal schwer fallen würde, die arabischen Originale der einzelnen Teile festzustellen, wenn ALFONS diese nicht überall angegeben hätte. Das Zusammenschweißen der einzelnen Teile zu einem einheitlichen Ganzen ist zum größten Teil ALFONS eigene Arbeit, wie die zahlreichen von seiner Hand herrührenden Vorworte beweisen. Man wird gut tun, sich diese Verhältnisse vor Augen zu halten, um nicht in den Fehler zu verfallen, die Teile des Lehrbuches ohne weiteres durchweg als wörtliche Übersetzungen anzusehen. Andererseits ergibt sich hieraus, daß auch die ursprünglichen wörtlichen Übersetzungen wahrscheinlich noch gesondert als Manuskripte vorhanden sein dürften, wodurch vielleicht manche der „unvollständigen" Manuskripte ihre einfache Erklärung finden.

Die Tendenz bei der Organisation dieses Lehrbuches ging offenbar dahin, ein allgemeinverständliches Werk zu schaffen. Mehrmals lesen wir in den Einleitungen zu den einzelnen Büchern, daß ALFONS den Auftrag gab, sie so ausführlich abzufassen, daß der Leser nur dies Buch und kein anderes außerdem mehr nötig habe, um das betreffende Instrument zu bauen und es zu gebrauchen. Da es vor ALFONS X. eine wissenschaftliche Literatur in kastilianischer Sprache kaum gab, so konnte er in der Tat nicht wohl bei seinem Leser die Kenntnis anderer Werke voraussetzen. Durch dies Prinzip der Allgemeinverständlichkeit findet der oft sehr umständliche Stil eine Erklärung. Das ganze Werk zerfällt in ebensoviel Teile, als es Instrumente zu beschreiben gab. Eine Ausnahme hiervon bildet nur der erste Teil, der über die Fixsterne handelt. Allein bei näherer Betrachtung zeigt sich, daß er nur die notwendige Ergänzung zu dem folgenden über Konstruktion und Gebrauch des Himmelsglobus bildet

und wohl lediglich wegen seines großen Umfanges als ein besonderes Buch vorausgenommen wurde.

Bevor wir zur Besprechung der einzelnen Teile übergehen, geben wir noch eine Übersicht über den Gesamtinhalt:

1. 4 Bücher über die Sternbilder.
2. Das Buch vom Himmelsglobus.
3. Das Buch von den Armillen.
4. Das Buch vom sphärischen Astrolabium.
5. Das Buch vom ebenen Astrolabium.
6. Das Buch vom Ataçir.
7. Das Buch von der Universal-Lamina.
8. Das Buch von der Açafeha.
9. 2 Bücher von den Laminas der 7 Planeten (Äquatorien).
10. Das Buch vom Quadranten.
11. 5 Bücher von den Uhren:
    a) Sonnenuhr.
    b) Wasseruhr.
    c) Quecksilberuhr.
    d) Kerzenuhr.
    e) Stundentempel.

### Die vier Bücher über die Sternbilder.

Bei den älteren Geschichtsschreibern, wie Ibañez, Castro und anderen [1]) findet man die Nachricht, Jehuda ben Mose habe auf Befehl Alfons X. die astronomische Schrift Avicennas über die Fixsterne ins Spanische übersetzt. Andere Autoren, wie Antonius und Riccioli, bezeichnen Albohazen als Verfasser dieser Schrift, und fügen hinzu, Jehuda habe seine Übersetzung 1256 dem Könige vorgelegt, wodurch sich dieser zu der Präzessionstheorie des Albategnius bekehrt habe. Daran knüpft sich dann der weitere Bericht über die Umrechnung der Alfonsinischen Tafeln, von der wir weiter unten sprechen werden. Man war lange im Zweifel, wer eigentlich der arabische Autor dieses Werkes sei, bis wiederum Steinschneider [2]) den wahren Sachverhalt aufgedeckt hat. Nach ihm ist der wahre Verfasser Al-Sufi, dessen vollständiger Name nach Suter [3]) 'Abd-errahmân b. 'Omar, Abû'l-Hosein, el-Sûfî lautet (er lebte 903—986). Albohazen ist also korrumpiert aus Abû'l-Hosein, während die Angabe Avicenna falsch ist. Steinschneider erkannte auch sogleich, daß diese

1) Z. B. auch Basnage, *Histoire des Juifs* (Roterdam 1707) VII, p. 1770.

2) *Hebr. Übers.* p. 616; *Die Mathematik bei den Juden*, Biblioth. Mathem. 1896, p. 113.

3) a. a. O., p. 62 und 63.

in allen früheren Überlieferungen als gesondertes Werk angeführte Übersetzung mit dem ersten Teil unseres Lehrbuches über die Instrumente identisch sei, bei dem nicht angegeben ist, von welchem arabischen Original es übersetzt wurde, so daß hiermit auch diese Streitfrage in der befriedigendsten Weise ihre Lösung gefunden hat. Man hat sich seitdem gewöhnt, diese Alfonsinischen „vier Bücher über die Fixsterne“ kurzerhand als eine spanische Übersetzung des Werkes von Al-Sufi zu betrachten, doch ist meines Erachtens diese Anschauungsweise nicht ganz einwandsfrei. Al-Sufis Werk liegt uns ja in wortgetreuer französischer Übersetzung von Schjellerup seit 1874 vor,[1]) und wenn man diese mit unserer Alfonsinischen Schrift vergleicht, so finden sich doch sehr erhebliche Abweichungen. Ich stelle mir die Entstehung der Alfonsinischen Übersetzung folgendermaßen vor. Im Jahre 1256 übersetzte der mehrfach genannte Jehuda ben Mose Kohen gemeinsam mit einem christlichen Gelehrten, der bei Alfons Guillen Arremon Daspa genannt wird, verschiedene Werke über die Fixsterne ins Spanische, darunter sicher dasjenige Al-Sufis, vielleicht aber auch Ptolemäus und andere. Daß es sich jedenfalls um mehrere Werke handelt, scheint mir aus den Worten der Einleitung hervorzugehen, nach denen die in Frage stehenden vier Bücher von den genannten Gelehrten „aus dem Caldäischen und Arabischen“ ins Spanische übersetzt wurden. Daß eins von diesen Ptolemäus war, vermute ich wegen der überaus häufigen Anführung seines Namens. Sicher ist ferner, daß Alfons durch die Polemik des Al-Sufi gegen Ptolemäus und die Begründung seines Kataloges auf denjenigen des Menelaus unter Ausschaltung des Ptolemäischen, wobei die von al-Battani eingeführte Präzession von 1⁰ in 66 Jahren benutzt wird,[2]) zu eben diesem Prinzip bekehrt wurde und seinen Katalog ebenfalls auf Menelaus bezw. Al-Sufi gründete, wie sofort gezeigt werden wird. Diese wortgetreuen Übersetzungen wurden nun im Jahre 1276 in freier Weise verarbeitet, und zwar unter reger persönlicher Beteiligung Alfons selbst. Wir lesen darüber: „Und später brachte sie in Ordnung und ließ sie zusammenstellen der genannte König, und entfernte diejenigen Dinge, die er als überflüssig und doppelt erkannte, und die nicht in gutem Kastilianisch waren, und setzte diejenigen hinzu, die er als Vervollständigung betrachtete. Und in bezug auf die Sprache ordnete er sie selber allein. . . .“. Weiter heißt se, zur Unterstützung in den anderen Wissenschaften habe er dabei die beiden Christen Joan de Mesina und Joan de Cremona, und die beiden Juden

1) *Description des étoiles fixes composée au milieu du dixième siècle de notre ère par l'astronome persan Abd-al-Rahman al-Sufi. Traduction littérale* etc. *par H. C. F. C. Schjellerup* (St. Pétersbourg 1874).

2) Bei Schjellerup, a. a. O. p. 42 und 43.

JEHUDA und SAMUEL gehabt. Daß hier eine freie Umarbeitung vorliegt, dürfte schon daraus hervorgehen, daß ALFONS keinen bestimmten Autornamen nennt, was er gewiß getan haben würde, wenn das Werk in seinen Augen noch eine Übersetzung gewesen wäre. Der Wortlaut ist denn auch in der Tat zum aller größten Teil ein ganz anderer als bei AL-SUFI, und nur bei den sachlichen Aufzählungen der Sterne und ihrer Namen schimmert noch das Original hindurch. Man sucht z. B. auch vergebens nach der oben zitierten Auseinandersetzung AL-SUFIS über die Ableitung seines Katalogs aus dem des MENELAUS. Dagegen ist es freilich aus sachlichen Gründen um so sicherer, daß AL-SUFIS Werk in der Tat die hauptsächlichste Grundlage dieser freien Bearbeitung gebildet hat. Rechnet man nämlich AL-SUFIS Katalog unter Benutzung seiner Präzessionskonstante von 1° in 66 Jahren auf das Jahr 1256 um, so erhält man genau die ALFONSinischen Positionen, während dies vom Katalog des PTOLEMÄUS aus nicht gelingt. Wenn trotzdem über jeder Figurentafel die konstante Differenz 17° 8′ gegen PTOLEMÄUS angegeben ist, so ist dies offenbar (ebenso wie bei AL-SUFI) nur wegen der größeren Berühmtheit des PTOLEMÄischen Katalogs geschehen, während dieser in Wahrheit eliminiert ist.[1])

Die eigentümliche Anordnung des Materials, bei welcher die Längen und Breiten der Sterne nicht im Text gegeben sind, sondern in strahlenförmiger Anordnung das Bild der zugehörigen Konstellation umgeben, dürfte ALFONS Werk sein. Bei AL-SUFI findet sich nichts derartiges. Auch sind die Sternbilder selbst nicht wie bei AL-SUFI und in unseren heutigen Sternkarten dem unmittelbaren Anblick entsprechend, sondern als Spiegelbild desselben dargestellt, also in der Weise, wie sie auf einem Himmelsglobus gezeichnet zu werden pflegen, wodurch sich der Zusammenhang dieses Buches mit dem folgenden über den Himmelsglobus deutlich zu erkennen gibt. Übrigens liest man auch über jeder Figurentafel: „Und dies ist die Figur, wie sie auf dem Himmelsglobus erscheint, der auf arabisch ›alcora‹ heißt“.

Die Angaben dieser Figurentafel findet man in den lateinischen *Tabulae ALFONSinae* als Fixsternkatalog wieder. In einigen derselben ist sogar noch der Wortlaut erhalten, welcher also hier bei AL-SUFI, dem ALFONSinischen Lehrbuch und den gedruckten Tafeln abgesehen von der Längenreduktion noch vollkommen parallel geht. Bei ALFONS wird z. B. der Sirius folgendermaßen beschrieben: „Der, welcher im Maule ist. Und

1) Über den Sternkatalog des MENELAUS und sein Verhältnis zu dem PTOLEMÄischen siehe A. A. BJÖRNBO, *Hat Menelaus aus Alexandria einen Fixsternkatalog verfaßt?* Biblioth. Mathem. $2_3$, 1901, p. 196. Vgl. auch F. BOLL, *Die Sternkataloge des Hipparch und des Ptolemäus*, ibidem $2_3$, 1901, p. 185.

er ist sehr hell, und heißt »Axara Alemenia«, nach anderen »Alhaabor«. Länge 4° 48′ cancris, Breite 39° 10′, und ist 1. Größe. Und seine Natur ist vom Jupiter und ein wenig vom Mars, und ist heiß und weniger feucht". Die Ausgabe Venedig 1518 der Tafeln gibt: „Quae est in ore: et est in ultimitate luminis: et dicitur canis: et est aschere aliemeni alhabor. Longit: 1ˢ 34° 48′, latit: 39° 10′ merid., magnit: 1", und unter der Rubrik „naturae" ist ♃ angegeben. Endlich geben wir die entsprechende Stelle aus Schjellerups Übersetzung des Al-Sufi: „L'étoile qui est sur la bouche, très brillante, nommée le Chien, ou al-schira al-jamanija ou al-abûr. Longit.: 3ˢ 0° 22′, Lat: 39° 10′, Grand. 1."

Es sei noch erwähnt, daß Alfons auch die Längen und Breiten von 14 Sternen, welche auf sein Geheiß im Jahre 1260 in Toledo durch Beobachtung ermittelt wurden, in dies Buch über die Fixsterne mit aufgenommen hat. Sie werden im IV. Kapitel des letzten Buches mitgeteilt. In diesem letzten Buch befindet sich nur eine einzige Abbildung, welche in etwas schematischer Darstellung das Ptolemäische Astrolabium mit den 44 darin markierten Sternen darstellt, die auf diese Weise als Fundamentalsterne dienten.

Einen strittigen Punkt bildete schon im Mittelalter die Epoche dieses Alfonsinischen Katalogs. Nach unserer Darlegung ist sie offenbar 1256, also das Jahr, in dem Al-Sufis Werk von Jehuda übersetzt wurde. Diese Annahme würde auch, obwohl wir bei Alfons selbst keine Angabe darüber finden, ganz einwandfrei erscheinen, wenn nicht die gedruckten *Tabulae Alfonsinae*, die doch dieselben Längen geben, völlig einmütig als Epoche das Krönungsdatum Alfons X., den 1. Juni 1252 angäben, zu welchem Zeitpunkt die Tafeln auch vollendet sein sollen. Daß letzteres offenbar unrichtig ist, soll weiter unten gezeigt werden. Mir scheint aber auch, daß die Epoche gleichfalls unrichtig angenommen ist. Diesen Fehler erkannte auch bereits im 16. Jahrhundert Ritius in seinem Werk *De motu octaue sphere,*[1]) wo er im Kapitel 46 schreibt:[2]) „Revocata priore sententia, Albategnii sententiam complexus est (Alfonsus), et stellas fixas, quae hodie in Alphonsi tabulis locis suis descriptae visuntur, secundum hanc eandem sententiam locavit, scripsitque stellas continuato cursu semper ad ortum ferri; tempus autem radicum earundem stellarum est anni 1256, non 1252 sicut notant, qui priores Alphonsi Canones novis stellarum radicibus immiscuere". So weit ich gesehen habe, hat aber diese Be-

1) Der genaue Titel ist nach Björnbo, a. a. O. p. 197 Anm.: *Augustini Ritii de motu octaue sphere: opus mathematica atque philosophia plenum* ... Björnbo schließt, daß es 1517 verfaßt wurde. Die meisten Quellen geben: Paris 1521 (vgl. Eneström, Biblioth. Mathem. $3_3$, 1902, p. 328).

2) Zitiert nach Riccioli, *Almagestum novum*, p. 444.

richtigung von RITIUS nur die eine Wirkung gehabt, daß PASCAL HAMEL in seinen beiden Pariser Ausgaben der Tafeln vom Jahre 1545 und 1553 vor dem Fixsternkatalog schreibt: „Loca quae ab ALFONSO in his tabulis posita sunt, radicem habent ab anno 1256 teste AUGUSTINO RICCIO“, während er weiter keinerlei Rücksicht darauf nimmt. Übrigens waren dies die letzten Druckausgaben der Tafeln, und während der längsten Dauer der praktischen Wirksamkeit derselben hat also der 1. Juni 1252 — fälschlich — als die Epoche der Sternkatalogs gegolten. Wir werden später noch einmal auf diese Dinge zurückkommen müssen.

### Das Buch vom Himmelsglobus.

Diesen 2. Teil des Lehrbuches findet man am Schluß des 1. Bandes der *Libros del saber* etc. Im wesentlichen ist er die Übersetzung der Schrift des KOSTA BEN LUKA (bei ALFONS „COZTA“) über den Gebrauch des Himmelsglobus.[1]) Die wörtliche Übersetzung wurde am Donnerstag den 6. Februar 1259 gemeinsam von JEHUDA BEN MOSE und JOHANN D'ASPA fertiggestellt. Erst 18 Jahre darauf, im Jahre 1277, wurde es in der vorliegenden Form umgearbeitet und dem Sammelwerk einverleibt.

Die ersten vier Kapitel, welche von der Herstellung des Globus handeln, stammen nicht von dem arabischen Original, sondern sind von den ALFONSinischen Gelehrten verfaßt, während das arabische Original gleich mit der Beschreibung des fertigen Instruments beginnt. Obwohl die Herstellung des Globus mit einer peinlichen Sorgfalt geschildert wird, und das Kapitel 3 z. B. genau darüber Auskunft gibt, welche Farben man am besten für den Himmelsgrund und für die Sterne zu wählen, und welche Form man diesen selbst zu geben hat usw., so findet man nirgends die Zahlenangaben der Sternpositionen, welche doch zum Einzeichnen nötig sind, wodurch sich der Zusammenhang dieses Buches mit dem vorangegangenen deutlich zu erkennen gibt. Es folgt dann eine eingehende Anleitung zum Gebrauch und eine umfangreiche Sammlung von Aufgaben aus der mathematischen Geographie, welche mit Hilfe des Globus durch Einstellen gelöst werden. Man findet Aufgaben über die Drehungserscheinungen des Himmels in den verschiedenen Breiten, über Tageslänge, Polartag und Polarnacht und dergl. Das letzte Kapitel ist ein Zusatz, welcher auf ALFONS Geheiß von „XOSSE“ verfaßt worden ist, und enthält einige technische Ergänzungen, welche anscheinend den Globus für astrologische Einstellungen brauchbar machen sollen. Hierzu gehören auch einige Figuren, die einzigen in diesem Buche.

1) Siehe STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.* p. 552.

### Das Buch von den Armillen.

Das Vorwort dieses Buches rührt von ALFONS selbst her. Der erste Teil, welcher über die Herstellung des schon von PTOLEMÄUS verwendeten Instruments handelt, stellt offenbar die Übersetzung einer Schrift von ZARKALI dar, denn es beginnt mit der üblichen Formel: Es spricht der Gelehrte ABUÇACH AZARQUIEL. Damit stimmt die Angabe überein, welche ALFONS im Vorwort macht, daß er nämlich über den *Gebrauch* dieses Instruments kein Buch vorgefunden habe, das er hätte übersetzen lassen können, und daß er darum einem gewissen RABIÇAG den Auftrag gegeben habe, das Werk zu vervollständigen, und zwar in leichtfaßlicher Weise, so daß jeder nach dieser Anleitung das Instrument benutzen könne. Dieser RABBI ÇAG oder ISAK ist niemand anders als ISAAK IBN SID, der Hauptverfasser der ALFONSinischen Tafeln, wie wiederum STEINSCHNEIDER mit gewohntem Takt erkannt hat.[1])

Die Armillen bestehen aus einer Anzahl größter Kugelkreise, die konzentrisch zusammengefügt sind. Zuerst wird die Herstellung der einzelnen Kreise beschrieben und durch Abbildungen veranschaulicht. Dann folgt ein Kapitel über die Montierung des Instruments, zu welchem eine prächtig kolorierte Tafel gehört, die das ganze Instrument auf einem kleinen Steinpfeiler aufgestellt zeigt.

Der Gebrauch des Instruments ist ein sehr mannigfaltiger, weshalb es auch gelegentlich als „estrumente universalmientre" bezeichnet wird. Alle drei Systeme, Äquatorial-, Ekliptikal-, Horizontalsystem sind in ihm enthalten, und es sind direkte Ablesungen in ihnen möglich. Auch lassen sich außer direkten Augenbeobachtungen auch Schattenbeobachtungen ausführen, und endlich dient das Instrument auch als Rechenmaschine, um zahlreiche astronomische Aufgaben auf mechanischem Wege zu lösen. Es wird eine sehr umfangreiche Sammlung solcher Aufgaben gegeben, welche z. T. von ABEN MOHAD, PTOLEMÄUS, AL-BATTANI und HERMES herrühren. Auch kommen einige Hilfstabellen vor, welche in römischen Ziffern gegeben sind. — Da auch in dem später zu besprechenden originalen Text der Planetentafeln nur römische Ziffern vorkommen, so wird hierdurch der Gedanke nahe gelegt, es könnten auch die gegenwärtig unbekannten originalen Planetentafeln selbst römische Ziffern aufweisen.

### Das Buch vom sphärischen Astrolabium („astrolabio redondo").

Auch bei diesem Buche rührt das Vorwort von ALFONS selber her. Er sagt darin wieder, weil er kein Buch gefunden habe, welches über die

1) *Die Mathematik bei den Juden;* Biblioth. Mathem. 1896, p. 113.

Herstellung dieses Instruments handelte, habe Ibn Sid (wir behalten im folgenden gleich diese Schreibweise bei) den Auftrag gegeben, ein solches zu verfassen, und zwar, was immer betont wird, in allgemein faßlicher Form.

Das hier beschriebene Instrument besitzt keine feste Aufstellung, sondern wird beim Gebranch aufgehängt oder in der Hand gehalten. Es besteht aus einer mit Gradteilungen versehenen Kugel, der „espera“, welche sich innerhalb einer durchbrochenen Kugelschale, dem „red“ (eigentlich Netz) dreht. Letzteres besteht aus verschiedenen miteinander starr verbundenen Kreisteilungen, die aber nicht nur größte Kreise darstellen. Auch eine Reihe von Fundamentalsternen finden sich in diesem „red“ markiert. Der zweite Teil des Werkes, welcher wieder von der Anwendung des Instruments handelt, stellt auch hier eine große Sammlung von Aufgaben dar. Das Instrument dient in erster Linie zur Beobachtung, und zwar sowohl zur direkten Augenbeobachtung als zu Schattenbeobachtungen, es gestattet aber auch eine Verwendung als Rechenmaschine für gewisse Aufgaben, z. B. kann man sofort durch Einstellen der Alhidade auf den Jahrestag den Längengrad der Sonne ablesen u. dergl. Einige der angeführten Aufgaben rühren von Ptolemäus, „Veles“, Hermes und Zarkali her.

**Das Buch vom ebenen Astrolabium („Astrolabio lano“).**

Bei diesem Buche wird weder der Verfasser noch eine Jahreszahl genannt. Vermutlich rührt es ebenso wie das vorangehende von Ibn Sid her. Das hier beschriebene Instrument ist das gebräuchlichere ebene Astrolabium, welches schon Ptolemäus verwendete. Im Vorworte heißt es: „. . . das Astrolabium, welches ursprünglich sphärisch war wie die Himmelskngel. Und weil Ptolemäus sah, daß dies Instrument (das sphärische Astrolabium) wegen seiner Größe sehr schwer von einem Ort zum anderen zu transportieren war, und daß es auch schwer herzustellen war, so verwandelte er es aus dem sphärischen in ein ebenes . . .“. Der Unterschied gegen das vorige Instrument besteht darin, daß man alles auf eine Ebene projiziert hat. Auf diese Weise erhält man eine durchbrochene Scheibe („red“) mit verschiedenen Kreisteilungen und den markierten Fundamentalsternen, und darunter drehbar eine andere Scheibe („lamina“), welche hier die Kugel des vorigen Instruments vertritt. Obendrein hat man auch noch die Rückseite der Scheibe zur Verwendung herangezogen. Wie bei dem vorigen Buch sind viele Figuren gegeben, in welchen man das Instrument nach nnd nach vor sich entstehen sieht. Die Anwendung ist im großen und ganzen dieselbe wie bei dem sphärischen Astrolabinm, und es wird wieder eine ähnliche Aufgabensammlung gegeben wie früher. Das letzte Kapitel handelt von einer Prüfung des Instruments. Auch in diesem Buche kommt eine Zahlentafel mit römischen Ziffern vor.

### Das Buch vom Ataçir.[1])

Dies nur kurze Buch bildet den Schluß des zweiten Bandes der *Libros del saber*. Das Vorwort rührt von Alfons selbst her, von welchem wir erfahren, daß Ibn Sid dies Buch auf sein Geheiß verfaßt hat. Das hier beschriebene Instrument, welches auch als „estrumente del leuantamiento“ (ascensiones?) bezeichnet wird, ist ähnlich dem vorigen eine scheibenförmige, mit Alhidade versehene Vorrichtung. Nach dem Vorwort zu urteilen, scheint es lediglich zu astrologischem Gebrauch bestimmt zu sein, denn Alfons sagt dort: „Weil wir sehen und hören, daß man die gewaltigen Ursachen des Geschehens dieser Welt sowie die Dauer des menschlichen Lebens und die Dinge, welche sich ereignen von Bösem und und von Gutem, nur erforschen kann durch die Kenntnis des »leuantamiento«, welches »ataçir« genannt wird; und weil es, so man dies durch Rechnung wissen will, sehr schwierig zu bewerkstelligen ist, nnd es deswegen oft unterbleibt, während doch das Unterbleiben einen großen Verlust in dieser Wissenschaft verursacht, — deswegen gaben wir den Auftrag . . .“. Es scheint also, als sei das Instrument bestimmt gewesen, gewisse astrologische Rechnungen, welche man sich wegen ihrer Umständlichkeit gern sparte, durch mechanische Einstellungen auszuführen. Das Werk ist wie die bisherigen in zwei Teile geteilt. Der erste, mit Figuren versehen, handelt von der Herstellung, der zweite, hier sehr kurz, vom Gebrauch.

### Das Buch von der Universal-Lamina („Lamina uniuersal“).

Auch dies Werk ist im wesentlichen die Übersetzung einer arabischen Schrift. Der Autor derselben, bei Alfons „Alyn Sohn des Halaf“, = 'Alî b. Chalaf, ist nach Suter[2]) vielleicht mit 'Alî b Chalaf b. Ġâlib el-Anṣârî, Abû'l-Ḥassan, identisch. Das hier beschriebene Instrument ist eine Abart des ebenen Astrolabiums. Die Benennung „Universal-Lamina“ bezieht sich offenbar nicht auf das ganze Instrument, sondern nur auf die drehbare Scheibe (lamina), die den inneren Teil des Astrolabiums bildet. Diese Scheibe ist hier mit einer Projektion versehen, welche das Instrument für alle geographischen Breiten verwendbar macht.

Auch hier rührt das kurze Vorwort von Alfons selbst her. Er sagt darin: „Und nun wollen wir davon handeln, wie die »lamina uniuersal« herzustellen ist, welche in Toledo gebaut wurde, wovon dann die Açafeha des Zarkali abgeleitet wurde. Und der Gelehrte, welcher die genannte Lamina herstellte, schrieb kein Buch über ihre Herstellung, wie weiter

---

1) Ataçir = Tasjir. Vgl. Steinschneider, *Hebr. Übers.* p. 277.

2) A. a. O. p. 214. Siehe auch Steinschneider, *Études sur Zarkali*; Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. 18, 1885, p. 355.

unten aus dem Buche zu ersehen ist, welches er über den Gebrauch schrieb ...". Deshalb habe er IBN SID den Auftrag gegeben, den ersten Teil über die Herstellung „recht vollständig mit allen Beweisen und Figuren" abzufassen. Die ersten zwölf Kapitel rühren also von IBN SID her. Der zweite Teil dagegen beginnt mit den Worten: „Es spricht ALYN, der Sohn des HALAF" und stellt also die Übersetzung des arabischen Originals dar. Der Verfasser bezeichnet sich unzweideutig selber als Erfinder der Universal-Lamina. In seinem Werke folgt nämlich auf eine überschwengliche Lobpreisung Gottes eine Auseinandersetzung, in welcher er von dem PTOLEMÄischen Problem, die Oberfläche einer Kugel auf einer Ebene darzustellen („cuemo se deue allanar la espera") und seiner Verwirklichung im ebenen Astrolabium ausgeht. Er führt aus, daß letzteres die große Unbequemlichkeit besitze, daß man für jede geographische Breite eine besondere Lamina nötig habe. Deshalb habe er eine Lamina mit einer anderen Projektion ersonnen, welche für alle Breiten gelte, und habe dies Instrument »ell orizon uniuersal« genannt, auch habe er dies Buch darüber geschrieben. Er will ferner das Instrument dem Könige „Meymun" (EL MAMUN) gewidmet haben. Nach SUTER[1]) ist dies der Kalife QÂSIM B. HAMMÛD, genannt EL-MÂMÛN, von Cordova, der um das Jahr 1019 oder 1020 regierte. RICO will die ganze Schrift ZARKALI zuteilen, worauf wir indessen nicht näher eingehen können. Zur Vervollständigung ließ ALFONS von IBN SID einen ersten Teil, mit Figuren versehen, vorausschicken, welcher über die Herstellung des Instruments handelt.

Den Hauptteil des Werkes bildet auch hier eine umfangreiche Aufgabensammlung aus allen Gebieten der praktischen Astronomie. Die Aufgaben sind in sehr äußerlicher Weise nach dem Objekt, mit dem sie sich befassen, in fünf Teile unterschieden, deren erster über die Zusammensetzung und Handhabung des Instruments handelt, während der zweite Aufgaben aus der astronomischen Geographie ohne direkten Bezug auf einen Himmelskörper, der dritte Aufgaben über die Sonne, der vierte solche über die Fixsterne und der fünfte desgleichen über den Mond gibt. Bei einigen dieser Aufgaben wird auf ältere Autoren zurückgegriffen, namentlich PTOLEMÄUS, AL-BATTANI, HERMES.

### Das Buch von der Açafeha.

Das Buch ist eine Übersetzung der bekannten Schrift von ZARKALI über die von ihm erfundene Safiha oder Açafeha, ein dem vorigen ähnliches Astrolabium. Der vorausgeschickte Teil über die Herstellung des Instruments rührt aber offenbar von den ALFONSinischen Gelehrten her, da erst der zweite Teil mit dem stereotypen Satz beginnt: Es spricht der oben genannte Gelehrte ZARKALI. Aus der Einleitung des Buches ist zu ersehen, daß

1) A. a. O. p. 214.

ZARKALI sein Instrument zuerst dem Könige EL-MÂMÛN (1038—75) widmete. Später siedelte er nach Sevilla über, wo er eine andere, vollkommenere Safiha konstruierte, die er nun dem König von Sevilla MUHAMMED BEN 'ABBÂD (1069—91) widmete.[1]) Weiter erfahren wir, daß ALFONS bereits in seinem vierten Regierungsjahre, also 1255 oder 1256, dies Buch aus dem Arabischen durch FERNANDO von Toledo ins Spanische übertragen ließ, daß er aber 1277 die Übersetzung nochmals vollständiger und besser durch „BERNALDO" und „ABRAHEM" ausführen ließ. Der letztere ist offenbar identisch mit dem früher erwähnten ABRAHAM DE BALMES, der IBN HEITHAMS Weltkonstruktion für ALFONS ins Spanische übertrug.

Wir wollen auf dieses Werk, das schon wiederholt Gegenstand genauerer Untersuchungen gewesen ist,[2]) hier nicht näher eingehen.

**Zwei Bücher von den Laminas der sieben Planeten (Äquatorien).**

Diese im dritten Bande der spanischen Publikation enthaltenen Bücher sind von manchen Autoren nicht richtig ausgelegt worden, weswegen es wohl nicht unnütz ist, auf ihren Inhalt etwas näher als bei den übrigen einzugehen. Das erste ist eine Übersetzung des arabischen Buches, welches ABÛ'L-KASIM AS'BAG IBN AS-SAM'H († 1035), der bei ALFONS ABULCAÇIM ABNAÇAHM genannt wird,[3]) verfaßt hatte, und das wahrscheinlich über ZARKALI auf ALFONS gekommen ist. Das zweite ist ebenfalls eine Übersetzung eines arabischen Werkes, und zwar von ZARKALI, welches nach RICO etwa 1081 zu Sevilla verfaßt wurde.

Der Gegenstand, welchen diese beiden Bücher behandeln, wird in der Einleitung deutlich bezeichnet: „ . . . und nun wollen wir von den Laminas der sieben Planeten handeln, welche gemacht sind, um den Ort eines Planeten zu einer beliebigen Stunde und an einem beliebigen Tage mit Sicherheit zu erfahren, ohne Tafeln und ohne irgend welche Rechnung, sondern auf sehr einfache Weise; und es ist dies eine der Subtilitäten (sotilezas), welche in dieser Wissenschaft erfunden worden sind". Die Laminas sind also Apparate, welche es gestatten, den Ort eines Planeten zu einer beliebigen Zeit auf graphisch-mechanischem Wege, „ohne Tafeln und Rechnung" zu finden. Diese Instrumente, welche in der Geschichte der Astronomie wohl nicht ganz mit Unrecht nur recht kurz erwähnt zu werden pflegen,[4]) waren später, namentlich im 16 Jahrhundert unter dem

1) Siehe SUTER, a. a. O. p. 215.

2) So namentlich in STEINSCHNEIDER, *Études sur ZARKALI, astronome arabe du XI^e siècle, et ses ouvrages;* Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **14** (1881), p. 171; **16** (1883), p. 493; **17** (1884), p. 765; **18** (1885), p. 343; **20** (1887), p. 1, 575.

3) Vgl. STEINSCHNEIDER, *Études sur ZARKALI*, a. a. O. 18, 1885, p. 348, sowie SUTER, a. a. O. p. 85 und 215.

4) Bekannt ist KEPLERS abfälliges Urteil über sie: industria miserabilis.

Namen aequatorium (aequare = Ungleichung anbringen), auch wohl planisphärium bekannt, und besaßen eine größere Verbreitung, als man nach der Kürze ihrer Besprechung in den neueren Geschichtswerken meinen sollte.[1]) Es ist hieraus aber ersichtlich, daß man von diesen Büchern nicht ohne weiteres in dem Sinne sprechen kann, als sei hier eine Planetentheorie gegeben. Denn wenn sich auch der Mechanismus dieser Laminas an die Theorie anlehnt, so treten, wie gezeigt werden wird, doch auch Abweichungen auf, und namentlich sind auch die Zahlenwerte, da sie für den Zeichner gegeben sind, meist nur abgerundete Näherungswerte. Die Breite bleibt natürlich ganz unberücksichtigt. Die Laminas stellen eine ebene Kreisscheibe dar, welche als die Ekliptikalebene oder auch als die Bahnebene zu betrachten ist, wozwischen kein Unterschied gemacht wird. Der Mittelpunkt stellt die Erde dar, und der äußere Rand, der eine Ekliptikalteilung trägt, den Kreis der Ekliptik in der Fixsternsphäre. Auf der Scheibe wird nun der Deferent (Levador) des betreffenden Planeten in seiner exzentrischen Lage zur Erde eingezeichnet. Auf diesen Deferenten wird der Mittelpunkt der kleinen, gesondert ausgeschnittenen Epizykelscheibe aufgesetzt, dessen Peripherie von dem Planeten beschrieben wird, während sich der Mittelpunkt auf der Peripherie des Deferenten herumbewegt. Die sogenannte Zweiteilung der Exzentrizität, vermöge welcher

1) So gab nach Weidler Camillo Leonardi 1496 ein *Liber desideratus canonum aequatorii coelestium motuum, sine calculo* heraus. Ich hatte ein anderes Werk über denselben Gegenstand in Händen, welches Schoner 1524 zu Nürnberg unter dem Titel herausgegeben hat: *Aequatorii astronomici omnium ferme uranicorum theorematum explanatorum canones.* Auch hier müssen, wie bei den arabischen Laminas, die mittleren Bewegungen im Deferent und Epizykel einer Hilfstafel entnommen werden. Diese Größen werden eingestellt, worauf ein im Mittelpunkt der Scheibe befestigter Faden über den Ort des Planeten im Epizykel gespannt wird und an der äußeren Ekliptikalteilung den wahren Ort abzulesen gestattet. Am Schluß des Werkes befinden sich fünf kolorierte Figuren, das Äquatorium des Mondes, der Sonne, Venus und Merkurs und nochmals des Mondes darstellend. — Dies scheint indessen nur das vorbereitende Werk zu dem vollständigeren und umfangreicheren *Aequatorium astronomicum* gewesen zu sein, welches Schoner 1534 zu Nürnberg herausgab. — Über denselben Gegenstand haben noch zahlreiche andere Autoren geschrieben. Wir erwähnen Franciscus Sarzosus (1535), ferner namentlich das bekannte Werk des Petrus Apianus: *Astronomicum Caesareum* (Ingolstadii 1540) (hier lautet der terminus technicus »planetolabium«), welches eingehend in Kästners *Geschichte d. Mathematik* II, p. 548—564 besprochen ist. Auch Sebastian Münster (um 1530) scheint hierher zu gehören. Ferner hat Orontius Fineus ein derartiges, von seinem Vater Franciscus gebautes Instrument in einem 1548 zu Paris erschienenen Werke beschrieben, welches den Titel führt: *In proprium planetarum aequatorium, omnium antehac excogitatorum et intellectu et usu facillimum, canones, ab ipso auctore recens aucti et emendati.* Vergleiche auch das »planisphärium« des Johann de Rojas. Riccioli gibt in seinem *Almagestum novum* p. 505 einen kurzen Überblick über die Literatur dieses Gegenstandes.

sich die Bewegung im Deferenten nicht gleichförmig vollzieht, sondern dergestalt, daß sie sich von einem neuen, aber auch auf der Apsidenlinie gelegenen Punkte (centrum aequans) aus als gleichförmige Winkelbewegung darstellt, wird auf höchst einfache Weise dadurch berücksichtigt, daß die Teilung des Deferenten nicht zentrisch ausgeführt wird, sondern so, daß die Verbindungsstrahlen der Teilstriche mit dem „centrum aequans" untereinander gleiche Winkel einschließen. Auf diese Weise wird die genannte Korrektion von der Figur selbst angebracht, und man braucht sich gar nicht weiter um sie zu kümmern. Kennt man also die Einstellungswinkel im Deferent und Epizykel, so ist damit der Ort des Planeten auf der Lamina festgelegt, und man braucht nur noch einen um den Mittelpunkt der Scheibe drehbaren Alhidadenarm so zu legen, daß seine Kante durch diesen Ort des Planeten geht, um sofort an der äußeren Ekliptikalteilung die wahre Länge ablesen zu können. Wie ersichtlich, müssen die Winkel im Deferenten und Epizykel zur Einstellung gegeben sein, allein dies sind die gleichförmigen mittleren Bewegungen, die man ohne Mühe einer kleinen auf die Lamina selbst geschriebenen Hilfstafel entnehmen kann.

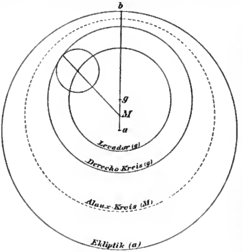


Fig. 1.

Soweit das Prinzip. Im einzelnen treten sowohl zwischen den verschiedenen Planeten als auch zwischen den beiden genannten Büchern manche Unterschiede auf, von denen wir hier, um die Darstellung nicht allzu weit auszudehnen, nur die hauptsächlichsten erwähnen können.

Bei Ibn Sam'h ist für jeden Planeten eine besondere Lamina nötig, doch werden alle nach gemeinsamem Maßstabe entworfen, was den Vorteil gewährt, daß man für alle nur eine einzige Epizykelscheibe braucht Die weitere Darstellung ist aus Figur 1 ersichtlich: *ab* ist der Radius der Scheibe und zugleich die Apsidenlinie, auf der alle Zentren liegen. *a* ist die Erde, *b* der Punkt der Ekliptik, auf welchen das Apogäum (aux) des Planeten fällt. Dann zeichnet man die Exzentrizität *ag* und schlägt um *g* den Levadorkreis. Der Anfangspunkt der Zählung im Levador ist natürlich

durch die Apsidenlinie gegeben. Schwieriger ist der frei aufgesetzte Epizykel zu orientieren. Um dies zu ermöglichen, hat IBN SAM'H einen zum Levador konzentrischen Kreis gezeichnet, der von diesem überall um den Epizykelradius entfernt ist, so daß er den aufgesetzten Epizykel in allen Lagen desselhen berührt. Dieser Kreis, welcher als »en derecho« des Levador bezeichnet wird, ist eine Erfindung des genannten maurischen Astronomen. Nnn müssen noch Levador- und Derechokreis mit Teilungen versehen werden, und zwar wie erwähnt, zentrisch vom „punctum aequans" $M$ aus, so daß die abgeteilten Bogenstücke ungleich groß werden. Zu diesem Zweck schlägt man um $M$ einen möglichst großen Hilfskreis, hier Alauxkreis genannt (Alaux = aux), welcher in 360 gleiche Teile geteilt wird und durch dessen Radien Levador- und Derechokreis eingeschnitten werden. Dieser Alauxkreis mit dem „centrum aequans" $M$ als Mittelpunkt dient also gleichsam als Teilmaschine für die beiden anderen Kreise, die ihm etwas exzentrisch aufgesetzt sind. Da hiermit sein Zweck erfüllt ist, so wird er nach erfolgter Teilung wieder entfernt, so daß auf der fertigen Lamina, wie sie in dem spanischen Werke abgebildet ist, nur Levador- und Derechokreis zu sehen sind. Merkwürdigerweise liegt aher Punkt $M$ nicht jenseits von $g$, so daß $ag = gM$, wie es die PTOLEMÄische Theorie verlangt, sondern er halbiert $ag$, so daß $aM = Mg$. Diese Abweichung, welche bereits HERZ a. a. O. mit Recht hervorgehohen hat, ist sehr merkwürdig, denn einerseits ist ein Fehler durch Abschreiben und Übersetzen nicht wahrscheinlich, da sich dieselbe Darstellung der Reihe nach bei allen Planeten findet, und andererseits sieht man nicht ein, welche Gründe den Verfasser zu dieser Abweichung von der Theorie nötigten. Es liegt daher die schon von HERZ geäußerte Vermutnng nahe, daß wir es hier mit einem Mißverständnisse der PTOLEMÄischen Lehre von der Zweiteilung der Exzentrizität zu tun hahen.

Sind Levador- und Derechokreis in der angegehenen Weise mit Teilungen versehen, so findet die Orientierung des aufgesetzten Epizykels einfach in der Weise statt, daß der Nullpnnkt seiner Teilung auf denselben Grad des tangierenden Derechokreises eingestellt wird, auf den im Levador der Mittelpunkt des Epizykels gesetzt ist. Dadurch wird die Bedingung der Theorie erfüllt, daß der Nullpunkt des Epizykels stets vom „centrum aeqnans", nicht von der Erde aus, hinter seinem Mittelpunkt liegt, d. i. im mittleren Epizykelapogäum und nicht im wahren.

Anf die bei IBN SAM'H sehr abgerundeten Zahlenwerte können wir hier nicht näher eingehen, desgleichen auch nicht auf die Vereinfachungen und Komplikationen, welche hei der Sonne, bezw. beim Monde und Merkur auftreten.

An Präzision der Darstellung und Einheitlichkeit der Behandlung ist

das zweite, von Zarkali verfaßte Buch weit überlegen, bei welchem man in der Tat nichts fortlassen kann, ohne daß eine wesentliche Lücke entstände. Während bei seinem Vorgänger für jeden Planeten eine eigene Lamina nötig war, besteht das Instrument von Zarkali nur aus einer einzigen Lamina mit zwei Seiten, welche auf der Vorderseite die Kreise der Planeten Venus, Mars, Jupiter und Saturn, und auf der Rückseite diejenigen der Sonne, des Mondes nnd Merkurs trägt, wozu dann noch eine für alle Planeten gemeinsame aufsetzbare Epizykelscheibe kommt. Die auf der Vorderseite vereinigten vier Planeten sind ganz gleichartig behandelt, während auf der Rückseite die drei vom Schema abweichenden vereinigt sind. Die beiden Figuren p. 281 und 282 des III. Bandes der *Libros del saber* zeigen Vorder- und Rückseite dieser Lamina, letztere mit der oft zitierten Merkursellipse, und auf p. 283 ist die Epizykelscheibe, allerdings in vergrößertem Maßstabe, abgebildet. Zarkalis Darstellung weicht in mehreren Punkten von seinem Vorgänger ab. Zunächst sind seine Zahlenangaben weit genauer, ja von einer für den Zeichner meist illusorischen Genauigkeit, und Zarkali sagt ausdrücklich, er überlasse es dem Zeichner, sie abzurunden. Daher wird man, wenn überhaupt, bei diesem Buche eher berechtigt sein als bei dem vorangegangenen, auf die Planetentheorie des Verfassers zu schließen. Das Mißverständnis seines Vorgängers in bezug auf die Zweiteilung der Exzentrizität ist in Zarkalis Werk entfernt, und seine Darstellung stimmt mit der Ptolemäischen Theorie überein. Den Derechokreis Ibn Sam'h's übernimmt auch er, nennt ihn aber — was zu beachten ist — Alauxkreis, während er für den Hilfskreis, der bei jenem Alauxkreis hieß, den Namen Yguador (Äquant) einführt. Auch bei Zarkali wird dieser Yguador nach der mit seiner Hilfe erfolgten Teilung der anderen Kreise entfernt, so daß für jeden Planeten zwei Kreise, der Alauxkreis und der Levador, die zueinander konzentrisch sind, stehen bleiben. Die Differenz ihrer Radien ist überall konstant, nämlich gleich dem Radius der gemeinsamen Epizykelscheibe, auf welcher alle Epizykel konzentrisch gezeichnet sind.

Die Vorderseite der Zarkalischen Lamina, die auf p. 281 der spanischen Publikation abgebildet ist, zeigt daher, wenn man von der äußersten Ekliptikalteilung absieht, von außen nach innen gezählt folgende acht geteilte Kreise: Alauxkreis ♄, Alaux ♃, Alaux ♂, Alaux ♀, Levador ♄, Levador ♃, Levador ♂, Levador ♀.

Die auf der folgenden Seite abgebildete Rückseite der Lamina gibt, wie erwähnt, die abweichend konstruierten Kreise der Sonne, des Mondes und Merkurs. Am wenigsten Umstände macht naturgemäß die Sonne, bei welcher der Epizykel ganz fortfällt, so daß auch der Alauxkreis unnötig wird. Die Mondkreise konstruiert Zarkali anders als sein Vorgänger.

Trotzdem bildet offenbar auch bei ihm die Darstellung derselben wegen der komplizierten Handhabung des Apparates einen wunden Punkt. Dagegen ist es ihm für die gleichfalls schwierige Merkursbewegung gelungen, eine Darstellung zu finden, die eine sehr einfache Handhabung des Apparates zuläßt und doch die Komplikation der Ptolemäischen Theorie getreu wiedergibt. Es ist dies die von vielen Autoren nicht richtig interpretierte Ellipse, welche sich auf der Rückseite der Zarkalischen Lamina befindet. Die ganze Figur zeigt, wenn man wieder von der äußersten Ekliptikalteilung absieht, von außen nach innen gezählt folgende Kreise: Kreis der Sonne, Alauxkreis des Merkur, Alaux Mond, Levador Mond (ohne Zählung), und Levador des Merkur (die Ellipse). Der kleine Kreis in der Mitte endlich ist eine Hilfskonstruktion für die Merkurskurven. Die Konstruktion der letzteren gründet sich auf die Ptolemäische Theorie der Merkursbewegung, nach welcher der Mittelpunkt des Deferentenkreises, während dieser beschrieben wird, seinerseits wieder auf einem kleinen Kreise rotiert. Die hieraus resultierende Kurve, welche der Epizykelmittelpunkt zu beschreiben hat, besitzt jene ellipsenähnliche Gestalt. Die Konstruktion dieser Kurve ist in dem unmittelbar vorangehenden Kapitel mit einer geradezu peinlichen Sorgfalt dargestellt. Es sei in Figur 2 $a$ die Erde und zugleich der Mittelpunkt der ganzen Scheibe. $ag$ ist die Exzentrizität, wobei $g$ aber nur den mittleren Ort des Deferentenzentrums darstellt. Der wahre Ort wandert auf dem kleinen Kreise mit dem Radius $gM$ herum, welcher »el cerco levador del centro del levador de mercurio« heißt. Punkt $M$ selbst, welcher $ag$ halbiert, ist das Zentrum der gleichförmigen Winkelbewegung im Levador und daher der Mittelpunkt des mit beliebigem Radius geschlagenen Yguador. Nun wird sowohl der Ygnador als der kleine Kreis jeder für sich zentrisch geteilt, doch so, daß die Teilung des letzteren entgegen der Zählung der Längen fortschreitet, während die des ersteren im Sinne der wachsenden Längen erfolgt. Nun erhält man ein Punkt-

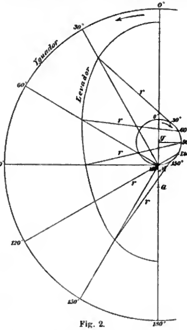


Fig. 2.

skelett der zu zeichnenden Levadorkurve, wenn man eine konstante Strecke *r* — eben den Radius des Levadorkreises — in den Zirkel nimmt, seinen einen Schenkel sukzessive auf die Teilpunkte des kleinen Kreises einsetzt und mit dem freien Schenkel die Schnittpunkte mit den gleichnamigen Radien des Yguador markiert. Die Kurve wird sodann ausgezogen, indem man je drei der erhaltenen Punkte durch einen Kreisbogen verbindet. Wie ersichtlich, stellen die konstruierten Punkte zugleich die Gradteilungen dieser Kurve dar, und man sieht, wenn sich ein Punkt in dieser Kurve so bewegt, daß er in gleichen Zeiten stets gleich viel dieser ungleichen Grade zurücklegt, so erscheint seine Bewegung vom „centrum aequans" *M* aus als gleichförmige Winkelbewegung Die erhaltene Kurve ist keine Ellipse, und wird auch nur als »ovalada y proximamente elliptica« bezeichnet. Sie besitzt nur eine Symmetrieachse, nämlich die Apsidenlinie. Diese Art, den Merkursdeferenten als ovale Kurve darzustellen, war auch im späteren Mittelalter keineswegs unbekannt. Genau dieselbe Konstruktion findet man in der von Reinhold mit Figuren und Scholien versehenen Planetentheorie Peurbachs (1542) sowie in den »Quaestiones« über dieselbe von Urstisius (Wursteisen, 1568), auch findet sie sich im *Almagestum novum* des Riccioli p. 564 reproduziert, wo es dazu heißt: „die folgende Figur bringen die Kommentatoren der Peurbachschen Planetentheorie Reinholdus p. 121, Osvaldus p. 211, Urstisius p. 227, sowie Maginus in seinen Theorieen p. 51 etc.". Man sieht, daß diese Darstellung durchaus geläufig und allgemein bekannt war. Sogar für den Monddeferenten war eine ähnliche Kurve im Gebrauch, welche sich ebenfalls in der Reinholdschen Bearbeitung von Peurbachs Planetentheorie findet und auch von Riccioli reproduziert worden ist. Delambre schreibt über die Ausgabe 1558 der ersteren: „In dem Kapitel über den Mond bemerkt man namentlich die Figur, wo er die ovale oder linsenförmige Kurve, die aus der Ptolemäischen Theorie resultiert, ausgezogen hat".[1]) Wie ersichtlich, ist also diese Darstellungsart im 16. Jahrhundert sehr geläufig gewesen, ohne daß es jemandem eingefallen wäre, sie als eine Neuerung oder auch nur Abweichung von der Ptolemäischen Theorie zu betrachten. Infolgedessen ist die weitschweifige Erörterung Ricos nicht recht verständlich, in welcher dieser die Vermutung äußert, Kepler könne durch diese Merkurskurve des maurischen Astronomen auf die elliptische Bewegung der Planeten gekommen sein. Kepler hat ohne Zweifel die Peurbachsche Planetentheorie sehr gut gekannt, und so konnte er diese Anregung aus einer viel näher liegenden Quelle schöpfen, wenn sie überhaupt eine Einwirkung auf ihn gehabt hat. Es scheint aber, als habe Rico die völlige

1) In der mir vorliegenden Ausgabe von 1542 ist diese Kurve für den Mond nicht enthalten, sondern nur die für Merkur.

Übereinstimmung dieser Konstruktion mit der Ptolemäischen Theorie nicht klar durchschaut und daher das Verdienst Zarkalis etwas zu hoch angeschlagen. Er steht jedoch in dieser unrichtigen Auffassung so wenig allein, daß es mir vielmehr trotz eifriger Bemühungen nicht gelungen ist, eine Darstellung zu finden, in welcher diese Kurve richtig interpretiert wäre. Leverrier schließt sich in seiner Besprechung der *Libros del saber*[1]) sehr eng an den spanischen Herausgeber an, wodurch er wie dieser zu einer sicherlich etwas zu hoch gegriffenen Schätzung dieser Konstruktion gelangt: „Zarkali sagt, daß diese Kurve, die wegen der Menge der sie zusammensetzenden Linien sehr schwierig herzustellen sei, die genaueste sei, um die Stellung des Merkur bei seinen unregelmäßigen Bewegungen durch die Himmelsräume zu erhalten. Diese Idee, obwohl sehr klar formuliert und graphisch erläutert, ist vom 11. bis zum Beginn des 17. Jahrhunderts, zu welcher Epoche Kepler seine Gesetze und seine Rudolfinischen Tafeln publizierte, für die Wissenschaft unfruchtbar geblieben". Als Mißverständnis aber muß man die Darstellung bezeichnen, welche man bei deutschen Autoren findet. So liest man in Wolfs *Geschichte der Astronomie* (München 1877): „Merkwürdig ist . . ., daß, während im allgemeinen ganz in Ptolemäischem Sinne nur Kreise zur Verwendung kommen, auf p. 282 eine elliptische Merkursbahn erscheint, deren Axen 82 und 67 mm halten, und wenn es auch etwas gewagt erscheint in dieser Ellipse, deren Mittelpunkt das Zeichen der Sonne (!) zeigt, einen Vorläufer der Keplerschen Ellipsen sehen zu wollen, so dokumentiert sie dagegen, wie Mädler richtig hervorhebt, daß man schon früh die Unmöglichkeit eingesehen hat, mit dem exzentrischen Kreise in allen Fällen auszureichen". Das »Sonnenzeichen« ist der oben erwähnte »cerco levador del centro del levador de mercurio«, auf welchem nach der Ptolemäischen Theorie der Mittelpunkt des Deferenten herumwandert! Das gleiche Mißverständnis findet man in Mädlers *Geschichte der Himmelskunde:* „Unter den Darstellungen ist besonders die p. 282 gegebene merkwürdig. Während nämlich alle übrigen nur Kreise geben, seien sie nun konzentrisch oder exzentrisch, ist hier die Bahn des Merkur durch eine Ellipse ausgedrückt, deren kleine Achse sich zur großen beiläufig wie 9 zu 11 verhält. Aber das Sonnenzeichen (!) findet sich nicht im Brennpunkt, sondern im Mittelpunkt der Kurve". Fast noch verfehlter ist die Darstellung in der *Geschichte der Bahnbestimmung* von Herz. Obwohl sich doch etwa die Hälfte der ganzen Schrift Zarkalis mit dieser Figurentafel beschäftigt, und speziell das letzte Kapitel vor den beiden Figurentafeln die Konstruktion der ovalen Merkurskurven enthält, und die letzten Worte dieses Kapitels lauten: „Und dies sind die Abbildungen der Lamina von beiden Seiten (de amas las faces)", worauf die beiden

1) Comptes rendus de l'acad. d. sc. [de Paris] 59, 1864, p. 765 folg.

Figurentafeln (Vorder- und Rückseite der ZARKALIschen Lamina) ohne Zwischentext folgen, — trotzdem lesen wir bei HERZ: „Endlich ist noch zu erwähnen, daß sich p. 282 eine Zeichnung für die Merkursbahn findet, welche hier elliptisch dargestellt ist, bei welcher aber die Sonne (!) sich im Mittelpunkte befindet. Eine Erklärung findet sich zu dieser Tafel nicht (!), und dürfte dieselbe viel eher als eine spätere Einschiebung der mißverstandenen KEPLERschen Theorie anzusehen sein, denn als ein Beweis für die Kenntnis oder die Hypothese einer elliptischen Merkursbahn zu ALFONS X. Zeiten“.[1])

1) Wir können nicht umbin, an dieser Stelle auf einige andere Versehen hinzuweisen, durch welche die Darstellung bei HERZ leider entstellt wird. Wir wollen nur einiges herausgreifen. Daß die „Laminas de los VII planetas“ die oben beschriebenen Äquatorien darstellen, dürfte HERZ kaum durchschaut haben, denn nach ihm sind es „die Bücher, die von den Planetenbewegungen handeln“, und er beginnt die Darlegung ihres Inhalts mit den Worten: „In der Theorie der Planetenbewegung....“. Sonst hätte er die spanische Publikation in seinem Werke auch wohl kaum erwähnt, da sie ja doch ausschließlich von Instrumenten handelt. — Des weiteren hat er übersehen, daß die beiden genannten Bücher von verschiedenen Autoren herrühren, so daß ihm die Verschiedenheit der Zahlenwerte, der Bezeichnungen und der ganzen Behandlung unverständlich bleibt. In ZARKALIS Buch kommt er durch die dort gegebenen Zahlenwerte auf das Jahr 1080 und bemerkt dazu: „Die letztere Epoche würde der Jahreszahl 1080 entsprechen, welche mit der ALFONSinischen Ära in keinem Zusammenhange steht, und deren Bedeutung an dieser Stelle überhaupt nicht ersichtlich ist“. Dabei beginnt aber dies Buch mit den Worten: „Es spricht der Gelehrte ABUÇACH AZARQUIEL (ZARKALI)“, und RICO verrät uns außerdem in seinen bibliographischen Notizen, daß dies Buch um 1081 in Sevilla von ZARKALI verfaßt wurde. — Als besonders charakteristisch führen wir noch ein anderes Beispiel an. Bei der für die Armillen gegebenen Aufgabensammlung findet sich auch ein Kapitel, in welchem gezeigt wird, wie man aus der gegebenen Parallaxe in Höhe mit Hilfe der Armillen als Rechenmaschine diejenige in Länge und Breite erhält; die Schlußworte lauten: „Und dies ist die Tafel, um die Parallaxe (diversidat del catamiento, in der späteren Latinität: diversitas aspectus) zu wissen, so wie wir es dir in diesem Kapitel 40 gesagt haben,“ worauf eine Tabelle der Parallaxe in Höhe für Sonne und Mond folgt. HERZ druckt den Kopf dieser Tafel ab und bemerkt dazu: „Aus dem bloßen Anblick der Tafel ist weder die Bedeutung der in derselben enthaltenen Zahlen, noch auch der Gebrauch der Tafel zu ersehen, und da zu derselben keinerlei Anleitung gegeben ist (!) und dieselbe .... von den eigentlichen ALFONSinischen Tafeln wesentlich verschieden ist, so ist deren Bedeutung nicht leicht zu entziffern“. — Wie HERZ die Rückseite der ZARKALIschen Lamina mißverstanden hatte, so ist ihm leider auch der Sinn der unmittelbar voraufgehenden Abbildung, welche die Vorderseite darstellt, entgangen. Wir lesen bei ihm: „p. 281 findet sich eine Zeichnung, in welcher sich die einzelnen Planetenbahnen derart berühren, daß die größte Entfernung eines Planeten von der Erde gleich ist der kleinsten des nächstfolgenden“, weswegen HERZ vorschlägt, hieraus die theoretische Annahme über die Entfernung der Planeten durch Rechnung zu ermitteln. Wer sich aber die genannte Figur ansieht, wird sich sofort überzeugen, daß es nur zwei Kreise sind, bei denen sich die Kreislinien wirklich berühren, während jeder andere Kreis nur die ziemlich willkürlich angesetzte Rückseite

Es bleibt noch zu erwähnen, daß die andere zum Merkur gehörige Kurve, nämlich die zur Orientierung des Epizykels dienende Alauxkurve, welche in der Figur in den *Libros del saber* jenseits der beiden Mondkreise liegt, in der Weise konstruiert wird, daß auf den vorhandenen Radien des Yguador nach außen hin überall der konstante Radius der gemeinsamen Epizykelscheibe abgetragen wird. Die erhaltenen Punkte werden wieder durch Kreisbögen zu je drei miteinander verbnnden nnd stellen auch hier gleich die Gradteilung dar. In derselben Weise wie früher wird dann der Epizykel so orientiert, daß sein Nullpunkt auf denselben Grad in der ihn berührenden Alauxkurve eingestellt wird, auf welchen im Levador sein Mittelpunkt gesetzt ist. Wie ersichtlich, muß die Alauxkurve des Merkur ebenfalls eine, wenn auch schwächere seitliche Abplattung zeigen, was anscheinend bei der Reproduktion der Figur in den *Libros del saber* verloren gegangen ist, denn dort ist diese Kurve offenbar ein Kreis.

**Das Buch vom Quadranten.**

Es bildet den Schlnß des dritten Bandes der *Libros del saber*. Auch hier hat Alfons selbst das Vorwort geschrieben, worin er sagt, weil über den ersten Teil, die Herstellung, zu seiner Zeit kein brauchbares Buch existierte, habe er seinen Gelehrten Ibn Sid im Jahre 1277 dies Buch schreiben lassen. Der zweite Teil, die Aufgabensammlung, scheint demnach irgend welchen älteren Schriften entnommen zu sein. Der erste Teil ist wieder wie üblich mit einer Reihe sehr sorgfältiger Abbildungen versehen, welche das Instrument in allen Stadien der Herstellung zeigen. Der Quadrant ist ein Handinstrument, und stellt einen mit einem Lot versehenen Kreisquadranten dar, bei dem die Diopter fest an dem einen der beiden begrenzenden Radien angebracht sind. Das Instrument dient vorzugsweise zu Höhenmessungen. Man visiert durch die Diopter nach dem Gegenstande und liest die Lage des Lotfadens an der Kreisteilung ab. Bei der Sonne lassen sich mit Vorteil auch Schattenbeobachtungen an-

des breiten, die Teilung tragenden Streifens seines Nachbars berührt, eine Anordnung, die natürlich nur aus ökonomischen Rücksichten auf dem Instrument eingeführt ist, und nichts mit der Theorie zu schaffen hat. Auch ist an einem solchen Berührungspunkt keineswegs die kleinste und größte Entfernung erreicht, was man auf den ersten Blick erkennen kann, da die Berührungsstellen nicht alle auf einem Durchmesser liegen. Endlich scheint Herz ganz übersehen zu haben, daß die Figur acht Kreise enthält, während es doch nur sieben Planeten gibt. Wie wir schon oben ausführten, gehören diese acht Kreise überhaupt nur zu den vier Planeten Venus, Mars, Jupiter, Saturn, indem jedem von ihnen zwei zueinander konzentrische Kreise zukommen. — Es wird niemandem, der sich die Mühe nimmt, schwer fallen, noch eine ganze Reihe ähnlicher Irrtümer auf den wenigen Seiten, die Herz den *Libros del saber* widmet, aufzufinden. Wir müssen uns hier mit dem Hinweis darauf begnügen.

stellen. Die Anwendung des Instruments wird in 19 kurzen Kapiteln auseinandergesetzt.

**Die fünf Bücher über die Uhren.**

Mit diesen Büchern, welche den letzten Teil des Alfonsinischen Lehrbuchs darstellen, beginnt der vierte Band der spanischen Publikation.

**a.** Das Buch von der Schattensteinuhr (relogio de la piedra de la sombra). Im Vorwort sagt Alfons: „Weil wir für die Herstellung der Sonnenuhr kein Buch fanden, welches für sich vollständig wäre, derart daß man bei der Arbeit kein anderes Buch nötig hat, darum beschlossen wir, dem genannten Rabi Çag (Ibn Sid) den Auftrag zu geben, dieses Buch recht vollständig zu verfassen, derart, daß der, welcher die Sonnenuhr herstellen will, kein anderes Buch zu lesen braucht als dieses". Eine Jahreszahl wird nicht genannt. Auch in diesem Buche werden zwei Teile unterschieden, deren erster in 14 Kapiteln die Herstellung behandelt. Die ersten dieser Kapitel handeln von vorbereitenden allgemeinen Aufgaben über den Lauf der Sonne sowie von der Berechnung des Schattens, und enthalten einige Zahlentabellen mit römischen Ziffern. Dann erst kommt die Herstellung des Steins selber mit zahlreichen sorgfältigen Abbildungen, in denen man das Instrument nach und nach vor sich entstehen sieht. Der zweite Teil setzt in vier kurzen Kapiteln den Gebrauch auseinander.

**b.** Das Buch von der Wasseruhr (relogio dell agua). Auch hier stammt das Vorwort aus Alfons Feder, in welchem es heißt: „Und das, was wir in den Büchern der alten Gelehrten geschrieben fanden, war sehr dürftig; und das kam daher, weil jene das Gefäß für das Wasser an seinem Boden durchbohrten, so daß in der ersten Stunde mehr Wasser ausströmte als in der zweiten, und in der zweiten mehr als in der dritten, und nach dieser Vorrichtung kamen die gleichen Stunden als ungleiche heraus ... Und wir beschlossen, diese Uhr nach anderer Weise herzustellen, so daß ihr kein Fehler anhaftet; und weiter unten wirst du dies verstehen können durch die subtilen Erfindungen, die du hier sehen wirst, welche bisher in dieser Art nicht hergestellt wurden in den vergangenen Zeiten. Und wir gaben dem obengenannten Rabi Çag (Ibn Sid) den Auftrag, daß er es recht genau und recht vollständig ausführte, und daß er seine ganze Meisterschaft, sowohl in den Künsten des Wassers als in der Kunst der Astronomie hineinlegte." Der erste Teil des Buches behandelt wieder die Herstellung und enthält viele Abbildungen. Der fertige Apparat ist ziemlich umfangreich und stellt eine förmliche hydraulische Maschine dar. Das ausfließende Wasser füllt nach und nach ein Gefäß an und hebt darin eine auf einem Schwimmer befestigte Stundentafel, welche auf diese Weise an einem festen Index vorbeigeführt wird. Diese Stundentafel, welche

„semeiante del cielo“ heißt, ist sehr kunstvoll eingeteilt und mit den Zeichen des Tierkreises bemalt. Der zweite Teil handelt vom Gebrauch und enthält außer den Vorschriften, welche für die Verwendung des Instruments als Uhr gelten, auch noch allerhand andere Aufgaben, die mit seiner Hilfe gelöst werden.

**c.** Das Buch von der Quecksilberuhr (relogio dell argent uiuo). ALFONS sagt in dem Vorwort, er habe IBN SID den Auftrag gegeben, die Herstellung der Quecksilberuhr „nach der Kunst des Buches, welches »Iran el filósofo« (HERON?) schrieb,“ darzustellen. Der Mechanismus dieser Uhr besteht aus einem Rad, welches in 24 Stunden gerade eine Umdrehung ausführt. Die treibende Kraft ist ein Gewicht, die Hemmung geschieht durch Quecksilber, welches sich im Innern des Rades befindet und durch Querwände mit nur sehr kleinen Öffnungen gehemmt, dem Zug des Gewichts nur langsam nachgibt. Die Drehung dieses Rades wird auf ein Astrolabium übertragen, welches gewissermaßen als ein sehr kunstvolles Zifferblatt dieser Uhr betrachtet werden kann, auf welchem man außer den Stunden auch gleich die Stellung der Sonne und der Sterne und überhaupt den ganzen momentanen Anblick des Himmels ablesen kann. Statt des Astrolabiums, heißt es, könne man das Uhrwerk auch mit einem Himmelsglobus verbinden. Auch lasse sich durch geeignete Anbringung von Schellen eine Art Weckeruhr daraus herstellen. Das Buch enthält nicht die übliche Zweiteilung, sondern besteht einfach aus sechs kurzen Kapiteln.

**d.** Das Buch von der Kerzenuhr (relogio de la candela). Auch hier hat ALFONS selbst das Vorwort verfaßt. Er sagt: „Eine andere Art von Uhren haben wir gefunden, welche sehr gut ist und es sehr verdient, in dies Buch aufgenommen zu werden, und dies Instrument heißt die Kerzenuhr . . . Und damit die Kerze vom Beginn der Nacht bis zum folgenden Morgen brenne, muß sie äußerlich stets von der gezeichneten Form sein, nicht größer und nicht kleiner. Und weil wir sehen, daß dies eine zweckmäßige und nützliche Sache ist, so haben wir SAMUEL EL-LEVI, unserem »iudio« den Auftrag gegeben, dies Buch zu schreiben . . .“ ALFONS bezeichnet sich hiermit anscheinend selbst als Erfinder dieser Uhr. STEINSCHNEIDER nimmt, ich weiß nicht warum, einen arabischen Anonymus an.[1]) Das Buch besteht aus 14 Kapiteln und enthält wieder zahlreiche Abbildungen. Die Kerze wird durch Zuggewichte nach oben gegen einen festen Widerhalt gepreßt, so daß ihr unteres Ende in dem Maße heraufrückt, wie sie oben abschmilzt. Diese Bewegung wird durch Übertragung einer Stundentafel mitgeteilt, welche ähnlich derjenigen der Wasseruhr in vertikaler Richtung an dem festen Index vorbeigeführt wird, und wie dort

1) *Die Mathematik bei den Juden;* Biblioth. Mathem. 1896, p. 113.

mit vielen Teilungen und Malereien versehen ist. Der ganze Apparat ist ziemlich umfangreich und kompliziert.

**e.** Das Buch von der Uhr des Stundentempels (relogio del palacio de las oras). Alfons schreibt im Vorwort, daß Ibn Sid dies Buch auf sein Geheiß geschrieben hat. Es besteht nur aus 5 Kapiteln und enthält verschiedene Abbildungen im Text, sowie eine farbige Tafel, welche den fertigen Tempel darstellt. Die Wand desselben besitzt auf der Südseite 12 schmale Fenster, die im Halbkreis angeordnet und so gebaut sind, daß die Sonnenstrahlen immer nur durch eins derselben ins Innere gelangen können. Dort fallen sie auf einen mit Teilungen versehenen Fußboden und bilden so den Zeiger der Sonnenuhr. Das ganze Buch zerfällt in zwei Teile, deren erster die Herstellung des Stundentempels selbst und der in den Wänden befindlichen 12 Fenster beschreibt, während der zweite von der Konstruktion von 12 weiteren Fenstern im Dach handelt.

Damit schließen die fünf Bücher von den Uhren und überhaupt der Alfonsinische Codex von den Instrumenten. Die zweite Hälfte des vierten Bandes der spanischen Publikation ist, wie schon erwähnt, ein Anhang und gibt Fragmente des anderen Alfonsinischen Werkes, der Planetentafeln, während der fünfte Band ganz bibliographischen Untersuchungen gewidmet ist.

### 4. Die „Tabulae Alphonsinae".

Wie bereits erwähnt, kennen wir seit der Herausgabe der *Libros del saber* den Text der originalen Alfonsinischen Tafeln, während die zugehörigen Zahlentabellen leider nach wie vor unbekannt sind. Was in den ersten 50 Jahren ihres Bestehens mit diesen Tafeln geschehen ist, bedarf gegenwärtig noch eingehender Nachforschungen. Die lateinische Ausgabe, welche Johannes de Saxonia in der ersten Hälfte des 14 Jahrhunderts veranstaltete, zeigt eine wesentlich andere Gestalt als der kastilianische Originaltext. Von hier ab können wir indessen den Faden weiter verfolgen. Die lateinische Ausgabe wurde vielfach neu bearbeitet, wobei die Tafeln selber jedoch anscheinend nicht mehr geändert wurden, und auch ins Spanische[1]) und ins Hebräische[2]) übersetzt. Es existieren noch heute eine große Zahl namentlich lateinischer Handschriften, von denen die meisten in der großen Aufzählung bei Rico genannt werden. Auch Herz beschreibt[3]) fünf Handschriften der Hofbibliothek zu Wien.

Ich möchte an dieser Stelle auf einen Irrtum hinweisen, der sich bei Rico in der Aufzählung der 75 Alfonsinischen Handschriften vorfindet. Dort werden nämlich die Nummern 2288 und 2352 der Berliner Bibliotbek als Handschriften der Alfonsinischen Tafeln bezeichnet. Diese Nummern

1) Castro, a. a. O. Bd. I, p. 116. — 2) Steinschneider, *Hebr. Übers.* p 618.

3) *Geschichte der Bahnbestimmung* II, p 38.

passen aber gar nicht für die Berliner Bibliothek, denn dort werden die Handschriften zuerst nach Sprache und Format bezeichnet (z. B. Lat. qu. 23), so daß so hohe Nummern gar nicht vorkommen. Offenbar liegt eine Verwechselung mit der bei RICO nicht erwähnten Hofbibliothek zu Wien vor, deren Nummern 2288 und 2352 in der Tat von HERZ als Handschriften der ALFONSinischen Tafeln genannt werden. Die Nummer 2288 enthält hier auch wirklich, wie es RICO verlangt, zwei verschiedene Handschriften, wodurch jeder Zweifel beseitigt wird. HERZ hat diesen Irrtum in seine *Geschichte der Bahnbestimmung* aufgenommen.

Nach Erfindung der Buchdruckerkunst entstanden eine große Zahl von Druckausgaben in lateinischer Sprache. Wir geben eine kurze Übersicht über dieselben.

1. Erster Druck 1483, Venedig, von ERHARD RATDOLT besorgt, führt den Titel: „ALFONTII regis castelle illustrissimi celestium motuum tabule: nec non stellarum fixarum longitudines ac latitudines ALFONTII tempore ad motus veritatem mira diligentia reducte. At primo JOANNIS SAXONIENSIS in tabulas ALFONTII canones ordinati incipiunt faustissime". Der Schluß lautet: „Finis tabularum astronomicarum ALFONTII regis castellae. Impressionem quarum emendatissimam ERHARDUS RATDOLT augustensis mira sua arte sua (sic) et impensa foelicissimo sidere complere curavit. Anno salutis 1483 Sole in 20. gradu Cancri gradiente hoc ē. 4. nonū. Julii. Anno mundi 7681 soli deo dominanti astris gloria". Von dieser meist als selten bezeichneten Ausgabe hatte ich zwei Exemplare in Händen, das eine aus der kgl. Bibliothek, das andere aus der Bibliothek der kgl. Sternwarte zu Berlin. Beschrieben in Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. 12, 1879, p. 370.

2. In *Libros del saber* I, p. L wird einer Ausgabe von 1487 Erwähnung getan, die aber wohl erst weiterer Bestätigung bedarf.

3. Ausgabe von 1488, Augustae Vind., besorgt von J. ENGEL (ANGELUS), führt den Titel: „ALPHONSI Tabulae. JO. DE SAXON. Canones in Tabulas astronomicas ALPHONSI. Item Concordantiae astronomiae cum theologia." (LALANDE, *Bibliogr. astr.*, Paris 1803, p 17; HOUZEAU et LANCASTER, *Bibliogr. générale de l'astronomie* I, p. 1366.)

4. Ausgabe von 1490, Venedig (*Libros del saber* I, p. LIII; LALANDE a. a O. p. 18; HOUZEAU et LANCASTER, a. a. O. I, p. 1366.)

5. Ausgabe von 1492, Venedig, von JOHANN LUCILIUS SANTRITTER aus Heilbronn, führt den Titel: „Tabule Astronomice ALFONSI Regis". Der Schluß lautet: „Expliciunt tabule tabularum astronomice divi ALFONSI Romanorum et Castelle regis illustrissimi: Opera et arte mirifica viri solertis Johannis Haman de Landoia dictus Hertzog curaque sua non mediocri: impressione complete existunt felicibus astris. Anno a primo

rerum etherearum circuitione 8476. Sole in parte 18 gradiente Scorpii sub celo Veneto. Anno salutis 1492 currente: Pridie Calen. Novembr. Venetiis". Diese Ausgabe hatte ich selbst in Händen. Sie wird übrigens eingehend beschrieben in Kästners *Geschichte der Mathematik* II (Göttingen 1797), p. 312—313.

6. Delambre erwähnt (*Hist. de l'astr. du moy. âge*, p. 249) eine Ausgabe von 1517. Wohl unsicher.

7. Ausgabe von 1518 (1521) Venedig, führt den Titel: „Tabule astronomice divi Alfonsi regis Romanorum et Castelle: Nuper quam diligentissime cum additionibus emendate. Ex officina litteraria Petri Liechtenstein. Anno 1518 Venetiis. Cum privilegio." Das letzte bedruckte Blatt zeigt ein großes schwarzrotes Wappen mit den Worten: „Petrus Liechtenstein anno 1521 Venetiis." Das Wappen mit der Jahreszahl wurde offenbar erst später nachgedruckt, während das Erscheinungsjahr der Tafeln 1518 ist. Diese Ausgabe hatte ich selbst in Händen. Lalande führt gesondert von dieser Ausgabe noch eine andere vom Jahre 1518 an, welche denselben Titel führt und mit der ersteren identisch sein dürfte.

8. Ausgabe von 1521, Venedig, von Gauricus, führt den Titel: „Tabula tabularum celestium motuum divi Alfonsi regis Romanorum et Castellae illust. Nec non stellarum fixarum longitudines ac latitudines ipsius tempore ad motus veritatem mira diligentia reductae etc.". Den zweiten Teil des Buches bilden die von Gauricus verfaßten Tafeln der Königin Isabella der Katholischen. (*Libros del saber* V, p. 139; Houzeau et Lancaster, a. a. O. I, 1366.)

9. Ausgabe von 1524, Venedig, von Gauricus, führt den Titel: „Alfonsi Hispaniarum regis Tabulae et L. Gaurici artium doctoris egregii Theoremata quorum hic est index:", worauf gleich auf dem Titelblatt ein Inhaltsverzeichnis folgt. Der Schluß lautet: „Hasce divi Alfonsi regis Hispaniarum illustriss. tabulas et Gaurici theoremata tibi Pompee Columna sacratissime pont. Impressit Lucas Antonius Junta anno salvatoris 1524 mense novembris: anno autem mundi labente 6723 iuxta ecclesiae decreta. Secundum vero Alfonsum regem 8509." Als Anhang ist dieser Ausgabe angefügt: „L. Gaurici Neapol. artium doctoris egregii Theoremata et plereque additiones. In tabulis Elisabeth Hispaniarum reginae quarum hic est index etc.". Diese Ausgabe hatte ich in Händen.

10. In *Libros del saber* I, p. LIII wird einer Ausgabe von 1534, Venedig, Erwähnung getan. Wohl unsicher.

11. Ausgabe von 1545, Paris. Die erste der beiden Pariser Ausgaben von Pascal Hamel; führt den Titel: „Divi Alphonsi Romanorum et Hispaniarum regis, astronomicae Tabulae, in propriam integritatem restitutae,

ad calcem adjectis tabulis quae in postrema aditione deerant, cum plurimorum locorum correctione et accessione variarum tabularum ex diversis autoribus. Qua in re Paschasius Hamellius, regius professor, sedulam operam suam praestitit." Diese Ausgabe hatte ich in Händen (im Besitz von Herrn Dr. Ludendorff in Potsdam).

12. Ausgabe von 1553, Paris. Die zweite der beiden Pariser Ausgaben; führt den Titel: „Divi Alphonsi Romanorum et Hispaniarum regis, astronomicae Tabulae in propriam integritatem restitutae, ad calcem adiectis tabulis, quae in postrema editione deerant, cum plurimorum locorum correctione, et accessione variarum tabularum ex diversis autoribus huic operi insertatum, cum in usus ubertatem, tum difficultatis subsidium ... Qua in re Paschasius Hammellius Mathematicus insignis idemque regius professor sedulam operam suam praestitit; Parisiis, ex officina Christiani Wecheli, sub Pegaso, in vico Bellovacensi. Anno 1553." Darüber das Pegasuswappen, welches sich auch auf der letzten Seite findet. Diese Ausgabe diente mir als Grundlage für meine eingangs erwähnte Umrechnung der Tafeln.

13. Ausgabe von 1641, Madrid, führt den Titel: „Tabulae ALPHONSinae perpetuae motuum coelestium, denuo restitutae et illustratae a Francisco Garcia Ventanas Mathematico. Traduntur praecepta, ut arithmeticae colligantur omnes medii motus, nec non festa mobilia secundum correctionem Gregorianam, et tabulae abbreviatae eliciendi eidem medios motus, constructae ad Meridianum Toletanum cuius longitudo est 11°. Matriti in officina regia 1641." (Kästner a. a. O. II, p. 312; *Libros del saber* V, p. 85; Houzeau et Lancaster a. a. O. I, 1366, geben das Jahr 1649 an.)

Die meisten dieser Ausgaben entstanden in Venedig, wo vielfach deutsche Buchdrucker die junge Kunst der Druckerei zu einer hohen Blüte brachten. Nach 1524 scheint zu Venedig keine neue Auflage mehr entstanden zu sein. 21 Jahre darauf erschien aber die erste der beiden Pariser Ausgaben, auf welche 1553, also bereits nach Erscheinen der Prutenischen Tafeln des Erasmus Reinhold, die zweite folgte. Damit sind die hauptsächlichsten Ausgaben erschöpft, von denen nur eine einzige in Deutschland entstand, und es folgt nur noch die etwas verspätet zu Madrid erschienene vom Jahre 1641.

Die älteren Ausgaben, welche ich einsehen konnte, besitzen sämtlich gothischen Druck, die beiden Pariser dagegen lateinischen, während die Ausgabe 1524 (Gauricus) abwechselnd lateinischen und gothischen Druck aufweist. Allen diesen Ausgaben liegt jene erste Redaktion von Johannes de Saxonia zugrunde, deren Text (die sogen. *Canones*) mit den Worten beginnt: „Tempus est mensura motus primi mobilis: ut vult Aristoteles IV. phisicorum". In der ältesten Druckausgabe (1483) stellen diese Worte

den Anfang des Textes dar, bei späteren hat man diesen ursprünglichen *Canones* noch andere vorausgeschickt, so daß sich der angeführte Passus an einer späteren Stelle findet. In der ältesten Ausgabe findet man auch zwei Figuren, die zur Erläuterung der Finsternisberechnung dienen, und es heißt dazu: „Figuram autem facies secundum doctrinam magistri JOANNIS DE LINERIIS, a quo habeo scientiam meam". Dies ist einer der Belege dafür, daß JOHANNES DE LINERIIS der Lehrer des JOHANNES DE SAXONIA gewesen ist.[1]) Diese beiden Figuren sind übrigens in keiner späteren Ausgabe mehr zu finden. Auch darin unterscheidet sich diese älteste Ausgabe von den späteren, daß sie keine Zeitgleichungstabelle enthält und daher unmittelbar die mittlere Zeit als gegeben voraussetzt. Außerdem ist die Tabelle der geographischen Koordinaten der Städte ausgedehnter als in den meisten anderen Ausgaben, und es wird nicht wie dort, die Längendifferenz gegen Toledo in Zeit gegeben, sondern nach PTOLEMÄischer Weise die geographische Länge in Graden, gerechnet vom westlichsten Punkte der damals bekannten Welt aus, welche für Toledo 11° beträgt. Wir werden weiter unten noch einmal auf diese für die Längenzählung im Mittelalter sehr merkwürdige Stelle der ältesten Ausgabe zurückkommen.

Gegen Ende des 15. Jahrhunderts unterzog sodann JOHANNES LUCILIUS SANTRITTER, ein Deutscher aus Heilbronn, die ALFONSinischen Tafeln einer neuen Bearbeitung. Worin diese bestand, teilt er uns in der Ausgabe 1492 in seiner Vorrede an AUGUSTINUS MORAUUS Olomucensis (aus Olmütz) mit: „interim divi ALFONSI astronomi exactissimi tabulas, in facillimum ordinem nostra opera redactas accipies, ne quis amplius difficultate perterritus relicto principe tabularum ad alios minoris veritatis se conferat. Quibus aliquas etiam tabulas addidimus, quo opus completius esset. Necnon canones partim a me confectos, partim ex plurimis laudatis auctoribus excerptos adiunximus".

Die Ausgaben 1521 und 1524 stellen Bearbeitungen des LUCAS GAURICUS aus Neapel, „artium et medicinae doctoris", dar. Er reduzierte den Fixsternkatalog, der in den bisherigen Ausgaben noch auf das ALFONSinische Krönungsdatum, den 1. Juni 1252 bezogen war, durch Addition von 2° 32′ zu allen Längen auf 1500. Er berichtet selbst hierüber: „OCTAVIANI SFORTIADAE episcopi Aretini olim laudensis suasu, labente anno christianae salutis 1500 supputavimus et ad libellam examinavimus atque rectificavimus in finitore Venetiano 1027 stellas fixas secundum PTOLEMAEUM". In dieser Form findet sich der Fixsternkatalog auch in den späteren Ausgaben. Seine sonstige Tätigkeit bei der Bearbeitung bezeichnet GAURICUS in seiner Vorrede an den „augustissimus princeps POMPEUS COLUMNA pont. Cardin. sacratis." folgendermaßen: „OCTAVIANI SFORTIADAE episcopi Aretini suasu,

1) Vgl. STEINSCHNEIDER, *Études sur Zarkali;* Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. 20, 1887, p. 581.

super tabulis ALFONSI regis Hispaniarum serenissimi ac doctissimi problemata seu novos Canones ac propositiones adiicere, et antiquos mirum in modum perplexos dilacerare non dubitavimus. In luminaribus preterea synodis ac pleniluniis theoremata, novas tabellas, et pleraque alia scitu dignissima coacervavimus. Quas lucubratiunculas nostras (licet unius menstruae intercapedinis quadrante tumultuaria exaraverim lucerna) tibi princeps augustiss. etc. sacravimus". Durch die in Klammern gesetzten Worte, welche offenbar besagen, daß GAURICUS eine Woche lang an dieser Ausgabe gearbeitet hat, hat sich derselbe den Tadel verschiedener Autoren zugezogen. GAURICUS hat auch zuerst die Zahlenbeispiele für die Berechnung eines Sonnen- und eines Mondortes gegeben, die aber ihren Zweck als Erläuterung wegen der Knappheit der Darstellung und auch wegen mehrerer beim Mondorte vorhandener Rechenfehler sehr schlecht erfüllen. Diese Knappheit der Darstellung trägt die Schuld an manchen Versehen, welche neueren Autoren bei der Besprechung der ALFONSinischen Tafeln untergelaufen sind. So hält HERZ[1]) die für das Datum des Beispiels zahlenmäßig gegebene „aux communis" (d. i. die Gesamtpräzession von Christus bis zum jeweiligen Datum, welche aus drei verschiedenen Tafeln zusammengesetzt wird) irrtümlich für eine sich auf die allgemeine Rechnungsvorschrift beziehende Konstante, nämlich einen für eine größere Zeitdauer zu gebrauchenden Mittelwert, obwohl doch die drei Präzessionstafeln keinen anderen Zweck haben, als eben diese „aux communis" für jedes Datum zu rechnen, wie auch aus dem zugehörigen Text zu ersehen ist, der überschrieben ist: „augem communem supputare". HERZ wundert sich auch darüber, daß das Datum 1476 Sept 21 $6^h\ 1^m\ 36^s$ p. m. als „aera generalis episcopi" bezeichnet ist. In den Ausgaben, welche mir vorliegen, steht: „era generalis episcopi Are" Es ist eben das Datum, für welches das Beispiel des Sonnen- und Mondortes durchgeführt ist, und ist offenbar die Geburtszeit des in der Vorrede erwähnten Gönners des GAURICUS „OCTAVIANUS SFORTIADAE episcopus Aretinus", dessen Geburtsort vermutlich St. Arezzo (Aretium) in Italien ist.

Auch möchte ich gleich hier erwähnen, daß STEINSCHNEIDERS Angabe,[2]) das Datum der Tafeln habe bei ihrem Gebrauch in der Folgezeit fortlaufend Änderungen erfahren, unzutreffend sein dürfte. Wenigstens liegt bei der Nennung des Jahres 1251 ein Mißverständnis vor, indem an der fraglichen Stelle von 1251 Jahren und 5 Monaten als von der seit Christus verflossenen Zeit die Rede ist (annis *completis* 1251 et mens. 5), welche natürlich auf das Krönungsdatum, den 1. Juni 1252 führt.

In der Ausgabe von GAURICUS scheint auch zum ersten Male die

1) A. a. O. II, p. 44. — 2) *Hebr. Übers.* p. 616, 617.

Präzessionstafel des Joannes Blanchinus vorzukommen, welche die „aux communis“, die in den Alfonsinischen Tafeln erst aus einer säkularen Bewegung und einer periodischen Ungleichheit zusammengesetzt werden muß, unmittelbar für die Jahreszahl zu entnehmen gestattet. In einem merkwürdigen Optimismus ist diese Tafel bis zum Jahre 7000 nach Christus ausgedehnt, wo die Periode der Ungleichheit geschlossen ist. Natürlich ist diese Tafel nur nebenher gegeben, während die ursprünglichen Alfonsinischen Präzessionstafeln nach wie vor vorhanden sind.

In den beiden Pariser Ausgaben endlich, welche Delambre „les plus estimées“ nennt, kündigt Paschasius Hammellius eine „restitutio in propriam integritatem“ an. Indessen darf man bei seinen Ausgaben nicht einmal an einen Versuch einer textkritischen Behandlung in heutigem Sinne denken. Er hat nicht nur die Blanchinischen Tafeln und die übrigen Zusätze, die sich nach und nach angesammelt hatten, wieder aufgenommen und sogar das Vorwort von Gauricus wieder abgedruckt, sondern die „propria integritas“ ist so wenig hergestellt, daß man das Mondbeispiel des Gauricus unverändert mit allen Fehlern reproduziert findet. Wenn trotzdem diese Ausgaben mit Vorliebe den Besprechungen zugrunde gelegt werden, so hat dies insofern eine gewisse Berechtigung, als sie gegenwärtig wahrscheinlich noch in den meisten Exemplaren erhalten sind, und weil sie außerdem den leicht lesbaren lateinischen Druck besitzen.

Was die Madrider Ausgabe vom Jahre 1641 anbetrifft, so kann man im Zweifel sein, ob ihre Drucklegung wirklich noch aus einem praktischen Bedürfnis heraus erfolgte, nachdem 1627 bereits die Rudolfinischen Tafeln Keplers erschienen waren. In seiner Vorrede an D. Bernardino Fernandez de Velasco y Tovar, welche sich in den *Libros del saber* (Bd. V, p. 86) abgedruckt findet und auch in Kästners *Geschichte der Mathematik* (Bd. II, p. 312) eingehend besprochen ist, sagt der Herausgeber: Die Zeit habe gesucht, den Ruhm des Königs Alfons zu schmälern. Peurbach, Regiomontan, Copernicus, Reinhold, Tycho Brahe, Kepler und Lansberg hätten genauere Beobachtungen geliefert oder gäben es wenigstens vor, und deswegen habe man an der Wahrheit der Alfonsinischen Tafeln zu zweifeln angefangen. Wenn er aber andererseits sehe, wie Alfons von allen gerühmt werde, und wie man namentlich bei der gregorianischen Kalenderreform die Länge des Alfonsinischen Jahres angenommen habe, so folge für ihn daraus, daß die Alfonsinischen Tafeln am besten von allen mit dem Himmel übereinstimmen („Las Tablas Alfonsinas son las que mas concuerdan con la perpetuidad de los tiempos“).

Wenn man von dieser letzten Ausgabe absieht, die etwas aus dem Rahmen der übrigen herausfällt, so erstrecken sich alle Bearbeitungen und Änderungen nur auf den Text und unwesentliche Hilfstafeln, sowie allen-

falls auf die Anordnung des gesamten Tafelmaterials. Es dürfte eine undankbare Aufgabe sein, die Herkunft jedes einzelnen Teils dieser *Canones* zu ermitteln. Stellt doch STEINSCHNEIDER fest:[1]) „Es gibt also vier Gelehrte namens JOHANN, die fast gleichzeitig in Paris lebten und sich mit Regeln für den Gebrauch der ALFONSinischen Tafeln beschäftigten, deren Arbeiten nicht immer mit dem Namen des Verfassers und wahrscheinlich nicht ohne Verwechselung derselben, abgeschrieben wurden, so daß hier eine Aufgabe zu lösen ist". Ich muß allerdings gestehen, daß mir ungleich wichtiger die Tatsache erscheint, daß die Tafeln selbst in allen Druckausgaben Ziffer für Ziffer übereinstimmen.

## 5. Die Tafelfragmente im IV. Bande der „Libros del saber".

Wie eingangs erwähnt, hat RICO bei seinen umfangreichen bibliographischen Arbeiten auch nach dem kastilianischen Original der ALFONSinischen Planetentafeln geforscht, welches bisher gänzlich unbekannt war, und hat das Resultat seiner Nachforschungen in Gestalt des vollständigen originalen Textes sowie einer Reihe von fragmentarischen Zahlentabellen im IV. Bande der großen spanischen Publikation niedergelegt. Während der Text, wie weiter unter gezeigt werden soll, ohne Zweifel in der Tat das gesuchte Original darstellt, ist RICO in bezug auf die Zahlentabellen offenbar einem Mißverständnisse zum Opfer gefallen, auf welches jedoch meines Wissens bisher noch niemand hingewiesen hat.

Wie wir aus einer Vorbemerkung erfahren, sind diese numerischen Tafeln zwei Codices aus den Jahren 1309 und 1396 entnommen, also jedenfalls nicht aus demselben Kodex, in dem der originale Text entdeckt wurde. Bei näherer Prüfung dieser Tabellen, welche RICO für das Original der ALFONSinischen Planetentafeln ausgibt, zeigt sich, daß sie in Wahrheit eine primitive Art jener im 15. und 16. Jahrhundert unter dem Namen „Almanach perpetuum"[2]) gebräuchlichen immerwährenden Ephemeriden darstellen, bei denen gewisse Perioden tabuliert sind, nach deren Ablauf die Tafeln wieder von vorn benutzt werden. In den RICOschen Tabellen werden unmittelbar die wahren Längen der Planeten gegeben, z. B. die des Merkur für einen Zeitraum von 46 Jahren. In demselben Zeitraum legt aber Merkur sehr nahe 191 ganze siderische Umläufe zurück, so daß nach Ablauf dieser Periode Sonne, Erde und Merkur wieder dieselben Plätze einnehmen, so daß von nun ab die Tabelle wieder von vorn benutzt

1) *Hebr. Übers.* p. 623.

2) Über den Gebrauch des Wortes „Almanach" für Ephemeriden siehe STEINSCHNEIDER, *Über das Wort Almanach;* Biblioth. Mathem. 1888, p. 13. Dort wird auch ein „Almanach perpetuum ad inveniendum vera loca planetarum in signis . . ." erwähnt.

werden kann. Auch die Längen der übrigen Planeten sind in entsprechenden Perioden tabuliert, nämlich

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Merkur | für | 46 | Jahre | = | 190.993 | sider. | Umläufe |
| Venus | „ | 8 | „ | = | 13.004 | „ | „ |
| Mars | „ | 79 | „ | = | 42 002 | „ | „ |
| Jupiter | „ | 83 | „ | = | 6.997 | „ | „ |
| Saturn | „ | 59 | „ | = | 2.003 | „ | „ |

Entsprechend ist auch die Länge der Sonne für einen vierjährigen julianischen Zyklus tabuliert Nur für den Mond war dies Verfahren offenbar nicht mehr in der ursprünglichen Einfachheit durchführbar, und man hat hier die Bewegung in mittlere Bewegung, Argument und Ungleichheiten zerlegt, so daß diese Tafeln eine oberflächliche Ähnlichkeit mit den theoretischen Planetentafeln besitzen. Diesem primitiven Bau der Tafeln entspricht die geringe Genauigkeit, mit der die Längen gegeben sind. Nur die Tafeln für Sonne und Mond geben Minuten und Sekunden, während für die übrigen Planeten nur ganze Grade gegeben sind, und die Breite überhaupt unberücksichtigt bleibt.

Ähnliche immerwährende Ephemeriden sind noch mehrfach aus späterer Zeit bekannt. Besonders sei erwähnt, daß JOHANN LUCILIUS SANTRITTER, derselbe, der auch die ALFONSINischen Tafeln einer Bearbeitung unterzog, im Jahre 1498 zu Venedig (Petrus Liechtenstein) *Ephemerides sive Almanach perpetuum* herausgab, welche auf demselben Prinzip der Tabulierung beruhen. WEIDLER schreibt über ihn: „novam condendarum ephemeridum rationem iniit". Man sieht aber, daß diese Methode schon viel älter gewesen ist. Für die Sonne wählt auch SANTRITTER eine Periode von vier Jahren, für den Mond 31, Mondknoten 93, Venus 8, Merkur 125, Mars 79, Jupiter 83, Saturn 59 Jahre. Man erkennt ohne weiteres die Verwandtschaft dieser Perioden mit den oben angeführten. Noch bekannter sind die Tafeln des ABRAHAM ZACUTH, die nach STEINSCHNEIDER 1478 (mit der Radix 1473) verfaßt wurden und später mehrfach in lateinischer Sprache im Druck erschienen,[1]) z. B. 1502 zu Venedig (Petrus Liechtenstein) unter dem Titel: *Almanach perpetuum exactissime nuper emendatum omnium celi motuum cum additionibus in eo factis tenens complementum.*[2])

1) Sollte dies Werk wirklich einfach als Übersetzung des *Almagests* von ZACUTH anzusehen sein, da es doch lediglich die zahlenmäßigen Ephemeriden nebst ihrer Gebrauchsanweisung enthält, so daß jener Name gar nicht dafür passen würde? Vgl. STEINSCHNEIDER, *Die mathematischen Wissenschaften bei den Juden 1441—1500;* Biblioth. Mathem. $2_3$, 1901, p. 69, sowie BJÖRNBO, Biblioth. Mathem. $2_3$, 1901, p. 198 Anm.

2) Nach HOUZEAU und LANCASTER (a. a. O. I, p. 1487) ist die erste Auflage vom Jahre 1472 (was ja unmöglich ist, wenn die Arbeit zuerst 1478 verfaßt wurde) und sind weitere Ausgaben 1496, 1499, 1502 erschienen. Nach STEINSCHNEIDER (a. a. O. S. 69) erschien die Arbeit zuerst 1496 und zum letztenmal 1572.

Ich habe diesen *Almanach perpetuum* des ZACUTH mit dem vorerwähnten von SANTRITTER verglichen, wobei sich gezeigt hat, daß diese beiden Werke wahrscheinlich identisch sind.[1])

Es dürften aber wohl noch andere Tafelwerke aus jener Zeit existieren, die nach demselben Prinzip entworfen waren.[2]) Immerhin ist diese Art von Ephemeriden nicht sehr verbreitet gewesen und im 16. Jahrhundert wohl wieder ganz abgekommen. In der Tat war diese Methode auch wohl kaum einer weiteren Entwickelung fähig. In der ursprünglichen, einfachen Form mußten die Tafeln sehr ungenau bleiben, mit der verschärften Genauigkeit, wie sie im ZACUTHschen *Almanach* vorhanden ist, wird aber sofort wieder eine Rechnung nötig, um den Planetenort zu erhalten, welche um so umständlicher wird, je weiter die Genauigkeit getrieben wird, so daß man schließlich keinen Vorteil vor den theoretischen Planetentafeln mehr besitzt.

Nach dem vorangegangenen dürfte es nicht mehr zweifelhaft sein, was wir von den numerischen Tafeln im V. Bande der *Libros del saber* zu halten haben. Es bedarf kaum einer Erwähnung, daß ein derartiger „immerwährender Almanach“ in keinem Falle das unbekannte Original der ALFONSinischen Tafeln repräsentieren kann. Wie im nächsten Kapitel zu zeigen ist, passen diese Tafeln auch gar nicht zu dem von RICO selbst ihnen vorausgeschickten Originaltext, welcher vielmehr eigentliche Planetentafeln voranssetzt, in denen die mittleren Bewegungen im Deferent und Epizykel, sowie die verschiedenen Ungleichheiten einzeln tabuliert sind.

1) Über die Urheberschaft der SANTRITTERschen Ephemeriden herrschte bisher keine völlige Gewißheit. Schon KÄSTNER stellte fest: „SANTRITTER sagt nicht, daß die Ephemeriden seine Arbeit sind“. LALANDE führt sie als REGIOMONTANS Ephemeriden, herausgegeben von SANTRITTER, an und tadelt WEIDLER, daß er sie SANTRITTER selbst zuschreibt, „quoique l'éditeur avoue dans la préface que ces Ephémérides sont de REGIOMONTANUS“. Der obengenannten Identität dieser Ephemeriden mit dem ZACUTHschen *Almanach* stehen allerdings mehrere Gründe entgegen. Namentlich sind die SANTRITTERschen Tafeln auf Toledo, die ZACUTHschen dagegen auf Salamanca bezogen. Als entscheidend muß aber gelten, daß die Haupttafeln Ziffer für Ziffer dieselben sind, obwohl die Häufigkeit der Druckfehler an manchen Stellen diese Übereinstimmung fast verschleiert, und bei den Sonnentafeln ganze Seiten geändert zu sein scheinen. Endlich ist aber der Beginn der tabulierten Perioden in beiden Fällen auf den Mittag des letzten Februar 1473 gelegt, was kaum noch einen Zweifel an der Identität zuläßt. Die angegebenen Differenzen würden sich zwanglos durch die Annahme erklären lassen, daß SANTRITTER ein fragmentarisches Manuskript des ZACUTHschen Tafelwerkes in Händen hatte, welches ihm weder über den Verfasser noch über den den Tafeln zugrunde liegenden Meridian Aufschluß gab und ihn obendrein nötigte, einige fehlende Seiten der Sonnentafeln völlig neu zu entwerfen.

2) HOUZEAU und LANCASTER a. a. O. I, p. 1375 führen an: „Almanack planetarum pro omni loco et tempore, cum canone. MS à la Bibl. de l'Université de Cambridge“.

Ich kann nicht einsehen, warum RICO diese Tabellen mit dem glücklich gefundenen Originaltext zusammengestellt hat, mit der Erklärung, er wolle ein Bild von der originalen Form der ALFONSinischen Tafeln geben (Para que . . . pueda la historia de las ciencias consultar y juzgar lo que verdaderamente fueron aquellas en su original . . .), und warum er sie als „Fragmentos numericos de las Taulas ALFONSies“ bezeichnet.

## 6. Das kastilianische Original der Alfonsinischen Tafeln.

Aus dem vorangegangenen Kapitel ist ersichtlich, daß die im IV. Bande der *Libros del saber* irrtümlich als Fragmente der ALFONSinischen Tafeln bezeichneten numerischen Tabellen zu einer besonderen Art von Ephemeriden zu zählen sind und keinesfalls etwas mit den originalen ALFONSinischen Tafeln zu tun haben. Dagegen sehen wir in den ihnen vorausgeschickten 54 Textkapiteln mit voller Wahrscheinlichkeit den originalen und vollständigen Text derselben. Nach der Vorbemerkung RICOS ist er dem Kodex L 97 der Nationalbibliothek zu Madrid entnommen. Obwohl die zugehörigen Tafeln fehlen, lassen sich doch schon aus dem Text allein einige sehr merkwürdige Abweichungen gegen die späteren lateinischen Druckausgaben feststellen. Die Ausdrucksweise des Textes ist ebenso breit und umständlich, wie in dem Werk über die Instrumente, und steht in scharfem Kontrast zu den oft nur allzu knappen Anleitungen der lateinischen Drucke. Das Vorwort lautet in der Übersetzung folgendermaßen:

„Es spricht JEHUDA BEN MOSE (in der ALFONSinischen Schreibweise „YHUDA Sohn des MOSE Sohn des MOSCA“) und ISAAK IBN SID (bei ALFONS RABI ÇAG [= ISAAK] ABEN CAYUT [= ÇAID = SID]): Weil die Wissenschaft der Astronomie ein Gegenstand ist, der nur durch Beobachtungen erforscht werden kann, und die Beobachtungen, welche die diesem Gegenstande obliegenden Gelehrten anstellen, nicht von einem einzigen Menschen vollendet werden können, vielmehr was vollendet wird, durch die Arbeit vieler Menschen vollendet wird, welche einer nach dem anderen lange Zeit hindurch arbeiten, — und dies deswegen, weil es unter den himmlischen Bewegungen einige gibt, die so langsam sind, daß sie erst in Tausenden von Jahren einen Umlauf vollenden, — deswegen also ist es nötig, die Beobachtungen fortzusetzen, weil bei ihrer Fortführung zu der einen Zeit (sazon) Dinge sichtbar werden, die zu einer anderen Zeit nicht sichtbar waren. Und wir nun zu unserer Zeit, welche ist im ersten Jahrzehnt des 4. Jahrhunderts des 2. Jahrtausends der Ära CÄSARS. Und es sind seit der Beobachtungszeit des ZARKALI bisher 200 Jahre verstrichen. Und es erschienen hier an einigen Stellen Abweichungen, offenkundig und klar für den einsichtigen, so daß man keine Ausflüchte dafür angeben kann,

und zu diesem Zeitpunkte erschien die glückliche und von Gott geförderte Regierung und das Königtum des sehr hohen und edlen Herren Don ALONSO, den Gott schütze. Und da er die Gelehrten verehrte und schätzte, ließ er die Instrumente verfertigen, welche PTOLEMÄUS in seinem *Almagest* nennt, von der Art der Armillen und andere Instrumente. Und er trug uns auf, zu beobachten in der Stadt Toledo, welche eine der Hauptstädte Spaniens ist, das Gott erhalte. In ihr fanden die Beobachtungen ZARKALIS statt. Dieser forderte auf, die Abweichungen zu verbessern, welche an den Örtern einiger Planeten und auch an anderen Bewegungen sichtbar waren. Und wir gehorchten der Aufforderung, wie es nötig war, und haben die Instrumente verbessert, damit sie möglichst vollkommen wären, und haben in der Beobachtung einen Sommer lang (una sazon) gearbeitet, und haben die Sonne weiter beobachtet ein ganzes Jahr, und haben sie noch vor- und nachher beobachtet, wenn sie in die Tag- und Nachtgleichen (egualdades) eintrat und in die Wendekreise und in die andern Viertel (quartos) des Himmels, welche in der Mitte des Stiers, des Skorpions, des Löwens und des Wassermanns sind. Und wir haben außerdem einige solche Konjunktionen der Planeten beobachtet, wo sie sich untereinander vereinten, und einige andere, wo sie sich mit Fixsternen verbanden. Und wir haben viele Sonnenfinsternisse und viele Mondfinsternisse beobachtet und haben andere Beobachtungen angestellt, wenn wir irgendwo im Zweifel waren, und haben sie viele Male wiederholt, um den Zweifel zu heben, und haben nichts aufzusuchen und zu erforschen versäumt, bis wir das verbessert sahen, was zu verbessern war. Und als alles geprüft war, da haben wir das, was sicher oder nahezu sicher ist, als korrekt übernommen, und haben auf Grund der Radices, die aus diesen Beobachtungen herausgezogen sind, diese Tafeln hergestellt, und haben in ihnen die Kapitel zusammengefügt, welche uns bei diesem Werke nötig zu sein schienen, und gaben diesem Buch den Namen: das Buch von den ALFONSinischen Tafeln, weil es auf sein Geheiß verfertigt und zusammengestellt wurde, und teilten es in 54 Kapitel, welche die folgenden sind".

Hiernach wäre also außer ISAAK IBN SID auch JEHUDA BEN MOSE Verfasser der Tafeln. Von einem astronomischen Kollegium, durch dessen gemeinsame Arbeit die Tafeln entstanden wären, hören wir dagegen nichts. Auch die Beobachtungen scheinen nur von diesen beiden jüdischen Astronomen ausgeführt worden zu sein. Frühere Autoren zweifelten, ob überhaupt Beobachtungen angestellt seien. Sagt doch z. B. KÄSTNER[1]): „Eigene Beobachtungen finde ich von ihnen gar nicht erwähnt, es scheint also, sie haben sich befriediget, nach Theorien, die sie vor sich fanden,

1) A. a. O. II, p. 312.

zu rechnen, allenfalls noch an denselben zu künsteln, ohne den Himmel selbst zu befragen". Der jüdische Geschichtsschreiber Israeli berichtete dagegen bereits im Jahre 1310 von dem (anscheinend hebräisch verfaßten) Autograph mehrerer Mondfinsternisbeobachtungen, die Isaak ibn Sid in den Jahren 1263—1266 auf Alfons Befehl ausführte.[1]) Auch möchte ich hier an die früher erwähnten 14 Sternpositionen erinnern, die Alfons 1260 durch Beobachtung bestimmen ließ

Von großer Wichtigkeit ist die leider nicht sehr genaue Zeitangabe, welche die bisherige Überlieferung Lügen straft, nach der die Tafeln 1252 vollendet sein sollen. Das „erste Jahrzehnt des 4. Jahrhunderts des 2. Jahrtausends der Ära Cäsars" ist offenbar der Zeitraum von 1300—1310 der cäsarischen oder 1262—1272 der christlichen Ära. Hieraus ist zu schließen, daß die Tafeln am Schluß dieser Beobachtungsperiode, also um 1272 oder rund 1270 fertiggestellt wurden.[2]) Wegen dieser späten Zeit haben manche Autoren in Anlehnung an die Überlieferung von einer Umrechnung der Tafeln angenommen, dieser Originaltext stelle die umgerechnete Ausgabe dar, während die ursprüngliche bereits 1252 vollendet wurde. Dies ist schon deswegen sehr unwahrscheinlich, weil in unserem Text mit keinem Worte einer früheren Redaktion Erwähnung geschieht. Nach meiner Auffassung haben wir hier das eigentliche Original vor uns, und die Überlieferung der Jahreszahl 1252 beruht auf einem Irrtum. In der Tat unterliegt es keinem Zweifel, daß zur Zeit, wo die lateinischen Ausgaben verbreitet waren, das kastilianische Original völlig unbekannt war. Bei dem Mangel an zuverlässigen Nachrichten über die Entstehung der Tafeln, und bei dem Fehlen jeglicher Angaben hierüber in den lateinischen Ausgaben selbst lag es natürlich nahe, die Abfassung derselben auf denjenigen Zeitpunkt zu verlegen, welcher in ihnen die Rolle der Fundamentalepoche spielte oder doch unverkennbar gespielt hatte, nämlich das Krönungsdatum Alfons X. (Radix Alfonsi regis). Diesen naheliegenden Fehlschluß haben offenbar alle Autoren des Mittelalters und auf ihnen basierend die der Neuzeit getan, während die wirklichen Vorgänge bei der Entstehung der Tafeln ebenso wie das kastilianische Original derselben vollkommen unbekannt waren.

Gleich das erste der auf das Vorwort folgenden Kapitel ist wiederum von Wichtigkeit, da es von der Fundamentalepoche der Tafeln handelt. Zunächst wird mit einer verschwenderischen Wortfülle eine neue Ära, die Ära Alfonsi, begründet: „Und wir sahen, daß in dieser unserer Zeit ein beachtenswertes und der Ehrung würdiges Ereignis stattfand, von derselben Bedeutung wie alle die vorangegangenen (es war die Rede gewesen von

---

1) Steinschneider, *Hebr. Übers.* p. 617. — 2) Rico gibt 1272.

der Ära ALEXANDERS, CÄSARS etc.). Und dies ist die Regierung des Königs Don ALONSO, welcher an Weisheit, Verstand, Einsicht, Gerechtigkeit, Güte, Frömmigkeit und Edelmut die weisesten Könige übertrifft. Und deswegen beschlossen wir, dasjenige Jahr zum Beginn der Ära zu nehmen, an welchem dieser edle König zu regieren begann etc.". Der Beginn der ALFONSinischen Ära wird darauf genauer auf den Anfang des Jahres 1252 festgesetzt, so daß der 1. Januar dieses Jahres der erste Tag der ALFONSinischen Ära ist. Die Fundamentalepoche der Tafeln aber, auf welche sich alle Radices beziehen, wird als der Mittag des 0. Januar 1252 angegeben. Dies wird in der umständlichen Weise durch folgende Worte umschrieben: „Diese Radix ist der Mittag des Sonntages, welcher vor dem Montag ist, an welchem der Januar in dem ersten Jahr der Ära dieser Tafeln beginnt". In den lateinischen Druckausgaben der ALFONSinischen Tafeln wird zwar überall die „radix incarnationis" benutzt, allein es finden sich daneben noch Radix-Tafeln, in welchen neben der „radix diluvii", „ALEXANDRI magni", „CAESARIS" etc. auch eine „radix ALFONSI regis" für jede Bewegung gegeben wird, ohne aber zur Verwendung zu gelangen. Diese Radix gilt jedoch für das Krönungsdatum, den 1. Juni 1252, denn man erhält sie aus der „radix incarnationis" durch Addition der Bewegung in $1251^a\ 152^d$. Dasselbe Datum ist in den Drucken auch als die Epoche des Sternkatalogs bezeichnet, was wir bereits als Irrtum nachgewiesen haben, sowie als der Beginn der dortigen Era ALFONSI. Die Drucke haben also die Fundamentalepoche nicht lediglich auf den Beginn unserer Zeitrechnung übertragen, was keine große Änderung bedeuten würde, sondern was wesentlicher ist, ihre „radix ALFONSI" bezieht sich auf das Krönungs*datum*, während diejenige der originalen Tafeln sich auf den *Beginn* des Krönungs*jahres* bezieht.

Des weiteren wird in unserem Text angegeben, die Tafeln seien für den Meridian von Toledo, der Geburtsstadt ALFONS, berechnet, und es werden die geographischen Koordinaten von Toledo gegeben, wobei das Wort „aryn" — die „civitas Arim" der ältesten Druckausgabe — zur Bezeichnung einer Art von Anfangs- oder Normalmeridian gebraucht wird. Obwohl die Stelle etwas verdorben zu sein scheint, lassen die Zahlenangaben doch keinen Zweifel über den Sinn dieser Darlegung. Arim liegt auf dem Äquator und im Mittelpunkt der damals bekannten Welt. 90° westlich davon liegt der Westpunkt, 90° östlich der Ostpunkt. Toledo liegt nun 62° westlich von Arim oder 28° östlich des Westpunktes oder drittens 152° westlich des Ostpunktes. Die Breite wird zu 39° 54′ gegen 41° der Druckausgaben angegeben. Die genannte Art der Längenzählung findet sich nur in einer einzigen der späteren Druckausgaben der Tafeln, nämlich der ältesten vom Jahre 1483, wieder, während alle späteren nur die Längen-

differenz gegen Toledo in Zeit tabulieren. In dieser ältesten Ausgabe wird zwischen einem wahren Westpunkt (occidens verum) und einem bewohnten Westpunkt (occidens habitatum) unterschieden, welch letzterer 17° 30′ östlich von jenem liegt. Die civitae Arim liegt nun 90° östlich des occidens verum, so daß sie vom occidens habitatum nur 72° 30′ entfernt ist. 90° östlich von ihr liegt dann wie früher der Ostpunkt. In der Tabelle findet sich die Länge von Toledo zu 11° angegeben, und zwar vom occidens habitatum. Um also diejenige vom occidens verum, die auch im originalen Text gegeben ist, zu erhalten, haben wir 17° 30′ zu addieren und bekommen 28° 30′ gegen die 28° des Originaltextes. Unter dem occidens habitatum verstand man den westlichsten Punkt der glückseligen (kanarischen) Inseln, das occidens verum aber war ein fingierter Punkt westlich davon auf dem Ozean. Die Stadt Arim im Mittelpunkt der damals bekannten Welt soll zuerst von Zarkali als Anfangsmeridian eingeführt worden sein.[1])

In dem Originaltext der Alfonsinischen Tafeln folgen des weiteren die Anleitungen zu den chronologischen Tabellen, welche wir übergehen, und sodann diejenigen für die Planetentafeln. Hier findet sich wieder eine sehr merkwürdige Abweichung gegen die lateinischen Drucke. Das Kapitel XV gibt eine allgemeine Anweisung, wie man für ein gegebenes Datum eine beliebige mittlere Bewegung zu entnehmen hat. Mit der seit der Fundamentalepoche verflossenen Zeit geht man zuerst in die Tafel der „annos collectos“, welche von 20 zu 20 Jahren fortschreitet, ein, darauf mit dem Rest der Zeit, welcher kleiner als 20 Jahre ist, in die Tafel der „annos espansos“, die von Jahr zu Jahr fortschreitet, dann mit den Monaten in die Tafel der „meses“, mit den Tagen in die der „dias“ und endlich in die der „oras“ und der „menudos“. Die entnommenen Werte, welche in Gestalt von „signos, grados, menudos, segundos“ gegeben sind, werden summiert, wodurch man die gewünschte mittlere Bewegung für das Datum erhält. Unter den „signos“ sind stets die später als „signa communia“ benannten Größen zu 30° verstanden, welche unmittelbar den 12 Zeichen des Tierkreises nachgebildet sind, wärend in den lateinischen Drucken überall „signa physica“ zu 60° verwendet werden.[2]) Ungleich wichtiger ist indessen diese Rechnungsvorschrift als Ganzes, denn sie setzt einen

1) Vgl. E. Mayer, *Die Geschichte des ersten Meridians und die Zählung der geographischen Länge;* Mitteil. aus d. Gebiete d. Seewesens 6, 1878, No. II und III.

2) Cantors Bemerkung (*Vorles. üb. Gesch. d. Math.* II², p. 177), die von Johann von Gemunden gebrauchten signa phisica zu 60° seien schon in den 1252 verfaßten Alfonsinischen Tafeln enthalten gewesen, trifft daher offenbar für das Original derselben nicht zu.

Bau der betreffenden Tafeln voraus, welche der heute üblichen Tabulierung mittlerer Bewegungen entspricht und demnach völlig verschieden von dem gerade so charakteristischen Bau der betreffenden Tafeln in den lateinischen Druckausgaben ist. Bei letzteren ist nämlich die seit der Fundamentalepoche — hier Christns — verflossene Zeit, welche als Tafelargument dienen soll, zuvor in einem eigentümlichen Sexagesimalsystem auszudrücken, dessen Grundeinheit der Tag ist, von welchem aus sowohl nach unten als anch nach oben neue sexagesimale Einheiten gebildet werden. So ist, um ein Beispiel anzuführen, für das Datum 1477 Sept. $20^d\ 6^h\ 1^m\ 36^s$ dies Tafelargument gleich $2^{\underline{4}}\ 29^{\underline{3}}\ 49^{\underline{2}}\ 32^{\underline{1}}\ 15^{\overline{m}}\ 4^{\overline{2}}\ 0^{\overline{3}}$, wobei $1^{\underline{1}} = 1$ Tag, $1^{\underline{2}} = 60$ Tage und $1^{\overline{m}} = \frac{1}{60}$ Tag ist usw. Die Tabulierung ist dann so erfolgt, daß die Tafel nnr die Änderung des betreffenden Winkels in der seit der Fundamentalepoche verflossenen Zeit gibt, zu welcher man noch die Radix, d. i. den Stand dieses Winkels zur Fundamentalepoche selbst als Konstante zu addieren hat, um den gesuchten Stand für das Datum zu erhalten. Vermöge des eingeführten Sexagesimalsystems ist es aber möglich, mit nur einer Tafel für diese Änderung des Winkels auszukommen, deren Argument von 0 bis 60 läuft; man geht nämlich nacheinander mit den verschiedenen sexagesimalen Ordnungen in die Tafel ein, in unserem Beispiel znerst mit der 2, dann mit der 29 usw., wobei man natürlich jedesmal die Benennung des Tafelwertes um eine Stelle weiterrücken muß. Addiert man schließlich die erhaltenen Einzelwerte und fügt, wie erwähnt, noch die Radix hinzu, so hat man die gesuchte mittlere Bewegung für das Datum. Diese Einrichtung, welche die augenfälligste Eigentümlichkeit der lateinischen Druckausgaben der ALFONSinischen Tafeln bildet, ist also in dem kastilianischen Original nicht vorhanden gewesen. Vielmehr ist hier der auch heute übliche Weg eingeschlagen, der keiner weiteren Erläuterung bedarf. JOHANNES SCHONER, welcher nm 1537 in Gestalt seiner *Tabulae resolutae* eine Umrechnung der ALFONSinischen Tafeln gab, indem er die mittleren Bewegungen wieder in der heute üblichen Form tabulierte, ahnte wohl nicht, daß er sich damit wieder der ursprünglichen Gestalt dieses Tafelwerkes näherte.

Die folgenden Kapitel des Originaltextes geben die speziellen Anweisungen znm Gebrauch der Planetentafeln. Es geht aus ihnen hervor, daß die Tafeln der Ungleichheiten im kastilianischen Original genau denselben Bau besessen haben wie in den späteren Druckausgaben. Die termini technici der letzteren sind lediglich Übersetzungen der entsprechenden spanischen Ausdrücke. Tabnliert war die „eguacion del centro“ (aeqnatio centri), ferner die „eguacion dell argumento“ (aequatio argumenti), ferner die „diversidat del diametro“ (diversitas diametri), und zwar sowohl für die „longura mas luenga“ (longitudo longior), als auch für die „longura

mas çerca“ oder „çercana“ (longitudo propior), und endlich die „menudos proporcionales“ (minuta proportionalia). Die Bedeutung dieser Größen stimmt mit den lateinischen terminis vollkommen überein, und die Rechnungsvorschriften sind so gleichartig, daß man — von ganz unerheblichen Änderungen abgesehen — den kastilianischen Originaltext als Anleitung zu den Planetentafeln der lateinischen Drucke benutzen kann. Hieraus ist ohne weiteres ersichtlich, daß die von Rico publizierten numerischen Tafelfragmente, in denen einfach die wahre Länge für eine gewisse Periode gegeben ist, gar nicht zu dem originalen Text passen, daß dieser vielmehr ganz andere Tafeln voraussetzt, welche zwar in bezug auf die mittleren Bewegungen von den späteren Druckausgaben erheblich abwichen, aber doch keineswegs den einfachen Bau jener immerwährenden Ephemeriden besessen haben.

Sind schon diese Unterschiede zwischen dem kastilianischen Original und der lateinischen Redaktion der Tafeln sehr merkwürdig, so gilt dies womöglich in noch höherem Maße von der Präzessionstheorie. Dieselbe wird in dem Kapitel XLIX des Ricoschen Originaltextes auseinandergesetzt.

Man hat zu unterscheiden zwischen natürlichen Örtern (logares naturales) und eigenen Örtern (logares propios) der Planeten. Erstere werden gezählt vom natürlichen Anfangspunkt, welcher in der äußersten, nicht gestirnten Himmelssphäre liegt (en el cielo alto, raso ò no estrellado) und einen absoluten Fixpunkt darstellt, der nur die tägliche Drehung des Himmelsgewölbes mitmacht. Innerhalb dieser äußersten Sphäre liegt die Sphäre der Fixsterne (cielo estrellado), und von ihrem Frühlingspunkt, der also unter den Fixsternen eine feste Lage hat, werden die eigenen Örter gezählt. Der absolute Fixpunkt der äußersten Sphäre ist das, was wir heute den beweglichen Frühlingspunkt nennen, und in ihm steht die Sonne tatsächlich in jedem Frühlingsäquinoktium. Die innere Sphäre mit den Fixsternen war es nach der damaligen Auffassung, welche sich gegen diesen absoluten Fixpunkt verschob. Diese Auffassung ist also der unserigen gerade entgegengesetzt, denn wir lassen die Fixsterne ruhen und den wahren Frühlingspunkt wandern. Aus den Tafeln resultieren unmittelbar nur die eigenen Örter, indem nur die Bewegung in bezug auf die Sterne tabuliert ist. Das Ziel der Rechnung aber müssen die auf den absoluten Fixpunkt bezogenen natürlichen Örter bilden, denn da in diesem Punkte die Sonne in jedem Frühlingsäquinoktium steht, so beziehen sich auch alle Beobachtungen auf ihn. Die infolgedessen am fertigen Tafelorte anzubringende Korrektion ist so tabuliert, daß man mit der Zeit zunächst einen Winkel entnimmt, welcher mittlere Bewegung des Widderkopfes heißt. Dieser dient aber nur als Argument für eine zweite Tafel, die Tafel des Vorrückens und Zurückweichens (allongamiento et tornamiento = accessus et recessus). Erst aus dieser wird die definitive Korrektion ent-

nommen, welche positiv von 0 bis 180°, negativ von 180° bis 360° des Arguments ist. Die Maximalgröße wird nicht mitgeteilt. Hier ist also gar keine säkulare Präzession, sondern nur ein periodisches Hin- nnd Herschwanken des Frühlingspunktes, die sogen. Trepidation angenommen. Für 0 und 180° des Tafelarguments wird diese Korrektion Null, und die Frühlingspunkte im gestirnten und nicht gestirnten Himmel fallen zusammen, „und die eigenen Örter der Planeten werden gleich den natürlichen Örtern selbst sein, ohne irgend einen Unterschied“.

Ganz anders ist die Präzessionstheorie der lateinischen Drucke. Hier wird zwar ebenfalls die unrichtige Trepidation angenommen, aber die aus ihr in Gestalt einer periodischen Ungleichheit entspringende Korrektion wird zu einer säkularen Präzession in unserem Sinne addiert und ergibt erst so die vollständige Korrektion. Infolgedessen sind hier drei Tafeln gegeben, eine solche, aus welcher man mit der Zeit die gleichförmig wachsende säkulare Präzession entnimmt, eine zweite, aus der man den ebenfalls gleichförmig wachsenden Argumentwinkel der Trepidation erhält, mit welchem sodann aus der dritten Tafel die periodische Ungleichheit, die Trepidation, entnommen wird. Auch die Art der Anbringung dieser Korrektion ist hier eine andere, indem sie in die Berechnung des Planetenortes verflochten wird. Man korrigiert nämlich die für die Fundamentalepoche gegebene Länge des Perigäums, welche eine Konstante darstellt, um diesen Präzessions- und Trepidationsbetrag, und erhält so die für das Datum gültige Länge des Apogäums. Mit der letzteren wird die Rechnung des Planetenortes durchgeführt, wodurch man unmittelbar den auf Präzession korrigierten Ort erhält.[1])

---

1) So einfach die Präzessionstheorie der Druckausgaben auf den ersten Blick erscheint, so kompliziert werden die Erscheinungen, wenn man die Theorie geometrisch his in die Einzelheiten durchzuführen sucht. Im 16. Jahrhnndert hestanden die lehhaftesten Kontroversen nicht nur üher die wahre Beschaffenheit der Trepidation, sondern auch speziell darüber, wie die in den Alfonsinischen Tafeln gegebene Theorie zu verstehen sei. Ein interessantes Beispiel für die Unsicherheit der Theorie geben auch die Alfonsinischen Tafeln selbst. Alle Druckansgaben haben die Vorschrift, daß die Breiten hei Sternreduktionen ungeändert bleihen: „Latitudines autem immntare ne attentes, quandoquidem omni aevo eaedem manent“ (Ausgabe 1553). Gauricus jedoch, der den Fixsternkatalog auf 1500 reduzierte und sich offenbar eingehender mit der Präzessionstheorie beschäftigt hatte, sagt hezeichnenderweise, er habe den Vorschriften folgend, die Breiten ungeändert gelassen, nach seiner Ansicht müßten sie sich aher infolge der Trepidation seit Ptolemäus um 20′ geändert haben: „Latitudines autem non mutavimus adhuc sectantes vestigia Hyparci, Ptolemaei et Alfonsi regis. Qui arhitrahantur stellas fixas in latitndine ah ecliptica semper in eodem loco sihi fixam ac perpetuam sedem vindicasse. Verum enim vero propter motum titubationis octavae sphaerae ego arhitror omnes stellas fixas ad austrum declinasse per 20′ fere, ab Ptolemaei observationihus ad nostra haec tempora.“

Die originalen Planetentafeln weichen also nicht nur in bezug auf die Tabulierung der mittleren Bewegungen, sowie in der Fundamentalepoche, sondern auch in bezug auf die Präzessionstheorie ganz erheblich von den lateinischen Druckausgaben der späteren Zeit ab, und die übel beleumundeten Perioden von 49000 und 7000 Jahren, welche Isaak ibn Sid nach kabalistischen Ideen[1]) für die Bewegung des Frühlingspunktes angenommen haben soll, waren also jedenfalls in dieser Form nicht im Original vorhanden gewesen.

Wir müssen hier noch auf einen Punkt zurückkommen, den wir bisher zurückgeschoben hatten, um die Darstellung nicht zu unterbrechen. Es betrifft dies die Überlieferung von der angeblich 1256 erfolgten Umrechnung der Tafeln. Diese von neueren Autoren viel zitierte Nachricht findet man bei Riccioli, der sie von Ritius hat, welch letzterer wiederum auf seinen Lehrer Abraham Zacuth zurückgreift. Es heißt, nachdem Alfons im Jahre 1252 die Planetentafeln herausgegeben habe, sei ihm 1256 von Jehuda ben Mose seine Übersetzung des Werkes von Al-Sufi über die Fixsterne vorgelegt worden, in der die Präzessionstheorie des Albategnius (1° in 66 Jahren) vertreten sei; hierdurch habe sich Alfons zu dieser Theorie bekehrt und die Planetentafeln danach umrechnen lassen. Die Drnckausgaben stellten also hiernach die ursprünglichere Form dar, während die verbesserten Tafeln unbekannt seien. Wir werden sehen, was von dieser Überlieferung übrig bleibt, sobald man sie etwas schärfer ins Auge faßt. Was schreibt denn Abraham Zacuth? Björnbo hat uns die betreffende Stelle seines hebräischen Werkes in der Übersetzung mitgeteilt:[2]) „Wir finden auch in dem Werke über die Fixsterne, welches er (d h. König Alfons), gemäß seiner Zeit, vier Jahre nach den Tafeln herausgegeben hat, daß er zurückgekommen ist (d. h. von seiner oben erwähnten irrigen Meinung); denn er sagt, daß die Achte (Sphaera) zweifellos immer vorwärts schreitet, wie es Ptolemäus geschrieben hat. Dieses Werk das ist dasselbe Werk, welches Rabbi Jehuda Sohn Mose der Kohen dem König übersetzt hat. Dieses Werk hat der Weise, welcher genannt wird Abul Hosein (Al-Sufi) verfaßt . . .“. Wo wäre hier die Rede von einer Umrechnung der Planetentafeln? Zacuth, der mit seinen Zeitgenossen die irrige Ansicht teilte, daß die Tafeln 1252 entworfen seien, mußte folglich die 1256 erfolgte Übersetzung des Al-Sufi und die dabei ausgeführte Reduktion des Sternkatalogs desselben für das spätere Werk halten, woraus er schloß, daß Alfons sich jetzt zu der darin vertretenen Präzessionstheorie von 1° in 66 Jahren bekehrt habe. Er führt dies nur

1) Der Sabbat- und Jubelperiode entsprechend.

2) Biblioth. Mathem. $3_3$, 1901, p. 199.

an, um seine Abweichung von den zu seiner Zeit verbreiteten lateinischen *Tabulae Alfonsinae* mit ihrer aus Trepidation und säkularer Präzession gemischten Theorie dadurch zu rechtfertigen, daß auch ALFONS selber diese Theorie später aufgegeben habe, wie man aus dem angeführten Werk ersehen könne.

Wie sieht nun diese Überlieferung bei RITIUS aus? Bei ihm heißt es:[1]) „Eodem modo (nämlich mit 1° für 66 Jahre) latas esse stellas cernere licet a MILLEO (MENELAUS) ad ALPHONSUM (hier ist gemeint die Reduktion des AL-SUFIschen Katalogs auf 1256), in qua re aduertendum est, regem ALPHONSUM primo fuisse oppinatum (gemeint ist: in den Tafeln), stellas motu duplici scilicet titubationis (d. i. die Trepidation), et motu augium communium (d. i. die säkulare Präzession) none sphere agitari, sicuti et nunc communiter creditur, canones tabularum ALFONSI id causantes; attamen quattuor annis postea quam tabulas planetarum composuerit, anno scilicet ab incarnatione 1256, quum, translatum ex arabico in hispalensium idioma, librum sapientissimi viri ALBUHASSIN quidam Rabi JUDA nomine, Judeus, regi obtulerit, quem librum »de stellarum fixarum motu atqui locis« ALBUHASSIN composuerat (= AL-SUFI), et in quo ALPHONSUS probatam ALBATENI sententiam, locaque stellarum optime et fideliter signata reperit. Tunc revocata priori sententia . . . ., ALBATENI sententiam complexus est, et stellas fixas . . . secundum hanc eandem sententiam locavit etc." Daher sei die Epoche des Sternkatalogs nicht 1252 sondern 1256, wovon schon weiter oben die Rede war. Auch hier ist noch nirgends von einer Umrechnung der Planetentafeln die Rede, sondern nur davon, daß ALFONS bei der 1256 ausgeführten Reduktion des AL-SUFIschen Sternkatalogs nicht die aus seinen Tafeln bekannte Präzessionstheorie, sondern die einfache des ALBATEGNIUS verwendete, doch legt hier die Ausdrucksweise bereits eine Verwechselung nahe.

Sehen wir nun zu, was RICCIOLI aus dieser Nachricht gemacht hat. Er zitiert RITIUS wörtlich, schreibt dann aber an einer anderen Stelle:[2]) „secutus ALBATEGNIUM alteram fixarum tabulam (dieser Ausdruck ist bereits mißverständlich) edidit diversam a Canone pristino motus Augium et fixarum. Ita narrat ABRAHAM ZAGUTHUS in sua Magna Compositione . . ." und wiederum:[3]) „secutus est ALBATEGNIUM, et correctiores tabulas de praedicto motu (hier liegt das Mißverständnis zu Tage) ac locis fixarum edidit anno 1256, quas vidisse se testantur ABRAHAM ZAGUTUS apud RICCIUM in tractatu de motu octavae Sphaerae, et Cardinalis CUSANUS."

1) Zitiert nach BJÖRNBO, Biblioth. Mathem. $3_3$, 1901, p. 198.

2) *Almagestum novum* p. 166.

3) *Almagestum novum* p. XXX.

Mir scheint es hiernach völlig unzweifelhaft, daß die ganze Überlieferung von der 1256 erfolgten Umrechnung der Planetentafeln auf einer irrtümlichen Auslegung jener Stellen bei RITIUS und ZACUTH entstanden ist, wo nur von der Übersetzung des AL-SUFI und der dabei ausgeführten Reduktion der Sternörter auf das Jahr 1256 die Rede ist.

Wenn sich hiermit nun auch diese ganze Überlieferung in ein einfaches Mißverständnis aufgelöst hat, so sind wir allerdings wegen der oben auseinandergesetzten Diskrepanzen zwischen dem originalen Text und den lateinischen Ausgaben um so sicherer, daß tatsächlich in den ersten 50 Jahren sehr merkwürdige Veränderungen mit den Tafeln vor sich gegangen sind. Es ist mir nicht gelungen, über diesen Punkt Klarheit zu gewinnen, und es dürfte hier wohl eine größere Erfahrung namentlich auf bibliographischem Gebiet nötig sein, als mir zu Gebote steht. Ich will daher nur ganz kurz das Material mitteilen, das ich bisher habe sammeln können.

RICO, dem die Abweichungen des Originaltextes von den lateinischen Ausgaben nicht verborgen geblieben sind, scheint eine Fälschung oder Unterschiebung anzunehmen. Auf Grund seiner umfangreichen Untersuchungen kommt er zu dem Schluß, daß wahrscheinlich zuerst in Barcelona Fälschungen der ALFONSinischen Werke entstanden seien. Diese Schriften seien dann nach Deutschland und in die Hände eines JOHANNES DE SAXONIA gelangt, der aus ihnen eine vermeintliche neue Ausgabe der ALFONSinischen Tafeln zusammengestellt habe, „welche wie die Bücher von Barcelona mit dem Original nicht mehr als den Titel gemein hatte“. Bei diesen Darlegungen gebraucht RICO stets Worte wie „adulteracion“, „corruptela“, und besonders häufig „falsificacion“, so daß es scheint, als habe er eine bewußt ausgeführte Fälschung angenommen. Diese Ansicht ist auch in einem von RICO angeführten Zitat von TORNAMIRA (1583) vertreten, in dem es heißt: „alles dies ist erläutert worden, . . . damit man sehe, daß jemand die Tafeln mit der Trepidation . . . gefälscht hat, . . , weil von ALFONS nicht zu glauben ist, daß er sie in seine Tafeln aufnahm, sondern daß jemand die ursprünglichen entfernte und die falschen nach seinem Kopfe hineinsetzte“. RICO selbst schließt eine dieser Darlegungen mit den Worten: „Folglich wurden die wahren Werke des Königs D. ALFONSO unbeachtet in Sevilla aufbewahrt. Ihr Name allein und einige gefälschte Blätter (algunos quadernos ficticios) gelangten im Anfange des 14. Jahrhunderts über die Grenzen der iberischen Halbinsel, um dort von JOHANNES DE SAXONIA, BRIXIA, JOHANNES DE LINERIIS und etwa 50 anderen Gelehrten, bis zu COPERNICUS Zeiten, studiert und erläutert zu werden. Da diese nicht wußten, daß ihre literarischen Arbeiten auf der Basis einer Fälschung (base falsificada) beruhten, konnten sie glauben, sie hätten klassische Werke von großer Bedeutung erschlossen.“

Ricos Darlegungen sind allerdings mehrfach von anderen Forschern angegriffen worden,[1]) und man wird Steinschneider Recht geben, wenn er erklärt, über diese Dinge seien die Akten noch nicht geschlossen.

In der Literatur des 13. bis 15. Jahrhunderts ist viel von einer „Verbesserung" der Alfonsinischen Tafeln die Rede. Leider habe ich diese Spuren nicht weiter verfolgen können, will aber doch diejenigen Werke angeben, die ich mir aus Houzeau und Lancaster[2]) herausgeschrieben habe, und die wohl Beiträge zu unserer Frage liefern dürften.

Expositio tabularum Alphonsi et motiva probantia earum falsitatem. MS. du XV$^e$ siècle à la Bibl. nationale de Paris.

Sermo de usu tabularum Alphonsi. MS. à la Bibl. de l'Université d'Oxford.

Expositio intentionis Regis Alphonsi circa tabulas ejusdem. MS. du XV$^e$ siècle à la Bibl. nationale de Paris.

Tractatus de correctione motuum coelestium Alphonsi. MS. à la Bibl. de l'Université d'Oxford.

Canones pro tabulis corrigendis regis Alphonsi, MS du XVI$^e$ siècle à la Bibl. impériale de Vienne.

Baten, H., Tractatus de erroribus tabularum Alphonsi; 1290, MS.

Nicolaus de Limeto, Tabulae Alphonsinae correctae. MS. au British Museum (fonds Harley). Ouvrage composé en 1386.

Bessarion, J., Canon stellarum Correctis numeris Alphonsinis. MS.

Schließlich möchte ich einer Stelle aus den *Ephemerides novae . . . ad a. 1551* des Georg Joachim Rhaeticus (Lipsiae 1550) gedenken, auf welche mich Herr Eneström freundlichst aufmerksam machte. Sie lautet:[3])

„ . . . Alphonsus rex Hispaniae . . . Hic quidem divinitus ad hanc curam suscitatus (i. e. correctionis tabularum motuum coelest.) . . . labescere etiam opus quamvis praeclarum necesse fuit. Itaque post annos statim quadraginta, Guilhelmus quidam de S. Glodialdo, notas Alfonsinis quasi decisionibus apponere ausus fuit, de suis observationibus, quod idem paulo post fecit et Prophatius Judaeus. Hos secuti sunt Joannes Blanchinus, Georgius Purpachius, Joannes Regiomontanus Francus, Bernardus Gualterus, Dominicus Maria . . ."

Ich gebe aber auch diese Notiz mit allem Vorbehalt wieder, da es mir sehr unwahrscheinlich erscheint, daß Rhaeticus über diese Dinge gut unterrichtet gewesen sein sollte, die seinem Zeitalter so unbekannt waren.

---

1) Vgl. Steinschneider, *Die Mathematik bei den Juden;* Biblioth. Mathem. 1899, p. 38.

2) A. a. O. I, p. 1367, 1370, 1374.

3) Zitiert nach Birkenmajer, *Mikołaj Kopernik* I, p. 446 Anm.

# Über eine von Euler aufgestellte allgemeine Konvergenzbedingung.

Von G. Eneström in Stockholm.

Daß die Cauchysche Konvergenzbedingung

$$\lim_{n=\infty} \left| S_{n+m} - S_n \right| = 0 \qquad S_r = a_0 + a_1 + \cdots + a_r$$

für eine unendliche Reihe schon einige Jahre vor Cauchy von Bolzano angegeben wurde, ist längst bekannt,[1]) daß aber dieselbe Konvergenzbedingung schon in einer Abhandlung von Euler[2]) aus der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts vorkommt, hat meines Wissens erst R. Reiff im Jahre 1889 behauptet.[3]) Gegen diese Behauptung hat indessen A. Pringsheim geltend gemacht,[4]) daß Euler an der betreffenden Stelle nur sagt, eine Reihe divergiere, wenn

$$\lim_{n=\infty} \left| S_{kn} - S_n \right| > 0,$$

und in der Tat endet der von Reiff als Beleg angeführte Passus mit den Worten: „Ex quo consequitur, si id quod ex continuatione ultra terminum infinitesimum oritur, sit finitae magnitudinis, summam seriei necessario infinitam esse debere"; noch dazu bezieht sich das von Reiff angeführte Eulersche Beispiel auf eine divergente Reihe. Zieht man dagegen in Betracht, daß der von Reiff zitierte Passus mit den Worten: „Series, quae in infinitum continuata summam habet finitam" beginnt, so wird es wenigstens wahrscheinlich, daß Euler nicht *nur* eine *Divergenz*bedingung angegeben hat, und die Frage verdient also näher untersucht zu werden.

1) Vgl. z. B. O. Stolz, *B. Bolzanos Bedeutung in der Geschichte der Infinitesimalrechnung;* Mathem. Ann. 18, 1881, S. 255—279 (speziell S. 259). A. Pringsheim hat in der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* 1 : 1 (1898), S. 146 erwähnt, daß Fourier noch früher (1811) eine genügende Definition der Reihenkonvergenz gegeben hat. Ob diese Definition wesentlich mit der Cauchyschen Bedingung übereinstimmt, weiß ich nicht, da es mir nicht gelang, auf der von Herrn Pringsheim zitierten Seite der Pariser Mémoires eine Definition der Reihenkonvergenz aufzufinden.

2) Euler, *De progressionibus harmonicis observationes;* Comment. acad. sc. Petrop. 7, 1734—1735 (gedruckt 1740), S. 150—161.

3) R. Reiff, *Geschichte der unendlichen Reihen*, Tübingen 1889, S. 118—119.

4) A. Pringsheim, a. a. O. S. 78.

Für diesen Zweck drucke ich zuerst den Passus ab, um den es sich hier in erster Linie handelt:

Series, quae in infinitum continuata summam habet finitam, etiamsi ea duplo longius continuetur nullum accipiet augmentum, sed id, quod post infinitum adiicitur cogitatione, re vera erit infinite parvum. Nisi enim hoc ita se haberet, summa seriei etsi in infinitum continuatae non esset determinata, et propterea non finita. Ex quo consequitur, si id, quod ex continuatione ultra terminum infinitesimum oritur, sit finitae magnitudinis, summam seriei necessario infinitam esse debere. Ex hoc ergo principio judicare poterimus, utrum seriei cujusque propositae summa sit infinita, an finita.

Schon aus diesem Passus scheint mir unzweideutig hervorzugehen, daß Euler nicht nur die Divergenzbedingung

$$\lim_{n=\infty} \left| S_{2n} - S_n \right| > 0,$$

sondern auch die Konvergenzbedingung

$$\lim_{n=\infty} \left| S_{2n} - S_n \right| = 0$$

angegeben hat. Daß er diese letztere Bedingung als notwendig für die Konvergenz der Reihe betrachtet, geht direkt aus dem Wortlaut hervor, ob er die Bedingung auch hinreichend findet, wird durch die Schlußworte nicht deutlich angegeben.

Viel deutlicher drückt sich Euler dagegen etwas weiter unten in derselben Abhandlung aus, wo er die Reihe, deren allgemeiner Term

$$\frac{c}{a + r^\alpha b}$$

ist, behandelt. Auch diese Stelle gebe ich hier wieder:

Ex his colligere licet, quibus casibus haec series magis universalis

$$\frac{c}{a}, \frac{c}{a+b}, \frac{c}{a+2^\alpha b}, \text{ etc.}$$

in infinitum usque ad $\frac{c}{a+i^\alpha b}$ habeat summam finitam, vel infinitam. Sequantur enim terminum ultimum termini $\overline{n-1}\cdot i$, eritque horum summa minor quam $\frac{\overline{n-1}\cdot c}{i^{\alpha-1} b}$, at major quam $\frac{\overline{n-1}\cdot c}{n^\alpha i^{\alpha-1} c}$. Quare si fuerit $a$ numerus unitate major, summa horum terminorum seqnentium erit $= 0$, et propterea summa progressionis finita.

Hier behauptet also Euler ausdrücklich, daß

$$\lim_{n=\infty} \left| S_{kn} - S_n \right| = 0$$

nicht nur eine notwendige, sondern auch eine hinreichende Bedingung für die *Konvergenz* der von ihm erwähnten Reihe ist.

Nun ist es ja richtig, daß die Zahl der von Euler in Betracht gezogenen Terme der Reihe nicht durchaus beliebig, sondern ein Multipel von $n$ ist, aber dieser Umstand scheint mir weniger wichtig, da seine Begründung der Konvergenzbedingung gültig bleibt, wenn man diese Zahl gleich $(k+1)\,n - k'$ setzt ($k' < n$, $k$ und $k'$ sonst beliebige ganze positive Zahlen).

Dagegen gibt es einen Umstand, der meiner Ansicht nach den Wert der Eulerschen Entdeckung der Konvergenzbedingung wesentlich vermindert, nämlich, daß Euler die Wichtigkeit dieser Entdeckung nicht erkannt hat. In der Tat ist die Konvergenzbedingung nur im Vorübergehen ausgesprochen und zwar in einer Abhandlung, deren Zweck ist eine schon längst bekannte Art von *divergenten* Reihen (die harmonischen Reihen) zu untersuchen. So weit mir bekannt ist, hat sich Euler in keiner seiner späteren Arbeiten mit dieser Konvergenzbedingung beschäftigt, woraus wohl gefolgert werden darf, daß er ihre grundlegende Bedeutung nicht einsah. Meines Wissens hat auch kein anderer Mathematiker des 18. Jahrhunderts diese Bedeutung erkannt, und in den mir zugänglichen mathematischen Schriften aus dem 18. Jahrhundert habe ich vergebens eine Erwähnung der Eulerschen Konvergenzbedingung gesucht. Die Entdeckung scheint also durchaus unbeachtet geblieben zu sein, und die Mathematiker, die am Anfange des 19. Jahrhunderts die Konvergenzfrage in Angriff nahmen, waren sicherlich nicht von Euler beeinflußt. In einer *Entwickelungsgeschichte* der Mathematik könnte also die Eulersche Entdeckung übergangen werden, wenn man darin nur den historischen Zusammenhang zwischen den mathematischen Errungenschaften darstellen wollte. Auf der anderen Seite ist der Umstand, daß weder Euler selbst noch seine Zeitgenossen die Bedeutung der allgemeinen Konvergenzbedingung verstanden, gerade für die Entwickelungsgeschichte der Mathematik von Belang, weil er einen wichtigen Beitrag zur Charakteristik der Mathematik des 18. Jahrhunderts bietet.[1]

Auch von einem anderen Gesichtspunkte aus ist die Eulersche Konvergenzbedingung von Interesse. Sie findet sich nämlich, wie ich schon bemerkt habe, in einer Abhandlung über harmonische Reihen, und da es schon von Jakob Bernoulli bewiesen wurde,[2] daß diese Reihen divergent

1) Vgl. G. Eneström, *Über literarische und wissenschaftliche Geschichtsschreibung auf dem Gebiete der Mathematik;* Biblioth. Mathem. $2_3$, 1901, S. 4.

2) Siehe z. B. A. Pringsheim, a. a. O. S. 78. Jakob Bernoulli schreibt die Bemerkung, daß die Summe der harmonischen Reihe unendlich ist, seinem Bruder Johann zu; indessen scheint es, als oh Leibniz schon früher diese Eigenschaft der harmonischen Reihe gefunden hätte (vgl. Leibnizens *Mathematische Schriften herausg. von* C. I. Gerhardt V, S. 406—407; VII, S. 177).

waren, so hatte EULER eigentlich keinen direkten Grund, sich in seiner Abhandlung auf die Frage nach allgemeinen Konvergenz- oder Divergenzbedingungen einzulassen. Wenn er es dennoch getan hat, darf man wohl annehmen, daß er bei seiner Beschäftigung mit den harmonischen Reihen zu seiner Entdeckung der Konvergenzbedingung gelangte, und diese Entdeckung hat meines Erachtens für die Wissenschaft viel größeren Wert als der eigentliche Inhalt der EULERschen Abhandlung, — ich sehe natürlich von dem Umstande ab, daß die Entdeckung tatsächlich unfruchtbar blieb, und noch einmal gemacht werden mußte. Es liegt also hier ein Fall vor, in dem ein nebenbei erhaltenes Resultat einer Untersuchung in Wirklichkeit belangreicher als das wirklich beabsichtigte ist, und solche Fälle verdienen meiner Ansicht nach besonders notiert zu werden.[1])

1) Vgl. G. ENESTRÖM, *Welcher Platz gebührt der Geschichte der Mathematik in einer Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften;* Verhandl d. 3. internat. Mathematiker-Kongresses in Heidelberg 1904, Leipzig 1905, S. 549.

# The theory of functions with Cauchy and Gauß.

By Philip E. B. Jourdain in Broadwindsor.

The purpose of the following paper is, firsty, to emphasise that the origin of some of the most characteristic points of the contributions made by Cauchy to the theory of functions of both a real and a complex variable (viz., the meaning of imaginaries, the continuity of a function, the definite integral, as well as his theorem on complex integration) is to be found in his memoir on definite integrals of 1814 (§§ 1—3); secondly, to contrast the method by which Gauss started from the theorem on complex integration (which he seems to have proved, in or before 1811, by the application of a special case of Green's theorem, just as Cauchy did in 1846[1]) and Riemann in 1851) and obtained nearly the same resnlt that Cauchy obtained long before his theorem on complex integration, — namely that, in certain cases, reversal of the order of integration in a double integral is impossible (§ 5). Finally, in § 6 will be found a short discussion of the geometrical nature of Cauchy's analytical conceptions.

I begin, then, with a fuller account of the memoir of 1814 than is generally given.[2])

## 1. Cauchy's memoir of 1814 on definite integrals.

The object which Cauchy gave, in the introduction to his memoir of 1814 on definite integrals,[3]) as having led to the conception of that

1) On the origin of this method of Cauchy's, see below, § 4.

2) Cf. Brill and Noether, *Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen;* Jahresber. der deutschen Mathematiker-Vereinigung, 3, 1894, p. 165—169; Stäckel, in the German translation of Cauchys memoir of 1825 (see below) in Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 112, p. 67—70.

3) *Mémoire sur la théorie des intégrales définies* [1814]; Mémoires présentés par divers savants (sciences mathématiques et physiques) $1_2$, 1825 (Paris 1827), p. 599—799. *Oeuvres* (1) t. I, p. 319—506.

work, was the establishment of the passage from the real to the imaginary in certain processes for evaluating definite integrals used by EULER and LAPLACE on a direct and rigorous analysis.

If $y$ is a real function of the real variables $x$ and $z$, then

$$(1)\qquad \frac{\partial}{\partial z}\left[f(y)\frac{\partial y}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(y)\frac{\partial y}{\partial z}\right];$$

a result which CAUCHY obtained from the equality

$$\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial x}\int f(y)\,dy = \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\int f(y)\,dy.$$

The equation (1) subsists even when $y$ and $f(y)$ become partly imaginary. Thus, let $y = M + \sqrt{-1}\,N$, where $M$ and $N$ are real functions of $x$ and $z$, and similarly let $f(y) = P' + \sqrt{-1}\,P''$; then the single equation (1) may be replaced by the two equations between real quantities

$$(2)\qquad \frac{\partial S}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial x},\ \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial x},$$

where

$$S = P'\frac{\partial M}{\partial x} - P''\frac{\partial N}{\partial x}, \dots .$$

Now, these two equations (2) contain, in CAUCHY's words, „the whole theory of the passage from the real to the imaginary", — a statement which seems to mean that the subsistence of the pair of real equations (2) is the necessary and sufficient condition for the subsistence of the *single* imaginary equation deduced immediately from (1).[1] Integrating the

1) In the *Cours d'analyse* of 1821 (*Oeuvres* [2] t. III), chapter VII, CAUCHY stated these views on imaginary expressions more fully: „Every imaginary equation is only the symbolic representation of two equations between real quantities". Imaginary expressions are „symbolical expressions, which, interpreted literally and according to conventions generally established, have no meaning", but, if we operate on them according to the rules established for *real* quantities, we get exact results, which are often important. Thus, one can find $\cos(a+b)$ and $\sin(a+b)$ by equating the real (and the imaginary) parts of the known equation:

$$\cos(a+b) + \sqrt{-1}\sin(a+b) = (\cos a + \sqrt{-1}\sin a)(\cos b + \sqrt{-1}\sin b);$$

and we easily get the theorem on the sum of squares of integers by multiplying

$$(\alpha + \sqrt{-1}\,\beta)\ (\alpha' + \sqrt{-1}\,\beta')\ \text{by}\ (\alpha - \sqrt{-1}\,\beta)\ (\alpha' - \sqrt{-1}\,\beta').$$

This treatment of imaginaries is one of the characteristic novelties of the *Cours* (the others are the criteria of convergence, — for the exact *conception* of convergence was already familiar to FOURIER, — and the conception of the continuity of a function, the origin of which, as is pointed out below, is to be found in this memoir of 1814), and CAUCHY spent much time in devising analytical substitutes for the direct use of imaginary quantities (cf. *Exercices d'analyse*, t. IV, 1847, p. 87—110).

It may also be noticed that CAUCHY did not use GAUSS' symbol ($i$) for the

equations (2) with respect to both $x$ and $z$, we have, since one integration on each side can be effected at once,

$$(3)\quad \int (S'' - S')\,dx = \int (U'' - U')\,dz,\ \int (T'' - T')\,dx = \int (V'' - V')\,dz,$$

where the accents serve to represent the values at the limits of integration. We suppose that $S$, $T$, $U$, and $V$ „preserve determined values“ between the limits of integration; the case where they become indeterminate at one or more points between these limits will be considered later.

The equations (3) give numerous relations between definite integrals, and the rest of the first part of Cauchy's memoir was devoted to applications of (3). Thus, first of all, he supposed

$$M = x,\ N = z,\ f(y) = e^{-y^2},$$

and obtained, for example,

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2xz\, dx = \frac{1}{2} e^{-z^2} \pi^{\frac{1}{2}}.$$

Other suppositions were then made for $M$, $N$, $f(y)$, and the limits.

The validity of the equations (3) assumes, firstly, that it is always easy to convert indefinite integrals into definite ones by the formula

$$(4)\qquad \int_{b'}^{b''} \varphi'(z)\,dz = \varphi(b'') - \varphi(b').$$

But, if $\varphi$ „does not increase or decrease continuously between the limits“ and, for $z = Z$, „passes suddenly from one determined value to another sensibly different, so that, denoting by $\zeta$ a very small quantity, we have

$$\varphi(Z + \zeta) - \varphi(Z - \zeta) = \Delta,“$$

then the value of the integral (4) must be diminished by $\Delta$.[1]) This conception of the „continuity“ of a function,[2]) to which Cauchy attached too much importance in his later works,[3]) seems to have been suggested by Fourier's discovery of such discontinuous functions capable of analytical expression, — a discovery which gave the deathblow to Euler's conception of a function;[4]) and in this place Cauchy first mentioned the advantage of

imaginary until 1851 (see Brill and Noether, op. cit. p. 194), and, accordingly, the symbol $\sqrt{-1}$ alone is used in §§ 1—3 below.

1) See end of note 1) on the next page.

2) The precis definition is in the *Cours d'analyse*, § 11 of chapter 11.

3) By this I mean that he required continuity of an integrand for his definition of an integral, and also for the subsistence of his (complex) integration theorem. The former supposition is unnecessarily wide, the latter too narrow.

4) See Brill and Noether, op. cit. p. 161—162; Pringsheim, *Encykl. d. mathem. Wiss.* II A 1, p. 6.

considering the integral as the limit of a sum,[1]) instead of considering, with EULER, integration as primarily the inverse of differentiation.

1) The precise definition is in the *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* of 1823 (*Oeuvres* [2] t. IV), leçon 21 (cf. also Journ. de l'éc. polyt., t. XII, cahier 19 [1823], p. 571).

The conception of an integral as the limit of a sum (or rather as an infinite sum of infinitesimal elements) was the original (LEIBNIZ) one, but CAUCHY first gave a precise analytical formulation of the problem involved, and the curve $y = f(x)$, whose area is expressed by the definite integral, was, accordingly, replaced by the continuous function $f(x)$. If, then, $f(x)$ is continuous for every value of $x$ between the two finite and determined numbers $x_0$ and $X$ (say $X > x_0$), and the interval $x_0 \ldots X$ subdivided by values $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ such that

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < X,$$

and the sum

$$(a) \qquad (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1})$$

is formed; then it must be shown that, as each of the (positive) subdivisions $x_\nu - x_{\nu-1}$ decreases to zero, and consequently $n$ increases indefinitely, the sum $(a)$ tends to some definite limit, independently of how the subdividing points $(x_\nu)$ are chosen.

This was, in essentials, effected by CAUCHY. This method was, firstly, to divide each of the $n$ intervals in $(a)$ into others; the values of such sums as $(a)$ corresponding to these two modes of subdivision do not differ sensibly, if each $x_\nu - x_{\nu-1}$ in $(a)$ is very small (as by a well-known mean-value theorem, $(x_\nu - x_{\nu-1}) f(x_{\nu-1})$ becomes, on the second subdivision, $(x_\nu - x_{\nu-1}) (f(x_{\nu-1}) + \varepsilon_{\nu-1})$, where $\varepsilon_{\nu-1}$ is small). Secondly, any other mode of subdivision (by points $x_1', x_2', \ldots, x_{m-1}'$) was compared, by superposition, with the first one.

The limit whose existence is thus established was denoted by

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx,$$

and the function

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx$$

was proved to be continuous in the range of continuity $(x_0 \ldots X)$ of $f(x)$, and also

$$F'(x) = f(x).$$

Thus, in this order of things, the existence of a function whose derivative is $f(x)$ is not assumed, as it is if we start, in the usual way, from the indefinite integral — that is to say, from the assumption of the existence of a solution of the equation

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

— and the advantage was emphasised by CAUCHY in his preface. The point of view thus attained of clearly seeing the necessity of proving the existence of solutions of differential equations became prominent in CAUCHYS works and had a decisive influence on the tendency of mathematical thought.

Secondly,[1] if the integrand becomes infinite or indeterminate[2] for certain values of the variables, the double integral is quite indeterminate, and the two different orders of integration appear to give two different determinate values.

In the double integral

$$\int_{a'}^{a''}\int_{b'}^{b''} \frac{\partial\varphi(x,z)}{\partial z}\, dz\, dx$$

let the integrand, and therefore $\varphi$, become indeterminate at the point $(a', b')$ from which the integration starts. To find the value of the integral when we substitute in all elements the values of $x$ before these of $z$ (reverse the order of integration), it evidently suffices to take the integral between the limits $x = a' + \varepsilon, x = a''$, and $z = b' + \zeta, z = b''$, and then suppose $\zeta$ to vanish. As we do this before or after the integration relative to $x$, we get the value of the double integral when we substitute $z$ before $x$ or inversely.

We have

$$\int_{b'+\zeta}^{b''} \frac{\partial\varphi}{\partial z}\, dz = \varphi(x, b'') - \varphi(x, b' + \zeta),$$

In the above case, the integral-function $F(x)$ is continuous, and

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx = F(X) - F(x_0),$$

but a different state of things was shown, in the memoir of 1814 (see *Oeuvres* [1] t. 1, p. 402—406) by the example

$$\int_{-2}^{+4} \frac{dx}{x}.$$

Here the integral-function is $\log x$, and, if $\zeta$ is infinitely small,

$$\log(x - \zeta) - \log(x + \zeta) = 0$$

except when $x = 0$, when it is $\log(-1)$; so that

$$\int_{-2}^{+4} \frac{dx}{x} = \log(4) - \log(-2) + \log(-1) = \log(4) - \log(2) = \int_{2}^{4} \frac{dx}{x}.$$

1) Part 2 of the memoir of 1814 — on the difficulties which the integration of the equations (2) may offer.

2) Cauchy remarked that a function of two variables is sometimes *totally* indeterminate (of the form $\frac{0}{0}$), for it tends to different limits according to which variable goes to its limit first, whereas with functions of *one* variable the indeterminateness is only apparent, for it has the value $\lim_{x=a} f(x)$. [It hardly needs pointing out that the indeterminateness is only apparent if $f(x)$ is *assumed* to be continuous at $x = a$.] Cf. the remark, in § 5 below, on Gauss.

so that the double integral required is

$$(6)\qquad \int_{a'}^{a''} \varphi(x, b'')\,dx - \int_{a'}^{a''} (x, b' + \zeta)\,dx.$$

If we suppose $\zeta = 0$ before the integration of (5), (6) is

$$(7)\qquad \int_{a'}^{a''} \varphi(x, b'')\,dx - \int_{a'}^{a''} \varphi(x, b')\,dx;$$

while the value of the double integral when we substitute $x$ before $z$ is given by adding to (7) a quantity

$$A = \int_{a'}^{a''} \left[\varphi(x, b') - \varphi(x, b' + \zeta)\right] dx,$$

where $\zeta = 0$ after the integration. Now

$$\int_{a'}^{a''} \varphi(x, b' + \zeta)\,dx = \int_{a'}^{a'+\varepsilon} \varphi(x, b' + \zeta)\,dx + \int_{a'+\varepsilon}^{a''} \varphi(x, b' + \zeta)\,dx;$$

the first integral on the right may be written

$$\int_0^{\varepsilon} \varphi(a' + \xi,\ b' + \zeta)\,d\xi;$$

and, as $\varphi\ (x, b' + \zeta)$ keeps definite between $x = a' + \varepsilon$ and $x = a''$, the second integral keeps the same value whether $\zeta$ is made to vanish before or after the integration. Since, further, $\varepsilon$ can be supposed as small as wished, we may write, for this second integral,

$$(8)\qquad \int_{a'}^{a''} \varphi(x, b')\,dx;$$

so that

$$A = -\int_0^{\varepsilon} \varphi(a' + \xi,\ b' + \zeta)\,d\xi,$$

$\varepsilon$ being very small and $\zeta$ is made to vanish after the integration. In a similar manner the $A$'s for points of indetermination at other corners of the rectangle are found, and, when the point is on the side of or inside the rectangle, the $A$ is formed by the addition of, respectively, two and four terms.[1] Thus, in the latter case, the singular point being $(X, Z)$,

---

1) As an example of the foregoing, let $\varphi(x, z) = \frac{z}{x^2 + z^2}$, which is indeterminate at the point (0, 0). The integral

$$\int_0^1\!\int_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial z}\,dz\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{4},$$

$$A=\int_0^{\epsilon}\left[\varphi(X-\xi,Z-\zeta)+\varphi(X+\xi,Z+\zeta)-\varphi(X-\xi,Z+\zeta)-\varphi(X+\xi,Z-\zeta)\right]d\xi,$$

and, for many points of indeterminateness, we form the sum of the $A$'s.

The conception of „singular integrals", which was the name given by Cauchy to the expressions $A$, was developed, for functions of one (real) variable in 1823,[1]) in the *Résumé des leçons . . . sur le calcul infinitésimal*, where is also stated the *conventional* nature of the statement, made use of in 1814, made use of in (8).

## 2. Cauchy's „singular" integrals.

The limiting value of a certain sum denoted by

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx$$

was defined,[2]) in the first place, when $f(x)$ is one-valued, finite, and continuous between the (finite) limits of integration, but when $x_0$ or $X$ becomes infinite, or when $f(x)$ does not remain finite and continuous from $x_0$ to $X$, „it suffices to extend, by analogy", the theorems abbreviated by

$$\int_{x_0}^{X}=\lim_{\xi_0=x_0,\ \xi=X}\int_{\xi_0}^{\xi},\quad \int_{x_0}^{X}=\int_{x_0}^{x_1}+\int_{x_1}^{x_2}+\cdots+\int_{x_{n-1}}^{X}$$

„to the cases even where they cannot be demonstrated rigorously".[3]) Thus, if $f(x)$ becomes infinite for $x=a$ of the interval, but elsewhere in the interval is finite and continuous, we define

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\,dx=\lim_{\epsilon=0}\left\{\int_{x_0}^{a-\epsilon\mu} f(x)\,dx+\int_{a+\epsilon\nu}^{X} f(x)\,dx\right\},$$

where $\varepsilon$ is positive, and $\mu$ and $\nu$ are positive constants. When $\mu=\nu=1$, we get the „principal value" ($P$) of the integral in question, and

$$(9)\qquad \int_{x_0}^{X} f(x)\,dx-P=\lim_{\epsilon=0}\left\{\int_{a-\epsilon}^{a-\epsilon\mu} f(x)\,dx+\int_{a+\epsilon\nu}^{a+\epsilon} f(x)\,dx\right\}.$$

while, by reversal of the order of integration, the addition

$$A=-\int_0^{\epsilon}\varphi(\xi,\zeta)\,d\xi=-\arctan\frac{\epsilon}{\zeta}$$

(the negative of the smallest of the positive arcs) is to be made, and this, when $\zeta=0$, is $-\frac{\pi}{2}$.

1) *Résumé des leçons données à l'école royale polytechnique sur le calcul infinitésimal* (1823); *Oeuvres* (2) t. IV, p. 5—261.

2) Cauchy, op. cit. leçon 21.

3) Ibid. leçons 24, 25.

The two integrals on the right, — integrals taken between infinitely near limits, infinitely near an infinity of $f(x)$, — are „singular integrals"; and they are easily found if $f(x)$ is infinite in such a way that

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{a - x},$$

where $\varphi(x)$ is not zero or infinite for $x = a$. Then (9) gives

$$\int_{x_0}^{X} f(x)\, dx = H + \varphi(a) \cdot \log \frac{\mu}{\nu},$$

by the first theorem of the meam value, and this depends on the choice of the constants $\mu$ and $\nu$.

## 3. The origin of the conception of a definite integral with imaginary limits.

With the aid of the *Résumé* of 1823, we can now state more precisely the results of CAUCHY's memoir of 1814.

Where

$$\frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \chi(x,y)}{\partial x},$$

and both sides remain finite and continuous between the limits of integration,

$$(10) \qquad \int_{x_0}^{X} [\varphi(x, Y) - \varphi(x, y_0)]\, dx = \int_{y_0}^{Y} [\chi(X, y) - \chi(x_0, y)]\, dy.$$

But if $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ (and therefore $\varphi$) becomes indefinite at $(a, b)$ (which we here suppose to be *within* the rectangle of integration), the double integral

$$\int_{x_0}^{X} \int_{y^0}^{Y} \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dy\, dx$$

is, by convention,

$$\lim_{\varepsilon = 0} \int_{x_0}^{X} dx \left[ \int_{y_0}^{b-\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dy + \int_{b+\varepsilon}^{Y} \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dy \right] = \int_{x_0}^{X} \left[ \varphi(x, b - \varepsilon) - \varphi(x, b + \varepsilon) \right] dx + I,$$

where $I$ is the integral on the left of (10). Here we take the *principal values*, and if, also, we avoid the singularity $\frac{\partial \chi}{\partial x}$ at $x = a$, by integrating up to and from the same distance $\varepsilon$ of it, we find that

$$\int_{y_0}^{Y} \int_{x_0}^{X} \frac{\partial \chi}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{y_0}^{Y} \left[ \chi(a - \varepsilon, y) - \chi(a + \varepsilon, y) \right] dy + I',$$

where $I'$ is the integral on the right of (10).

Since, now, as long as the singular points are avoided, the order of the integrations can be reversed, we have, by equating the right-hand sides of the last two equations,

$$(11)\quad I-I'=\int_{x_0}^{X}\left[\varphi(x,b-\varepsilon)-\varphi(x,b+\varepsilon)\right]dx-\int_{y_0}^{Y}\left[\chi(a-\varepsilon,y)-\chi(a+\varepsilon,y)\right]dy.$$

As for the first integral on the right, since

$$\int_{x_0}^{X}=\int_{x_0}^{a-\varepsilon}+\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon}+\int_{a+\varepsilon}^{X},$$

and, for the first and third ranges of integration on the right of this, we can make the $\varepsilon$'s in the integrand vanish *before* integration, we reduce it, by the change of variable

$$x=a+\xi,$$

to a singular integral between the limits $-\varepsilon$ and $+\varepsilon$. Operating in a similar manner with the second integral, (11) becomes

$$(12)\quad I-I'=\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\left[\varphi(a+\xi,b-\varepsilon)-\varphi(a+\xi,b+\varepsilon)\right.$$
$$\left.-\chi(a-\varepsilon,b+\xi)+\chi(a+\varepsilon,b+\xi)\right]d\xi.$$

This equation (12) represents, by a singular integral, the difference of the values obtained by integrating

$$\iint\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy\,dx$$

in the two manners (with respect to $y$ first, and $x$ first) *in the usual manner*, that is to say, so as to get the difference

$$I-I'.$$

Now

$$\varphi=f(u)\frac{\partial u}{\partial x},\ \chi=f(u)\frac{\partial u}{\partial y},$$

where $u$ is some function of $x$ and $y$. If

$$u=x+\sqrt{-1}\,y,$$

we have

$$(13)\quad I-I'=\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\left[f(a+\sqrt{-1}\,b+\xi-\sqrt{-1}\,\varepsilon)-f(a+\sqrt{-1}\,b+\xi+\sqrt{-1}\,\varepsilon)\right.$$
$$\left.-\sqrt{-1}\,f(a+\sqrt{-1}\,b-\varepsilon+\sqrt{-1}\,\xi)+\sqrt{-1}\,f(a+\sqrt{-1}\,b+\varepsilon+\sqrt{-1})\,\xi\right]d\xi.$$

Suppose that $f(x+\sqrt{-1}\,y)$ becomes infinite at the point $(a,b)$ in such a way that, near this point,

$$f(x+\sqrt{-1}\,y)=\frac{\boldsymbol{f}}{x-a+\sqrt{-1}\,(y-b)},$$

where $\boldsymbol{f}$ is finite and not zero. If, then, $\eta$ is an infinitely small number, we have, without sensible error,

$$\boldsymbol{f}=\eta\, f(a+\sqrt{-1}\,b+\eta).$$

Thus, since $\xi$ varies between the infinitely small limits $-\varepsilon$ and $+\varepsilon$, we have, sensibly,

$$f(a+\sqrt{-1}\,b+\xi-\sqrt{-1}\,\varepsilon)=\frac{\boldsymbol{f}}{\xi-\sqrt{-1}\,\varepsilon},$$

and so on; consequently the integral on the right of (13) is, sensibly,

$$\boldsymbol{f}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\left[\frac{1}{\xi-\sqrt{-1}\,\varepsilon}-\frac{1}{\xi+\sqrt{-1}\,\varepsilon}-\frac{\sqrt{-1}}{\varepsilon+\sqrt{-1}\,\xi}+\frac{\sqrt{-1}}{\varepsilon+\sqrt{-1}\,\xi}\right]d\xi$$

$$=4\sqrt{-1}\,\boldsymbol{f}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{\varepsilon\,d\xi}{\varepsilon^2+\xi^2}=2\sqrt{-1}\,\pi\boldsymbol{f}.$$

In the case, then, that

$$u=x+\sqrt{-1}\,y,$$

the value of the difference $I-I'$ is easily determined *in general* when we work with the equation (13) as whole, without separating it into two real equations.[1]) Writing this equation in full

$$(14)\qquad \int_{x_0}^{X}\left[f(x+\sqrt{-1}\,Y)-f(x+\sqrt{-1}\,y_0)\right]dx$$
$$-\sqrt{-1}\int_{y}^{Y}\left[f(X+\sqrt{-1}\,y)-f(x_0+\sqrt{-1}\,y)\right]dy=2\pi\sqrt{-1}\,\boldsymbol{f};$$

and considering $x$ and $y$ as the rectangular coordinates of a point in a plane, the equation (14) expresses a relation between the integrals taken along the sides of a rectangle bounded by the lines

$$x=x_0,\ x=X,\ y=y_0,\ y=Y.$$

1) This seems to be Cauchy's motive for considering functions of the form $f(x+\sqrt{-1}\,y)$ in particular, instead of the more general $f(M+\sqrt{-1}\,N)$.

Writing (14) in the form

$$(15)\qquad \int_{x_0}^{X} f(x+\sqrt{-1}\,y_0)\,dx + \sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y} f(X+\sqrt{-1}\,y)\,dy$$
$$= \int_{x_0}^{X} f(x+\sqrt{-1}\,Y)\,dx + \sqrt{-1}\int_{y_0}^{Y} f(x_0+\sqrt{-1}\,y)\,dy + \Delta,$$

where

$$\Delta = 2\pi\sqrt{-1}\,(f_1+f_2+\cdots),$$

the sum in the brackets being that of the terms due to the occurrence of infinities of the kind stated within the rectangle, the above result that the difference in integrating from $(x_0, y_0)$ to $(X, Y)$ along different sides of the rectangle depends only on $\Delta$. The equation (15) was first given by Cauchy in 1822;[1]) and, if we suppose, further, that $f(x+\sqrt{-1}\,y)$ vanishes for $x = \pm\infty$, whatever $y$ is, and for $y = \infty$, whatever $x$ is, and then take

$$x_0 = -\infty,\ X = +\infty,\ y_0 = 0,\ Y = \infty,$$

(15) becomes
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \Delta,$$

which gave the value of almost all the definite integrals then known, as well as many new ones.[2])

The theorem (15) is easily generalised to the theorem that the value of

$$(16)\qquad \int_{x_0+\sqrt{-1}\,y_0}^{X+\sqrt{-1}\,Y} f(z)\,dz,$$

where $z = x + \sqrt{-1}\,y$, is independent of the path of integration followed from $(x_0, y_0)$ to $(X, Y)$, provided that between no two of the paths does (the one-valued) $f(z)$ cease to be finite and continuous, and the purpose of Cauchy's *Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires* of 1825 is to define exactly what is to be understood by a definite integral taken between imaginary limits, to prove directly and generally the above theorem, and to apply it to the evaluation of definite integrals.[3])

1) Cf. Stäckel, op. cit. p. 70.

2) Cf. Stäckel, op. cit. p. 76 (note 12), 72.

3) We can now see that Cauchy's „principal values" are really of importance in complex integration. For, if, for example, $z = 0$ is a singular point for $f(z)$, we have $\int_{-1}^{+1} f(z)\,dz = \lim_{\epsilon=0}\left(\int_{-1}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{1}\right) f(z)\,dz + I$, $I$ being the integral of $f(z)$ taken along a small semi-circle round the origin, and *all three integrals are now determinate.*

In conformity with his definition of an integral between real limits, Cauchy defined (16) as the limit, „or one of the limits", of the sum

$$\sum_{\nu=0}^{n-1}\left[\left(x_{\nu+1}-x_\nu\right)+\sqrt{-1}\left(y_{\nu+1}-y_\nu\right)\right] f\left(x_\nu+\sqrt{-1}\,y_\nu\right),$$

where $x_n = X$ and $y_n = Y$, and the terms of both

$$x_0, x_1, \cdots, X,$$

and

$$y_0, y_1, \cdots, Y$$

increase or decrease continually from the first to the last. We get two such series if we suppose

$$x = \varphi(t),\ y = \chi(t), \tag{17}$$

where $\varphi$ and $\chi$ are continuous functions, increasing or decreasing from $t_0$ to $T$ (to which correspond the initial and final values of $x$ and $y$), and thus (16) becomes

$$\int_{t_0}^{T}\left(x'+\sqrt{-1}\,y'\right) f\left(x+\sqrt{-1}\,y\right) dt, \tag{18}$$

where $x$ and $y$ are replaced by the expressions in (17).

The proof that (18) is independent of the functions $\varphi$ and $\chi$, so long as $f\left(x+\sqrt{-1}\,y\right)$ remains finite and continuous when $x$ and $y$ remain between their limits, was carried through by the method of variations. Let the functions $\varphi$ and $\chi$ increase by the infinitely small quantities $\varepsilon u$ and $\varepsilon v$ respectively, where $u$ and $v$ are functions of $t$, vanishing at the limits of $t$. Developing the corresponding increase of (18) in ascending powers of $\varepsilon$, we find the infinitely small term of the first order is the product of $\varepsilon$ with

$$\int_{t_0}^{T}\left[\left(u+\sqrt{-1}\,v\right)\left(x'+\sqrt{-1}\,y'\right) f'\left(x+\sqrt{-1}\,y\right)+\left(u'+\sqrt{-1}\,v'\right) f\left(x+\sqrt{-1}\,y\right)\right] dt,$$

which vanishes, as we see by a partial integration. Hence, the increase of (18) is of the second or higher order, and, when $x$ and $y$ increase successively by infinitesimals of the first order whose sum is finite, the increase of (18) is of the first order, or zero.

But when $f(z)$ is infinite for $x = a$, $y = b$ $(t = \tau)$ in such a manner that $\left[x-a+\sqrt{-1}\,(y-b)\right] f\left(x+\sqrt{-1}\,y\right)$ approaches, when $x$ and $y$ approach $a$ and $b$ respectively, the finite limit $f$; so that, if $\varepsilon$ is an infinitely small nomber, we have sensibly

$$f = \varepsilon f\left(a+\sqrt{-1}\,b+\varepsilon\right),$$

the increase of (18) when $x$ and $y$ are very near $a$ and $b$, which by the theorem just proved, is equal to the difference of two integrals between limits very near to $\tau$ (singular integrals), is found to be $\mp \pi \sqrt{-1}\, f$, according as

$$x'v - y'u$$

is positive or negative for $t = \tau$. This, in geometrical language, is the difference in value of two integrals of which one is taken along a path infinitely near the singularity but on the same side of it as the other path; and so[1]) the difference in value of two integrals taken along any two paths enclosing the singularity is

$$\pm 2\pi \sqrt{-1}\, f.$$

If the above $f$ were infinite, owing to many roots ($m$) of

$$\frac{1}{f(z)} = 0$$

coinciding, and putting

$$(z - a - \sqrt{-1}\, b)^m f(z) = f(z),$$

$f(a + \sqrt{-1}\, b)$ is finite, and putting

$$f(z) = f(a + \sqrt{-1}\, b) + \frac{f(a + \sqrt{-1}\, b)}{1}(z - a - \sqrt{-1}\, b) + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(m-1)}(a + \sqrt{-1}\, b)}{1.2.3\ldots(m-1)}(z - a - \sqrt{-1}\, b)^{m-1} + (z - a - \sqrt{-1}\, b)^m \varpi(x),$$

$\varpi(x)$ has, in general, a finite[2]) value, and the previous $f$ must be replaced by

$$f = \frac{f^{(m-1)}(a + \sqrt{-1}\, b)}{1.2.3\ldots(m-1)},$$

or what comes to the same thing, by

$$f = \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)} \frac{d^{m-1}\left[\varepsilon^m f(a + \sqrt{-1}\, b + \varepsilon)\right]}{d\varepsilon^{m-1}}.$$

1) The geometrical aspect of CAUCHY's results on integration was dealt with in § 9 of the memoir of 1825; the definitions of (16) and (18) and the proofs of his theorems were expressed in a purely analytical manner.

2) It is here *assumed* that $f(z)$ has derivatives at $z = a + \sqrt{-1}\, b$. However, if $f'(z)$ *alone*, is supposed to exist the existence of $f^{(n)}(z)$ can be proved by representing $f'(z)$ by the „integral-formula":

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_c \frac{f(t)\, dt}{(t - z)^2},$$

and then calculating $f''(z)$. . . . .

When many singularities lie between the paths of integration, the difference in value of the integrals is expressed by a sum:

$$\pm \Delta = \pm 2\pi\sqrt{-1}\,(f_1 + f_2 + \cdots),$$

and a comparison of the integrals, each taken round two sides of a rectangle in a different direction, gave CAUCHY the formula (15), which was applied to evaluate many integrals,[1]) and to sum many series.[2]) The latter application depends on the result that, if $\frac{1}{f(z)} = 0$ has an infinity of real roots, and $f(z)$ vanishes, for any $y$, for $x = \pm\infty$, and, for any $x$, for $y = \pm\infty$, and

$$x_0 = y_0 = -\infty,\ X = Y = +\infty,$$

we get, from (15),

$$\Delta = 0.$$

Thus, if

$$f(x) = \varphi(x)\,\frac{\cos rx}{\sin \pi x},$$

where $r$ is real and $\varphi$ rational, we get, for example,

$$\frac{1}{2}\,\frac{1}{u^2} + \frac{\cos s}{u^2-1} + \frac{\cos 2s}{u^2-4} + \frac{\cos 3s}{u^2-9} + \cdots = \frac{\pi}{2u}\,\frac{\cos ru}{\sin \pi u}.$$

## 4. Cauchy's second proof (1851) of his fundamental theorem.

From these researches grew what CAUCHY called the „calculus of residues“,[3]) and the connexion between these researches and CAUCHY's subsequent ones on power-series was only gradually found, but, when found, completed the foundation of a general theory of functions.[4]) Here I shall merely point out that the proof of CAUCHY's main theorem, that the integral of a „synectic“ function taken round a closed contour in the $z$-plane is zero, given by CAUCHY in 1846,[5]) which is the same as that of RIEMANN, and is generally considered to have been suggested by restricting GREEN's theorem to a plane, was, in all probability, an application of the ideas of the memoir of 1814.

---

1) Memoir of 1825, § 12, 16, 18, and „Additions“.

2) Ibid., § 13, 14.

3) See, in particular, CASORATI, *Teorica delle funzioni di variabili complesse* (1868), p. 62—143.

4) See BRILL and NOETHER, op. cit. p. 173—197; REIFF, *Geschichte der unendlichen Reihen* (Tübingen 1889), p. 179—182.

5) *Sur les intégrales qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée*, Comptes rendues de l'acad. d. sc. [de Paris] **23**, 1846, p. 251; *Oeuvres* (1) t. X, p. 70—74.

In fact, just as in developing equation (13) we get the relation (15), so we have

$$\int_{x_0}^{X} f(x+iy_0)\,dx + i\int_{y_0}^{Y} f(X+iy)\,dy - \int_{x_0}^{X} f(x+iY)\,dx - i\int_{y_0}^{Y} f(x_0+iy)\,dy$$
$$= -\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} \frac{\partial f(z)}{\partial y}\,dy\,dx + i\int_{y_0}^{Y}\int_{x_0}^{X} \frac{\partial f(z)}{\partial y}\,dx\,dy.$$

Supposing that $\frac{\partial f}{\partial x}$ is a continuous function of $(x, y)$, we can change the order of integration, and so reduce the integral $\int_c f(z)\,dz$, taken round the rectangle $c$ to the double integral

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y}\left(-\frac{\partial f}{\partial y} + i\frac{\partial f}{\partial x}\right)dy\,dx;$$

and the latter integral is zero, because

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i\,\frac{\partial f}{\partial x},$$

or, what is the same thing, if $f(z) = u + iv$,

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Hence, separating real and imaginary parts, we have two equations:

$$\int(u\,dx - v\,dy) = -\int\int\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)dy\,dx,$$
$$\int(v\,dx + u\,dy) = \int\int\left(-\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\right)dy\,dx;$$

for the case of a rectangular contour. It was not difficult to generalise this to the case of any closed path wich does not cut itself, and state the theorem that, if $X$ and $Y$ are continuous functions of $(x, y)$ within this boundary, we have

$$\int(X\,dx + Y\,dy) = \pm\int\int\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right)dx\,dy,$$

where the integral on the left is taken along the boundary, that on the right over the enclosed area, and, if $X\,dx + Y\,dy$ is an exact differential, the path of integration may shrink to nothing, or to small circles round any singularities (if there are any) within the closed contour.

## 5. The researches of Gauß.

GAUSS had proved the theorem

$$\int_c f(z)\,dz = 0$$

in 1811,[1] probably by the transformation of boundary-integrals into surface-integrals, since this process seems to have been found by him independently of GREEN,[2] and then, in 1816, applied the result which follows from this to a (third) demonstration of the fundamental theorem of algebra.[3] In fact, if $f(z)$ has a singularity within the contour $(c)$ of integration,

$$\int_c f(z)\,dz = 2\,\pi\,if,$$

and hence, as in the preceding section,

$$-\int\int\frac{\partial f}{\partial y}\,dy\,dx + i\int\int\frac{\partial f}{\partial d}\,dx\,dy = 2\pi(iU - V),$$

where $f = U + iV$. Separating real and imaginary parts, we have

$$\int\int\frac{\partial u}{\partial y}\,dy\,dx + \int\int\frac{\partial v}{\partial x}\,dx\,dy = 2\pi V,$$

$$-\int\int\frac{\partial v}{\partial y}\,dy\,dx + \int\int\frac{\partial u}{\partial x}\,dx\,dy = 2\pi U;$$

and since

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

we see that the difference between the values obtained by integrating a real function of two real variables in different orders (between constant and independent limits) is not zero when the function becomes infinite between the limits. That GAUSS did not point out that a change in the order of integration is also impossible if the function becomes indeterminate at a point between the limits of integration, as did CAUCHY, is, now, easily explicable when we consider that GAUSS considered only that state of things which results from a function of a complex variable $x + iy$ becoming infinite at a point, while CAUCHY considered the more general problem of a function of two real variables.

---

1) See BRILL and NOETHER, op. cit. p. 159, 169, 174—175.

2) See GAUSS: *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die . . . Anziehungs- und Abstoßungskräfte* in OSTWALD's Klassiker, Nr. 2, p. 35—37, 56.

3) See BRILL and NOETHER, op. cit. p. 157—159.

## 6. The nature of the ground on which Cauchy's analytical conceptions rested.

It is only recently that the necessary and sufficient conditions have been found that a one-valued function $f(z)$ of a complex variable should be 'monogenic' or 'analytic'; that is to say, that CAUCHY's theorem on complex integration, and hence that on developability in TAYLOR's series, shonld hold[1]) In the memoir of 1825, CAUCHY required only one-valuedness and continuity of $f(z)$; whether he regarded continuity as snfficient for the existence of a derivative cannot be told from his writings, for, as for as I am aware, he nowhere made a pronouncement on this point, — perhaps he did not regard such a pronouncement as necessary. But it is difficult to doubt, from other indications in CAUCHY's works, that CAUCHY imagined that his conception of 'continuity' was in any case sufficient for the 'geometrical representability' of a function, and so for the existence of a derivate. In fact, CAUCHY's conceptions in analysis rested on *geometrical* grounds (except at isolated points). The most convincing proof of this is afforded by CAUCHY's treatment, in his *Cours d'analyse* of 1821, of irrational numbers. These numbers were defined as limits of rational numbers, and a proof of the existence of such limits, which is, no doubt, evident on geometrical grounds, was not given, — although CAUCHY strongly emphasised the need of purely analytical proofs of the existence of, for example, the definite integral and the solution of a system of differential equations. It was first WEIERSTRASS who constructed a purely arithmetical basis for analysis, and was thereby led to point out that CAUCHY's procedure involved a logical error, inasmnch as the existence of a limit cannot be proved unless a real number in general is *previously* defined. This sharp distinction of arithmetic from geometry with WEIERSTRASS had, as its most striking sign, the constrnction of a continuous function of a real variable which has nowhere a determinate derivative.[2])

1) Cf. GOURSAT, *Sur la définition générale des fonctions analytiques d'après CAUCHY;* Transactions of the americ. mathem. soc., 1, 1900, p. 14.

2) Through the kindness of Mr. G. ENESTRÖM, I have had the opportunity of seeing an article of Mr. STÄCKEL (*Integration durch imaginäres Gebiet. Ein Beitrag zur Geschichte der Funktionentheorie;* Biblioth. Mathem. $1_3$, 1900, p. 109—128), where it is conclusively proved (p. 117—120) that POISSON (1815) was the first to consider, in print, integrals taken along imaginary paths, and that CAUCHY, even in 1823, insisted that an integral between real limits must always mean the sum of the values of the differential which correspond to the *real* values of the variable between the limits (p. 122).

I may be allowed to make two remarks. Firstly, POISSON's remark of 1820 on the failure of the equation

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

(Stäckel, loc. cit. p. 118) is a developed form of Cauchy's remark in his memoir of 1814 that I have mentioned above. Possibly both take their origin from Lagrange's remark (Journ. de l'éc. polytechn., cahier 12 [1804], p. 69).

Secondly, in Stäckel's short account of Cauchy's memoir of 1814, he makes Cauchy seem to consider only the case

$$f(x \pm iy) = M \pm iN,$$

so that

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x},\ \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y},$$

and Cauchy's double integrals are

$$\begin{cases} \iint \frac{\partial M}{\partial y}\,dx\,dy = -\iint \frac{\partial N}{\partial x}\,dx\,dy, \\ \iint \frac{\partial M}{\partial x}\,dx\,dy = \iint \frac{\partial N}{dy}\,dx\,dy. \end{cases}$$

But the supposition $z = x \pm iy$ was only a special case of the more general supposition $z = P(x, y) + iR(x, y)$, and Cauchy gives the former no special prominence in 1814. It was when he found that the „residues" $f_1, f_2, \ldots$ could be readily calculated when $z = x + iy$, that he began to use exclusively the simple complex variable.

# Kleine Mitteilungen.

## Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik".

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen".
BM = Bibliotheca Mathematica.

**1:12,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 265. — **1:15,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 323. — **1:22, 29, 34,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 265—266. — **1:36, 64,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137. — **1:103,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1:135,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137. — **1:144, 155, 169, 171,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137—138. — **1:189—190,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 101. — **1:192, 193,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 101—102. — **1:195,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 56; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 102. — **1:196—197,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900. S. 266; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 102—103. — **1:198,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 103. — **1:202,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1:207,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 283. — **1:225, 234,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 138. — **1:255,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902. S. 238. — **1:272,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 396. — **1:283,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1:284, 321,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266—267. — **1:370,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 319. — **1:383,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:386,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 407. — **1:395,** siehe BM $\mathbf{3}_3$. 1902, S. 323. — **1:400,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:429,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 324. — **1:432,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:434—435,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 396—397. — **1:436,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 138. — **1:437, 440,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:457,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 238. — **1:463,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139, 324. — **1:466,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 397. — **1:467, 469,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:475,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267—268; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139; $\mathbf{4}_3$. 1903, S. 283. — **1:476,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1:508,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 68. — **1:510,** siehe BM $\mathbf{1}_3$. 1900, S. 314. — **1:519—520,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **1:537, 540, 542,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1:622,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143. — **1:641,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:661,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1:662,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:663,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 405. — **1:671,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1:673, 675,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 407—408. — **1:687—689,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143—144; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 205—206. — **1:694,** siehe BM $\mathbf{1}_3$. 1900, S. 499; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 284; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 103. — **1:704, 706, 708, 714, 735, 736, 744, 748,** siehe BM $\mathbf{1}_3$. 1900, S. 499—500. — **1:749,** siehe BM $\mathbf{1}_3$. 1900, S. 268. — **1:752,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 104. — **1:753,** siehe BM $\mathbf{5}_3$. 1904, S. 408—409. — **1:754,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 409; $\mathbf{6}_3$. 1905, S. 104. — **1:756, 757, 767,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 500—501. — **1:794,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:804, 805, 807, 808, 812, 823, 852,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268—269. — **1:853,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501. — **1:854,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 324; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 206; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 104. — **1:855,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501.

---

**2:7,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351. — **2:8, 10,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501—502.

---

2:14. Die von mir in der BM $5_3$, 1904, S. 200 erwähnte Schrift des Leonardo Pisano: *Libro di merchatanti detto di minor guisa* wird nach B. Boncompagni (*Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano*, Roma 1854,

S. 242) in einem anonymen, in der „Biblioteca palatina“ in Florenz aufbewahrten *Trattato di praticha d'arismetricha* aus dem 15. Jahrhundert zitiert. BONCOMPAGNI weist darauf hin, daß das von LEONARDO PISANO angeführte Buch „minoris guise“ wahrscheinlich mit dem *Libro di merchatanti detto di minor guisa* identisch ist. G. ENESTRÖM.

---

**2 : 14—15,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 200. — **2 : 20,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **2 : 25,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 274. — **2 : 30,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 105. — **2 : 31,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351—352; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239—240. — **2 : 32,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 105. — **2 : 34,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144. — **2 : 37,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 105. — **2 : 38,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 39,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502.

---

**2** : 39. Da Herr CANTOR weiter unten (S. 82) bemerkt, daß JORDANUS NEMORARIUS in seinem Werke *De triangulis* zwei Lösungen des Problems der Würfelverdoppelung gegeben hat, wäre es vielleicht angebracht zu erwähnen, daß LEONARDO PISANO in seiner *Practica geometriae* (*Scritti*, ed. BONCOMPAGNI, II, S. 153—155) drei Lösungen desselben Problems gebracht hat, nämlich die Lösungen, die EUTOKIOS beziehungsweise ARCHYTAS, FILON von Byzanz und PLATON zuschreibt. Die erste Lösung findet sich auch im *Liber trium fratrum*, aber dort ist die Terminologie eine andere (z. B. was LEONARDO „semicolumna“ nennt, heißt im *Liber trium fratrum* „superficies medietatis columpne“, und in der Tat scheint es, als ob zwei verschiedene Übersetzungen aus ein und demselben arabischen Original vorliegen würden. Die zweite Lösung bei LEONARDO stimmt wörtlich mit der entsprechenden bei JORDANUS, und die dritte Lösung bei LEONARDO ebenso wörtlich mit der entsprechenden im *Liber trium fratrum* überein. Wenn ich hier von einer wörtlichen Übereinstimmung spreche, so sehe ich von solchen unwesentlichen Abweichungen ab, die sehr gut von Abschreibern oder Handschriftenlesern herrühren können. Von welcher Art diese Abweichungen sind, geht aus dem folgenden Beispiele hervor.

| *Liber trium fratrum* | LEONARDO |
| --- | --- |
| continuabo, quod posuimus, eum moveri ex parte puncti *N* ad partem puncti *d*, et sit extremitas eius, que est apud punctum *N*, inseparabilis in motu suo a linea *Nd*, et linea in motu suo non cessat transire super punctum *e* linee *de*, ut, quando movetur *Ne*, sicut narravimus. | extimabo quod possit *. ez .* moueri ex parte puncti *. z .* inseparabilis in motu suo in lineam *. z d .* et linea in motu suo non cessat transire super punctum *. e .* linee *. ge .*, ut quando mouetur *. ze .* sicut narrauimus. |

G. ENESTRÖM.

---

**2 : 41,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 51,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 106. — **2 : 53,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 201. — **2 : 57,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352 — **2 : 59,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2 : 63,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 206. — **2 : 70,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 417. — **2 : 73, 82, 87, 88, 89, 90,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502—503. — **2 : 91—92,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 409—410. — **2 : 97,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2 : 98—99,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 269—270; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 106—107. — — **2 : 100,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2 : 101,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325. — **2 : 104—105,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 397—398. — **2 : 111,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 116,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2 : 117—118,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 107. — **2 : 122,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503—504.

---

2 : 126. Es scheint, als ob Johannes de Lineriis viel früher gelebt hätte, als gewöhnlich angegeben wird. Herr P. Duhem hat nämlich konstatiert, daß der anonyme *Algorismus de minuciis* im ms. fonds latin 7215 der „bibliothèque nationale“ in Paris (vgl. Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie* II, S. 528) mit der Schrift des Johannes de Lineriis über Brüche übereinstimmt, und das fragliche Manuskript stammt nach der Ansicht der Handschriftenkenner spätestens aus der Mitte des 13. Jahrhunderts her. — In der Fußnote 3) auf S. 126 ist ohne Zweifel 527 statt 528 zu lesen. Der Verweis bezieht sich auf eine Bemerkung von Libri in betreff des ms. fonds latin 7285 der „bibliothèque nationale“ in Paris, wo Johannes de Lineriis „Picardus dioecesis Ambianensis“ genannt wird; Libri fügt hinzu: „d'après l'examen de plusieurs autres manuscrits, j'ai acquis la conviction qu'il (= Johannes de Lineriis) n'est ni Picard, ni Allemand“. Es wäre von Interesse gewesen zu erfahren, wie Libri zu dieser Überzeugung gelangte, aber darüber gibt er keine Auskunft.

G. Eneström.

---

**2 : 126, 127**, siehe BM $3_3$, 1902, S. 406. — **2 : 128**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 504. — **2 : 132**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 515—516. — **2 : 143**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 504. — **2 : 155**, siehe BM $5_3$, 1904, S. 410—411. — **2 : 157, 158**, siehe BM $2_3$, 1901, S. 352. — **2 : 163, 166**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 504. — **2 : 175**, siehe BM $3_3$, 1902, S. 140. — **2 : 210**, siehe BM $2_3$, 1901, S. 352—353. — **2 : 218**, siehe BM $4_3$, 1903, S. 284. — **2 : 219**, siehe BM $2_3$, 1901, S. 353. — **2 : 229, 242, 243**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 504—505. — **2 : 253**, siehe BM $2_3$, 1901, S. 353. — **2 : 273**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 505. — **2 : 274**, siehe BM $3_3$, 1902, S. 325. — **2 : 281**, siehe BM $5_3$, 1904, S. 411. — **2 : 282, 283**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 506; $2_3$, 1901, S. 353—354. — **2 : 284, 286, 287, 289, 290, 291**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 506—507. — **2 : 296**, siehe BM $2_3$, 1901, S. 354. — **2 : 313**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 507. — **2 : 317**, siehe BM $5_3$, 1904, S. 69. — **2 : 328**, siehe BM $3_3$, 1902, S. 140; $4_3$, 1903, S. 285. — **2 : 334**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 507. — **2 : 353**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 507; $4_3$, 1903, S. 87. — **2 : 358, 360**, siehe BM $4_3$, 1903, S. 87. — **2 : 381**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 507. — **2 : 385**, siehe BM $3_3$, 1902, S. 81; $4_3$, 1903, S. 207. — **2 : 386**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 507; $5_3$, 1904, S. 306. — **2 : 395**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 507—508. — **2 : 399**, siehe BM $6_3$, 1905, S. 107—108. — **2 : 401, 405, 425**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 507. — **2 : 429**, siehe BM $5_3$, 1904, S. 201—202. — **2 : 430**, siehe BM $2_3$, 1901, S. 145. — **2 : 440**, siehe BM $4_3$, 1903, S. 285. — **2 : 442**, siehe BM $3_3$, 1902, S. 325. — **2 : 449**, siehe BM $3_3$, 1902, S. 140. — **2 : 454**, siehe BM $3_3$, 1902, S. 242. — **2 : 474, 480**, siehe BM $3_3$, 1902, S. 140—141. — **2 : 481**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 508. — **2 : 482**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 508; $2_3$, 1901, S. 354; $3_3$, 1902, S. 240. — **2 : 484**, siehe BM $3_3$, 1902, S. 141. — **2 : 486, 489, 490**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 509. — **2 : 497**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 509; $4_3$, 1903, S. 87. — **2 : 509**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 270, 509. — **2 : 510**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 509. — **2 : 512**, siehe BM $3_3$, 1902, S. 141. — **2 : 514, 516, 517**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 509. — **2 : 530**, siehe BM $2_3$, 1901, S. 354—355; $3_3$, 1902, S. 141. — **2 : 532, 535, 541, 548, 549**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 509—510. — **2 : 550**, siehe BM $2_3$, 1901, S. 355. — **2 : 554**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 510. — **2 : 555, 565, 567, 568**, siehe BM $4_3$, 1903, S. 285—286. — **2 : 569**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 510. — **2 : 572—573**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 510; $3_3$, 1902, S. 141. — **2 : 576**, siehe BM $2_3$, 1901, S. 355—356. — **2 : 579**, siehe BM $2_3$, 1901, S. 145. — **2 : 580—581**, siehe BM $4_3$, 1903, S. 207. — **2 : 582**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 510. — **2 : 583**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 270; $2_3$, 1901, S. 356. — **2 : 585**, siehe BM $5_3$, 1904, S. 69—70. — **2 : 592**, siehe BM $2_3$, 1901, S. 146. — **2 : 594**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 270. — **2 : 597**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 270; $2_3$, 1901, S. 146. — **2 : 599—600**, siehe BM $2_3$, 1901, S. 146. — **2 : 602**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 270. — **2 : 603—604**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 270—271; $6_3$, 1905, S. 108. — **2 : 611**, siehe BM $2_3$, 1901, S. 356—357. — **2 : 612**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 277; $2_3$, 1901, S. 146. — **2 : 613**, siehe BM $2_3$, 1901, S. 357; $5_3$, 1904, S. 306. — **2 : 614**, siehe BM $3_3$, 1902, S. 141. — **2 : 617, 619**, siehe BM $6_3$, 1905, S. 108—109. — **2 : 620**, siehe BM $3_3$, 1902, S. 141. — **2 : 621, 623**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 277; $2_3$, 1901, S. 146—147. — **2 : 632**, siehe BM $6_3$, 1905, S. 109. — **2 : 638**, siehe BM $2_3$,

1901, S. 147. — **2**:**642, 643,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271. — **2**:**655,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357. — **2**:**656,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 286. — **2**:**659, 660,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 147—148. — **2**:**665,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271. — **2**:**669,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 203. — **2**:**674,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88. — **2**:**683,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2**:**693,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 287. — **2**:**700, 701, 703, 704, 705,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271—273. — **2**:**715,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 412. — **2**:**719,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357. — **2**:**720,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 287. — **2**:**721,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2**:**742,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142. — **2**:**746,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2**:**747,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 173; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 225. — **2**:**749,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88. — **2**:**766,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 412—413 — **2**:**767,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148, 357—358. — **2**:**770,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 208. — **2**:**772, 775,** siehe BM $\mathbf{2}_3$. 1901, S. 358—359. — **2**:**777,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 204. — **2**:**783,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88—89. — **2**:**784,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2**:**793, 798, 799,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307. — **2**:**802,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 208. — **2**:**812,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87. — **2**:**820,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307. — **2**:**825,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2**:**832,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 203—204.

---

**2**:832. Da Cavalieri, wie S. 709 richtig angegeben wird, schon im Jahre 1647 starb, ist die Ausdrucksweise der Bemerkung: „Er gab seine *Geometria* . . . in verbesserter Ausgabe 1653 heraus", ein wenig zu modifizieren.

---

**2**:**840,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148—149. — **2**:**843,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 328. — **2**:**850,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 109—110. — **2**:**856, 865,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149. — **2**:**876, 878, 879,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511. — **2**:**891,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2**:**898,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 37, 208. — **2**:**901,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511. — **2**:**919,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 204. — **2**:**VIII** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142. — **2**:**IX, X** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511—512.

---

**3**:**9,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359. — **3**:**10,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 518.

---

**3**:10. „Opera mathematica Barrowii" (Fußnote 2) ist nicht der exakte Titel der Whewellschen Ausgabe von Barrows Werken. Sowohl das Vorwort als die Anmerkungen des Herausgebers sind englisch geschrieben, und darum ist der Titel auch in englischer Sprache abgefasst: *The mathematical works of Isaac Barrow.* Edited for Trinity college by W. Whewell (Cambridge 1860, XX + 414 + (1) + 320 S. $8^0$ + 27 Taf).

---

**3**:**11,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3**:**12, 17,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512. — **3**:**22,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3**:**24,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3**:**25,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209, 399. — **3**:**26,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359. — **3**:**45—48, 49, 50,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512—513. — **3**:**70,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 360. — **3**:**82,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 308. — **3**:**100,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149. — **3**:**112,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209—210. — **3**:**116,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3**:**117,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 518. — **3**:**123,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 399. — **3**:**124,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 407—408; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 400. — **3**:**126,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 288 — **3**:**131,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 210. — **3**:**151,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326. — **3**:**167, 172—173,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 400. — **3**:**174,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149—150. — **3**:**183,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 432. — **3**:**188,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 241. — **3**:**201,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3**:**207,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 519. — **3**:**215,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150. — **3**:**218,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3**:**220,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326. — **3**:**224,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3**:**225, 228,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150.

---

**3**:230. Herr Cantor bemerkt, daß die Gedanken, die Leibniz über Differentiation mit gebrochenem Index hegte, in seinem Briefwechsel allein

erhalten blieben, und verweist auf den Brief an Johann Bernoulli vom 28. Dezember 1695. Herr Cantor hätte auch auf einen früheren Brief hinweisen können, wo Leibniz denselben Gegenstand fast auf dieselbe Weise behandelt hatte, nämlich den Brief an den Marquis de l'Hôpital vom 30. September 1695 (siehe *Leibnizens Mathematische Schriften*, herausg. von C. I. Gerhardt, Band II, S. 302). Übrigens wäre es gewiß für die Leser der *Vorlesungen* von Interesse zu erfahren, *welche* Gedanken Leibniz über Differentiation mit gebrochenem Index hegte. Leibniz setzt $dx = x d\beta$ und erhält dadurch

$$d^e x = x d\beta^e = x\left(\frac{dx}{x}\right)^e.$$

Als Beispiel nimmt er $e = \frac{1}{2}$, wodurch

$$d^{\frac{1}{2}}x = x^{\frac{1}{2}}(dx)^{\frac{1}{2}}.$$

G. Eneström.

**3** : 232, siehe BM $1_3$, 1900, S. 514.

**3** : 232. Die Angabe, daß Johann Bernoulli im Märzheft 1697 der Acta Eruditorum „die Grundzüge der Rechnung mit den Exponentialgrößen für alle Zeiten festgestellt hat", ist kaum geeignet, einem modernen Mathematiker eine richtige Vorstellung von dem Inhalt der Bernoullischen Abhandlung *Principia calculi exponentialium seu percurrentium* (Acta Eruditorum 1697, S. 125—133) zu geben. Diese Abhandlung ist zum Teil gegen Nieuwentiit gerichtet, und Bernoulli benutzt, wie er selbst ausdrücklich hervorhebt, die Gelegenheit um zu zeigen, wie Gleichungen der *Kurven*, wo die unbestimmte Größe als Exponent vorkommt, behandelt werden sollen („modum tractandi aequationes curvarum, in quibus indeterminata exponentes ingreditur"). Über Exponential*größen* enthält die Abhandlung hauptsächlich folgendes. Zuerst werden verschiedene Grade solcher Größen definiert, nämlich $y^m$, $y^{m^n}$, $y^{m^{n^p}}$, usw., also teils die eigentliche Exponentialfunktion, teils was wir jetzt iterierte Exponentialgrößen nennen. Dann wird gelehrt, wie man Exponentialgrößen differentiieren soll, und endlich werden einige spezielle Exponentialkurven behandelt, wobei angegeben wird, wie man die Subtangente (bezw. die Tangente) und in ein paar Fällen auch wie man die Fläche der betreffenden Kurve finden kann. Nun macht Herr Cantor ganz richtig darauf aufmerksam, das Leibniz schon 1695 in den Acta Eruditorum die Formel

$$dm^n = m^n \log m\, dn + n m^{n-1} dm$$

abgeleitet hatte, das Neue bei Johann Bernoulli ist also eigentlich die Einführung von iterierten Exponentialgrößen und Herleitung der Differentiale solcher Größen. Ein moderner Mathematiker dürfte folglich wenig geneigt sein anzuerkennen, daß in der zitierten Abhandlung die Grundzüge der Rechnung mit den Exponentialgrößen für alle Zeiten festgestellt worden sind.

G. Eneström.

**3 : 244—245,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 205, 413. — **3 : 246,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151. — **3 : 250,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3 : 303,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 155. — **3 : 330—331,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 241—242. — **3 : 337,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 206. — **3 : 370—371,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 308.

3 : 382. Herr Cantor übergeht stillschweigend die Frage, ob die Taylorsche Reihe als eine selbständige Entdecknng oder als eine ziemlich unwesentliche Modifikation der Bernoullischen Integralformel betrachtet werden soll, und zwar nicht ohne Grund, da sich ergeben hat, daß der eigentliche Vertreter der letzteren Ansicht (G. Peano) sich auf eine unrichtige Auffassung einer Äußerung des Johann Bernoulli gestützt hat, und seine Argumentation ein allzu modernes Gepräge trägt (vgl. Pringsheim, Bibliotb. Mathem. $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 435—436). Indessen ist es angebracht, darauf aufmerksam zu machen, daß sich dieselbe Ansicht schon bei einem Zeitgenossen von Taylor, nämlich Maclaurin, wiederfindet. In seinem *Treatise of fluxions* (London 1742), S. 612 (art. 752) bemerkt nämlich Maclaurin, daß die Taylorsche Reihe von der Bernoullischen Integralformel nicht wesentlich verschieden („not materially different") ist. Aber auch die entgegengesetzte Ansicht hat unter den Zeitgenossen des Taylor einen Vertreter, nämlich Euler, der in seiner Abhandlung *Inventio summae cujusque seriei ex dato termino generali* (Comment. acad. sc. Petrop. **8**, 1736 [gedruckt 1741], S. 9—22) teils die Taylorsche Reihe beweist und dabei hinzufügt: „hanc ipsam seriem . . . primus produxit Cl. Taylor in Methodo Increm. inv.", teils aus dieser Reihe die Bernoullische Integralformel als einen speziellen Fall herleitet. Daß umgekehrt jene aus dieser hergeleitet werden konnte, hatte Euler offenbar ebenso wenig wie Johann Bernoulli selbst erkannt.

G. Eneström.

3 : 408. Die Angabe, daß Newton an einer Stelle der *Arithmetica infinitorum* (S. 220 der von Herrn Cantor zitierten 3. Auflage) zur Ermittelung der Wurzel einer kubischen Gleichung eine Art von Kreiskonchoide benutzt, beruht, so viel ich verstehe, auf einem Mißverständnis. Aus Newtons Worten scheint mir deutlich hervorzugehen, daß es sich auch hier um eine gewöhnliche Konchoide handelt, deren Durchschnittspunkt mit einem gewissen *Kreise* die gesuchte Wurzel bestimmt. Eigentlich spricht Newton hier gar nicht von Konchoiden irgend einer Art, sondern er legt, wie Herr Cantor angibt, „eine constante [vielleicht besser ausgedrückt „gegebene"?] nach einem festen Punkte gerichtete Strecke zwischen einem Kreis und eine gegebene Gerade".

G. Eneström.

**3 : 447,** 455, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151. — **3 : 473,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 154—155; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 401 — **3 : 477,** 479, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151—152. — **3 : 497,** 498, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309. — **3 : 507,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 71—72. — **3 : 521,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3 : 535,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 401. — **3 : 536,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 206. — **3 : 565,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326—327. — **3 : 571,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 72. — **3 : 578,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309. — **3 : 586,** 609, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309—310. — **3 : 614,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 89—90.

**3** : 616. Die von Herrn Cantor ausgesprochene Vermutung, G. W. Krafft habe zum ersten Male den bekannten Satz von der Divisorensumme einer Zahl dem Druck übergeben, ist nicht richtig. Nach dem *Formulaire de mathématiques publié par G. Peano* (t. III, 1901, S. 101) findet sich der Satz schon 1685 in Wallis' Algebra; daselbst hat Wallis auch den Satz von der Anzahl der Divisoren einer Zahl angegeben (siehe Peano, a. a. O. S. 100).

---

**3 : 636—637**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3 : 646—647**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 206—207. — **3 : 652**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 207. — **3 : 660**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3 : 667**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441—442; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 207—208, 310. — **3 : 686**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 208. — **3 : 689, 695**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 442. — **3 : 736**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 111. — **3 : 750, 758**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446. — **3 : 759**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 208. — **3 : 760, 766**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446—447. — **3 : 774, 798**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 442—443. — **3 : 845**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327—328. — **3 : 848, 881**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443. — **3 : 882**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 414. — **3 : 890**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 401. — **3 : 892**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 143. — **3 : IV** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443.

---

## Anfragen.

**122. Woher haben Leonardo Pisano und Jordanus Nemorarius ihre Lösungen des Problems der Würfelverdoppelung entnommen?** In seinen *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (II[2], S. 80—82) hat Herr Cantor darauf aufmerksam gemacht, daß Jordanus Nemorarius in der Schrift *De triangulis* zwei Lösungen des Problems der Würfelverdoppelung bringt, von denen sich die erste (die Lösung des Archytas) in der von Gherardo Cremonese verfertigten lateinischen Übersetzung des *Liber trium fratrum de geometria* findet, während die zweite (die Lösung des Heron in der Form, die Eutokios dem Filon von Byzanz zuschreibt) nicht mit der anderen Lösung der drei Brüder übereinstimmt (diese andere Lösung ist nämlich die des Platon). Auf Grund dieser und anderer Umstände vermutet Herr Cantor, daß Jordanus nicht den *Liber trium fratrum de geometria* benutzte, sondern daß ihm eine Arbeit (vielleicht von Tabit ben Kurrah), welche selbst ihren Stoff teilweise dem Buche der drei Brüder entlehnt hatte, zu Gebote stand.

Der Hinweis des Herrn Cantor auf eine Arbeit von Tabit ben Kurrah als mutmaßliche Quelle des Jordanus ist gewiß nicht unbegründet. In der Tat hat Tabit nach H. Suter (*Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke;* Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **10**, 1900, S. 37) eine noch aufbewahrte Übersetzung eines Teils des Kommentars des Eutokios zum 2. Buche des Archimedes über Kugel und Zylinder verfertigt, und die zwei von Jordanus mitgeteilten Lösungen des Problems der Würfelverdoppelung stimmen ziemlich gut mit den entsprechenden Stellen des Kommentars des Eutokios überein. Auf der anderen Seite sehe ich nicht ein, daß man irgend einen Grund hat anzunehmen, Tabit habe seinen Stoff teilweise dem Buche der drei Brüder entlehnt, denn die *wörtliche* Übereinstimmung des *lateinischen* Textes bei Jordanus und bei Gherardo ist dadurch gewiß nicht erklärt, auch wenn man voraussetzt, daß Jordanus der arabischen Sprache kundig war; leicht erklärlich wird dagegen diese Übereinstimmung, wenn Tabits Arbeit von

Gherardo Cremonese übersetzt worden wäre (die Liste seiner Übersetzungen aus dem Arabischen enthält in Wirklichkeit einen „Liber archimendis tractatus I"), und wenn diese Übersetzung von Jordanus benutzt wurde.

Indessen gibt es einen Umstand, der die vorliegende Frage noch verwickelter macht. Auch Leonardo Pisano hat sich nämlich in seiner Geometrie (*Scritti*, ed. Boncompagni II, S. 153—155) mit dem Problem der Würfelverdoppelung beschäftigt und nicht weniger als drei Lösungen des Problems gebracht (vgl. oben S. 209). Die erste (die Lösung des Archytas) stimmt wesentlich aber gar nicht wörtlich mit der Darstellung des Jordanus überein, und ist allem Anschein nach eine andere Übersetzung des arabischen Textes, dessen lateinische Version dem Jordanus zur Verfügung gestanden hat; die zweite (die Lösung des Heron oder des Filon von Byzanz) stimmt wörtlich mit der zweiten Lösung bei Jordanus und die dritte (die Lösung des Platon) ebenso wörtlich mit der anderen Lösung der drei Brüder überein.

Nimmt man nun an, Gherardo Cremonese habe die oben zitierte Schrift des Tabit übersetzt, und diese Übersetzung habe sowohl Jordanus als Leonardo vorgelegen, so ist die wörtliche Übereinstimmung gewisser der erwähnten Lösungen genügend erklärt; dagegen ist es schwer zu verstehen, warum Leonardo nur die zwei letzten seiner Lösungen aus dieser Übersetzung geschöpft hätte. Nur unter der Voraussetzung, daß keine bessere Hypothese aufgefunden werden kann, ist folglich die fragliche Annahme festzuhalten. Jedenfalls wird man erst durch eine eingehende Untersuchung mit größerer Wahrscheinlichkeit ermitteln können, woher Leonardo Pisano und Jordanus Nemorarius ihre Lösungen des Problems der Würfelverdoppelung entnommen haben; eine solche Untersuchung ist also wünschenswert. G. Eneström.

# Rezensionen.

**J. C. Poggendorff's Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften,** enthaltend Nachweisungen über Lebensverhältnisse und Leistungen von Mathematikern, Astronomen, Physikern, Chemikern, Mineralogen, Geologen, Geographen u. s. w. aller Völker und Zeiten. Vierter Band (die Jahre 1883 bis zur Gegenwart umfassend), herausgegeben von **A. von Öttingen.** Lieferung 8—24. Leipzig, Barth 1903—1904. 8°, XII S. + S. 505—1718. Mark 51.

In der Bibliotheca Mathematica $4_3$, 1903, S. 95—104, habe ich die damals erschienenen 7 ersten Hefte des vierten Bandes dieses Werkes besprochen. Jetzt liegt der Band vollständig abgeschlossen vor, und der Herausgeber hat die Gelegenheit benutzt, im „Vor- und Schlußwort" teils einige statistische Notizen über den Inhalt des Bandes zu bringen, teils sich über die von ihm benutzte Methode der Bearbeitung zu äußern, wobei er auch die von mir in der früheren Besprechung gemachten Ausstellungen gegen seine Arbeitsmethode zu entkräften sucht.

Aus den soeben erwähnten statistischen Notizen entnehme ich, daß der 4. Band des Handwörterbuches zusammen 5784 Artikel enthält, von denen sich 1347 (also beinahe $^1/_4$) auf Mathematiker beziehen. Neu hinzugekommen sind 3374 Artikel (davon 844 oder etwas mehr als $^1/_4$ über Mathematiker), während 2410 Artikel Ergänzungen biographischer und bibliographischer Angaben der früheren Bände bringen. Für 4078 Artikel (etwa 70 %) sind Originalmitteilungen benutzt worden.

In betreff der Erwiderung auf meine frühere Besprechung halte ich es für unnütz, auf die einzelnen Punkte derselben einzugehen. Zum Teil handelt es sich nämlich um Fragen, die ziemlich unwichtig sind, zum Teil habe ich nicht verstehen können, daß die Bemerkungen des Herrn Öttingen eine ernstliche Antikritik enthalten. Ein Beispiel seiner Bemerkungen der letzten Art erlaube ich mir im Vorübergehen zu geben.

In meiner Besprechung habe ich gesagt, daß in den zwei ersten Bänden des *Handwörterbuches* das biographische Element vorherrschend ist, und ich fügte hinzu: „in der Tat handelt es sich ja dort größtenteils um ältere Verfasser, deren literarische Wirksamkeit, wenn man sie mit den gegenwärtigen Verhältnissen vergleicht, im allgemeinen nicht besonders umfangreich war". Hierauf erwidert Herr Öttingen (S. VII): „Es ist schwer zu begreifen, wie man zu solch einem Ausspruch sich erkühnen kann, der doch nur wahr sein kann für die große Zahl alter Verfasser, die kaum etwas geschrieben haben. Die meisten neueren Verfasser, etwa des XIX. Jahrhunderts und auch des XVIII., nehmen

auch in den ersten Bänden mehr als $^3/_4$ des biographischen Raumes ein". Diese Bemerkungen enthalten meiner Ansicht nach keine wirkliche Antikritik. In betreff der Worte: „Es ist schwer . . . geschrieben haben" kann nämlich geltend gemacht werden, daß man auf dieselbe Weise allgemein ein Gesamturteil als unrichtig erklären kann, indem man darauf hinweist, daß das Urteil falsch ist, wenn man eine gewisse Gruppe, die einen wesentlichen Einfluß auf das betreffende Verhältnis hat, ausscheidet. So z. B. könnte man auf diese Weise (selbstverständlich ohne jeden Grund) eine Angabe des Herrn Öttingen selbst (S. IX des Vorwortes): „in unseren Bänden konnten die Originalmitteilungen vorherrschen" als unrichtig bezeichnen, und zwar würde die Ausstellung gegen diese Angabe, wenn man sich der Öttingenschen Redewendungen bedient, folgendermaßen zu formulieren sein: „Es ist schwer zu begreifen, wie man zu solch einem Ausspruch sich erkühnen kann, der doch nur wahr sein kann für die große Zahl von Verfassern, die bei der Versendung der Fragebogen noch lebten. Die Verfasser, die damals schon gestorben waren, haben keine Originalmitteilungen eingeliefert". — Die Worte: „Die meisten . . . Raumes ein" sind mir unverständlich; unter Bezugnahme auf meine Besprechung hätte man etwa die folgende Bemerkung erwartet: „Für die meisten Verfasser . . . nehmen auch in den ersten Bänden die bibliographischen Notizen mehr als $^3/_4$ des ganzen Raumes ein", und dann würde auch hier gelten, was ich in betreff der Worte: „Es ist schwer . . . geschrieben haben" gesagt habe.

Nur einem Passus des „Vor- und Schlußwortes" möchte ich eine besondere Aufmerksamkeit widmen. In meiner Besprechung wies ich darauf hin, daß Herr Öttingen keine besonders kräftigen Anstrengungen gemacht hat, um die Schriften der Mathematiker möglichst vollständig verzeichnen zu können, und daß er auch nicht die Fortschritte der Mathematik zu Hilfe genommen hat, sondern die Ergänzung der bibliographischen Angaben im allgemeinen den Verfassern selbst überließ. In bezug auf diesen Punkt erwidert Herr Öttingen: „Unsere Methode . . . die Literatur vom Autor ergänzen zu lassen, ist beanstandet worden, ohne daß ein besseres Verfahren uns mitgeteilt wurde. Fanden wir, daß die Verfasser ihre eigenen Arbeiten nicht vollständig angaben, so mußten wir doch annehmen, daß das Mitgeteilte dem Autor genüge . . . Der in Rezensionen verlautbarte Vorschlag, statt unserer Methode die Jahresberichte über die Fortschritte der Mathematik, Chemie u. a., der Arbeit zugrunde zu legen, ist weder ausführbar für einen Einzelnen, noch sicherer als unser Verfahren. . . . Nach vollendeter Arbeit noch eine Revision aller Artikel nach Angaben der „Fortschritte" zu verlangen, hieße das Werk um zehn Jahre verzögern, denn diese Revision würde jeder Kenner der Sache auf etwa das vierfache der ganzen früheren Arbeit schätzen. . . . Endlich ist es unbillig, eine solche Revision zu verlangen um einiger übergangener Arbeiten willen, die der Verfasser vielleicht selbst hat unterdrücken wollen."

Ein Teil dieser Erwiderung bezieht sich freilich nicht auf meine Besprechung, denn ich habe gar nicht daran gedacht, daß die Fortschritte der Mathematik der Arbeit zugrunde gelegt werden sollten. Dagegen habe ich wirklich vorgeschlagen, daß die Fortschritte für die Ergänzung der Literaturangaben benutzt werden würden, und ich halte noch fest, daß dies Verfahren leicht ausführbar ist und noch dazu ein besseres Resultat, als das von Herrn Öttingen angewendete gibt. Leicht ausführbar ist es, wenn man auf folgende Weise verfährt. Zuerst sieht man die am Anfange jedes Bandes der Fortschritte

der Mathematik eingeführte „Erklärung der Zitate" ein, um zu erkennen, welche nicht exzerpierte Zeitschriften zu berücksichtigen sind. Dann sieht man den Band Seite für Seite durch, richtet dabei seine Aufmerksamkeit *nur* auf die zitierten *Zeitschriften*titel und vermerkt mit dem Bleistift alle Stellen, wo *nicht* exzerpierte Zeitschriften genannt sind. Zuletzt läßt man seinen Hilfsarbeiter die Titel der vermerkten Abhandlungen nebst den Verweisen auf Zetteln ausschreiben und die Zettel alphabetisch nach den Verfassern ordnen. Das Durchlaufen eines Bandes der Fortschritte der Mathematik erfordert für einen geübten Bibliographen nur etwa eine Stunde — ich habe selbst mehr als einmal solche Arbeiten ausgeführt. Wäre es richtig, was Herr Öttingen angibt, daß die ursprünglich gesammelten Exzerpte alle in Betracht zu ziehenden Schriften bis auf „einige" umfassen, so würde natürlich das Ausschreiben der vermerkten Titel keine nennenswerte Arbeit erfordern, aber auch wenn man annimmt, daß einige tausend Ergänzungen nötig wären, ist es höchst irreleitend, zu behaupten, daß diese Ergänzungen das Werk um zehn Jahre verzögern würde; statt „Jahre" könnte man viel eher „Wochen" setzen.

Daß man auf diese Weise ein noch besseres Resultat bekommt, als wenn man die Ergänzung der Literaturangaben den betreffenden Autoren überläßt, scheint mir kaum ernstlich in Abrede gestellt werden zu können. Meiner Erfahrung nach sind die meisten Autoren weder sachkundig noch interessiert in betreff literarischer Arbeiten. Wer einen Beleg für die Richtigkeit meiner Behauptung wünscht, sehe S. 596 des *Handwörterbuches* ein, wo man liest:

**Schlöm. Z. Math. Phys.:** Bibliokrisiai (griech.) 34 p. (1901 & 02).

Hier wird also angegeben, daß die *deutsche* Zeitschrift für Mathematik und Physik eine 34 Seiten lange Abhandlung in *griechischer* (!!!) Sprache unter dem Titel „Bibliokrisiai" [!!! d. h. Bücherbesprechungen] enthält. Der Umstand, daß sich in den zwei zitierten Bänden der betreffenden Zeitschrift überhaupt kein Artikel von dem fraglichen griechischen Verfasser findet, kann ja von untergeordneter Bedeutung sein, aber welches Zutrauen verdient ein Mitarbeiter, der solche *unsinnige* Beiträge liefern kann? Beruht dagegen die Angabe nicht auf dem Autor, sondern wenigstens zum Teil auf dem Herausgeber, so ist dieser meines Erachtens inkompetent, ein bibliographisches Werk zu veröffentlichen.

Die nach meiner früheren Besprechung erschienenen Hefte des *Handwörterbuches* bestätigen meiner Ansicht nach durchaus was ich vor zwei Jahren bemerkt habe. Ich halte also den 4. Band des Werkes für eine nützliche Arbeit, obgleich ich noch überzeugt bin, daß er ohne allzu große Mühe hätte besser bearbeitet werden können.

Stockholm. G. Eneström.

# Neuerschienene Schriften.

**Das Zoichen * hedoutet, daß dis betreffonds Schrift der Redaktion nicht vorgelogen hat.**

## Autoren-Register.



### a) Zeitschriften. Allgemeines.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften 18—19 (1904). [Rezension:] Bollett. di hibliogr. d. sc. matem. 8, 1905, 30—31. [1

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegehen von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8⁰. [2

$6_3$ (1905) : 1.

Bollettino di hibliografia e storia delle scienze matematiche pnhhlicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8⁰. [3

1905 : 1.

Физико-математическія науки въ ходѣ ихъ развитія. Журналъ издаваемый **В. В. Бобыниным**ъ. Москва. 8⁰. [4

$1_2$ : 12. — Die physisch-mathematischen Wissenschaften im Laufe ihrer Entwickelnng. Zeitschrift herausgegeben von V. V. Bobynin.

Atti del congresso internazionale di scienze storiche (Roma 1903). Volume XII. Atti della sezione VIII: storia delle scienze (1904). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. $29_2$, 1905, 69—73. (J. T.) [5

Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. his 13. August 1904. Herausgegeben von A. Krazer. Leipzig, Teubner 1905. [6

8⁰, X + 755 + (1) S. + 1 Pl. — [18 Mk.] — [Anzeige:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 14, 1905, 281—282. (Krazer)

---

**Cantor, M.,** [Über den gegenwärtigen Stand des Studiums der Geschichte der Mathematik]. [7

Verhandl. d. 3. internat. Mathem.-Kongr. 1904, 1905, 497—501.

**Eneström, G.,** Über die Bedeutung historischer Hypothesen für die mathematische Geschichtsschreibung. [8

Bibhlioth. Mathem. $6_3$, 1905, 1–8.

**Cantor M.,** Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. — $1^3$ (1894). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 101—104. (F. Rudio, G. Eneström.) — $2^2$ (1900). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 105—110. (H. Suter, G. Eneström.) — $3^2$ (1901). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 111. (G. Eneström.) [9

**Zeuthen, H. G.,** Forelaesninger over Mathematikens Historie. II (1900). [Rezension:] Pedagogisk tidskrift 41, 1905, 142–145. (G. Eneström.) [10

**Tropfke, J.,** Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. I–II (1902–1903). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. $7_3$, 1905, 626–631. (H. Bosmans.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 8, 1905, 12–14. (G. L.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. 36, 1905, 39–41. (S. Günther.) [11

**Smith, D. E.,** A portfolio of portraits of eminent mathematicians. Chicago, Open court publishing company 1905. [12

Folio, 12 Porträts + 12 S. Text. — [3 doll.] — Die 12 Mathematiker sind: Descartes, Pythagoras, Archimedes, Fermat, Leonardo Pisano, Euklides, Cardano, Leibniz, Neper, Viète, Newton, Thales.

**Picard, E.,** Sur le développement de l'analyse et ses rapports avec diverses sciences (1905). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. $29_2$, 1905, 121. (J. T.) — Deutsche Literaturz. 26, 1905, 881–882. (O. Blumenthal.) [13

**Burkhardt, H.,** Wie man vor Zeiten rechnete. [14

Zeitschr. für mathem. Unterr. 36, 1905, 9–20. — Rathausvortrag, gehalten in Zürich den 14. XI. 1901.

**Darboux, G.,** Etude sur le développement des méthodes géométriques (1904). (Englische Übersetzung durch G. B. Halsted:) Popular science monthly 1905. [15

**Loria, G.,** Pour une histoire de la géométrie analytique. [16

Verhandl. d. 3. internat. Mathem.-Kongr. 1904, 1905, 562–574.

**Loria, G.,** Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte (1902). [Rezension:] Arch. der Mathem. $9_3$, 1905, 48–50. (H. Wieleitner.) [17

**Boffito, G.,** Il punto e il cerchio secondo gli antichi e secondo Dante. [18

*Milano*, Istituto Lombardo, Rendiconti $36_2$, 1903, 1129–1142.

**B., A.,** Sulla formula che esprime l'area di un triangolo in funzione dei lati. [19

Supplemento al periodico di matem. 8, 1905, 65–69. — Hauptsächlich historischen Inhalts.

**B., A.,** Notizie storiche relative alla formula di Erone sull' area del triangolo. [20

Supplemento al periodico di matem. 8, 1905, 83. — Wesentlich eine Übersetzung aus der Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, 311–312.

***Günther, S.,** Geschichte der Erdkunde. Wien, Deuticke 1904. [21

8°, XI + 343 S. — [11.60 Mk.] — [Rezension:] Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 115–116. (A. von Braunmühl.) — Naturwiss. Rundschau 20, 1905, 230–232. (A. Klautzsch.)

**Sourek, A. S.,** Über den mathematischen Unterricht in Bulgarien. [22

Verhandl. d. 3. internat. Mathem.-Kongr. 1904, 1905, 651–666.

### b) Geschichte des Altertums.

**Simon, M.,** Über die Mathematik der Ägypter. [23

Verhandl. d. 3. internat. Mathem.-Kongr. 1904, 1905, 526–535.

**Simon, M.,** Zur ägyptischen Mathematik. [24

Arch. der Mathem. $9_3$, 1905, 102–103.

***Dziobek, O.,** Die Astronomie der Babylonier. [25

Prometheus 14, 1903, 625–629, 641–646, 657–660.

**Moors, B. P.,** Le système des poids, mesures et monnaies des Israélites d'après la Bible (1904). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 8, 1905, 31. [26

**Lattes, E.,** Contro il valore unitario attribuito dal Torp al numerale etrusco ΘU. [27

*Milano*, Istituto Lombardo, Rendiconti $36_2$, 1903, 229–238.

***Schmidt, M. C. P.,** Terminologische Studien. Leipzig, Dürr 1905. [28

8°, X + 91 S. — [1.40 Mk.] Die „Studien" beziehen sich hauptsächlich auf die mathematische Terminologie der Griechen und Römer. — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 26, 1905, 1137–1138.

**Vailati, G.,** Intorno al significato della differenza tra gl'assiomi ed i postulati nella geometria greca. [29

Verhandl. d. 3. internat. Mathem.-Kongr. 1904, 1905, 575–581.

***Baumgartner, A.,** Zur Geschichte und Literatur der griechischen Sternbilder. Basel, Lendorff 1904. [30

8°, 42 S. — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 26, 1905, 1073–1074. (G. Thiele.)

### c) Geschichte des Mittelalters.

**Tannery, P.,** Sur la division du temps en instants au moyen âge. [31

Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 111.

**Suter, H.,** Zur Geschichte der Mathematik bei den Indern und Arabern. [32

Verhandl. d. 3. internat. Mathem.-Kongr. 1904, 1905, 556–561. — Über die Vierecksformel in Bhâskaras „Lilâvati". — Über den Verfasser des „Liber augmenti et diminutionis".

**Wiedemann, E.,** Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften [bei den Arabern]. [33

*Erlangen*, Physik.-mediz. Societät, Sitzungsber. 36, 1904, 309–351. — S. 314–339 finden sich einige Notizen über elektrische, magnetische und optische Beobachtungen bei den Arabern.

**Al-Battani,** Opus astronomicum, editum a C. A. Nallino. I. Versio capitum cum animadversionibus (1903). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 26, 1905, 816–818. (A. von Braunmühl.) [34

**Eneström, G.,** Über den Bearbeiter oder Übersetzer des von Boncompagni (1857) herausgegebenen „Liber algorismi de pratica arismetrice". [35
Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 114. — Anfrage.

**Suter, H.,** Über die Bedeutung des Ausdruckes „regula coeci". [36
Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 112.

**Duhem, P.,** Sur l'Algorithmus demonstratus. [37
Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 9–15.

**Björnbo, A. A.,** Walter Brytes „Theorica planetarum". [38
Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 112–113.

*Il Codice Atlantico di Leonardo da Vinci nella biblioteca Ambrosiana di Milano. Riprodotto e pubblicato dalla reale accademia dei Lincei sotto gli auspici e col sussidio del re e del governo. Milano, Hoepli 1894—1904. [39
Folio. — [Etwa 1600 lire.] — [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 8, 1905, 14–15. (G. L.)

***Beck, Th.,** Die Geometrie krummliniger Figuren L. da Vincis. [40
Zeitschr. für gewerblichen Unterricht 18, 1903. 6 S.

### d) Geschichte der neueren Zeit.

***Cantor, M.,** Hieronymus Cardanus. [41
Neue Heidelberger Jahrbücher 13 : 2, 1905.

**Reinoso, N.,** Traductores españoles de los elementos de Euclides. [42
Revista trimestrial de matem. 5, 1905, 25–26.

**Wiedemann, E.,** Studien zur Geschichte Galileis. [43
*Erlangen*, Physik.-mediz. Societät, Sitzungsber. 36, 1904, 273–291. — Über einige Briefe von Matthias Bernegger (1582—1640) an Kaspar Hofmann (1572–1648).

**Carrara, B.,** L'unicuique suum nella scoperta delle macchie solari. (Sunto.) [44
*Roma*, Accad. d. N. Lincei, Atti 58, 1905. 8 S.

**Favaro, A.,** Bonaventura Cavalieri e la quadratura della spirale. [45
*Milano*, Istituto Lombardo, Rendiconti $38_2$, 1905, 358–372.

**Tannery, P.,** Pour l'histoire du problème inverse des tangentes. [46
Verhandl. d. 3. internat. Mathem.-Kongr. 1904, 1905, 502–514.

***Del Galzo, M.,** Una lettera di G. A. Borelli ed alcune indagini di pneumatica da lui compiute. [47
*Roma*, Accad. d. N. Lincei, Memorie 21, 1903, 61–78.

**Runge C.,** Über die Leibnizsche Rechenmaschine. [48
Verhandl. d. 3. internat. Mathem.-Kongr. 1904, 1905, 737–738.

**Braunmühl, A. von,** Zur Geschichte der Differentialgleichungen. [49
Verhandl. d. 3. internat. Mathem.-Kongr. 1904, 1905, 551–555.

***Pahl, Fr.,** Die Entwicklung des physikalischen Unterrichts an unseren höheren Schulen. II. Charlottenburg 1904. [50
4°, 36 S. — Gymnasialprogramm. — [Rezension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 36, 1905, 137–138. (Stegemann.)

**Eneström, G.,** Der Briefwechsel zwischen Leonhard Euler und Johann I Bernoulli. III. [51
Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 16–87.

**Sauerbeck, P.,** Einleitung in die analytische Geometrie der höheren algebraischen Kurven nach den Methoden von J. P. de Gua de Malves (1902). [Rezension:] Monatsh. für Mathem. 16, 1905; Lit.-Ber. 27. (G. K.) [52

**Schar, Fr.,** Johann Heinrich Lambert als Geometer (1905). [Wieder abgedruckt:] Deutsche Mathem.-Verein, Jahresber. 14, 1905, 186–198. [53

**Marcolongo, R.,** Notizie sul „Discorso matematico" e sulla vita di Giulio Mozzi [1730—1813]. [54
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 8, 1905, 1–8.

***Mori, A.,** Cenni storici sui lavori geodetici e topografici e sulle principali produzioni cartografiche eseguite in Italia dalla metà del secolo XVIII ai nostri giorni. Firenze 1903. [55
8°, VII + 79 S.

**Greenhill, A. G.,** The mathematical theory of the top considered historically. [56
Verhandl. d. 3. internat. Mathem.-Kongr. 1904, 1905, 100–108.

**Föppl, A.,** Die Mechanik im 19. Jahrhundert (1902). [Rezension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 36, 1905, 38–39. (A. Wangerin.) [57

**Amodeo, F.,** Gli istituti d'istruzione e scientifici in Napoli intorno al 1800. [58
*Napoli*, Accad. Pontaniana, Atti 34, 1905. 63 S.

**Dickstein, S.,** Wronski als Mathematiker. [59
Verhandl. d. 3. internat. Mathem.-Kongr. 1904, 1905, 515–525.

**Bertrand, J.,** Eloge historique de Michel Chasles. [60
*Paris*, Acad. d. sc., Mémoires 47, 1904, XXXIX–LXII.

**Slechinskij, J.,** [N. H. Abels Leben und Werke]. [61
Vjestnik elem. matem 29, 1903, 169–176, 193–205. — Russisch.

**Köalgsberger, L.,** Carl Gustav Jacob Jacobi. Rede (1904). [Wieder abgedruckt:] Verhandl. d. 3. internat. Mathem.-Kongr. 1904, 1905, 57—85. [62

**Ahrens, W.,** C. G. J. Jacobi und die Jacobi-Biographie. [63
Mathem.-naturw. Blätter 1904. 8 S.

**Schlesinger, L.,** Über den Begriff der analytischen Funktion bei Jacobi und seine Bedeutung für die Entwickelung der Funktionentheorie. [64
Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 88—96.

**Minkowski, H.,** Peter Gustav Lejeune Dirichlet und seine Bedeutung für die heutige Mathematik. Rede gehalten in der Festsitzung der Göttinger Mathematischen Gesellschaft am 13. Februar 1905. [65
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 14, 1905, 149—163 + Porträt.

**Ahrens, W.,** Peter Gustav Lejenne Dirichlet. [66
Mathem.-naturw. Blätter 1905. 9 S.

P. G. Lejeune Dirichlet. [67
Journ. für Mathem. 129, 1905, Heft 1. — Nur Porträt.

**Wirtinger, W.,** Riemanns Vorlesungen über die hypergeometrische Reihe und ihre Bedeutung. [68
Verhandl. d. 3. internat. Mathem.-Kongr. 1904, 1905, 121—139.

**Schlesinger, L.,** Über das Riemannsche Fragment zur Theorie der linearen Differentialgleichungen und daran anschließende neuere Arbeiten. [69
Verhandl. d. 3. internat. Mathem.-Kongr. 1904, 1905, 219—228.

**Бобынинъ, В. В.,** Литература и дѣятели исторіи математики въ XIX вѣкѣ. Бальдассарре Бонкомпаньи. [70
Fiziko-matem. naonki $1_2$, 1905, 332—356. — Bobynin, V. V., Die Literatur und die Arbeiter auf dem mathematisch-historischen Gebiete im 19. Jahrhundert. Baldassarre Boncompagni (Schluß).

**Lüroth, J.,** Eine historische Bemerkung zur Funktionentheorie. [71
Mathem. Ann. 60, 1905, 398—401.

**Brill, A.,** Elimination und Geometrie in den letzten Jahrzehnten. [72
Verhandl. d. 3. internat. Mathem.-Kongr. 1904, 1905, 275—283.

Correspondance d'Hermite et de Stieltjes publiée par les soins de B. Baillaud at H. Bourget. I (1905). [Rezension:] Bullet. d. so. mathém. $29_2$, 1905, 96—99 (G. D.) [73

**Бобынинъ, В. В.,** Первый посвященный исторіи математики русскій специальный журналъ. [74
Fiziko-matem. naonki $1_2$, 1905, 357—377. — Bobynin, V. V., Die erste russische speziell mathematisch-historische Zeitschrift.

**Cantor, G.,** Ein Brief von Carl Weierstraß über das Dreikörperproblem. [75
*Palermo,* Circolo matem., Rendiconti 19, 1905, 305—308. — Der Brief ist vom 26. September 1891 datiert.

**Schlesinger, L.,** Bericht über die Herausgabe der gesammelten Werke von L. Fuchs. [76
Verhandl. d. 3. internat. Mathem.-Kongr. 1904, 1905, 543—545.

*** Störmer, C.,** Verzeichnis über den wissenschaftlichen Nachlaß von Sophus Lie. I. [77
*Christiania,* Videnskabsselskabet, Skrifter 1904, Mathem. Kl. No. 7.

**Müller, E.,** Mitteilungen über die Herausgabe von E. Schröders Nachlaß [78
Verhandl. d. 3. internat. Mathem.-Kongr. 1904, 1905, 216—218.

**Painlevé, P.,** Le problème moderne de l'intégration des équations différentielles. [79
Verhandl. d. 3. internat. Mathem.-Kongr. 1904, 1905, 86—99.

**Kasner, E.,** The present problems of geometry. Address delivered before the section of geometry of the international congress of arts and science, St. Louis, September 24, 1904. [80
*New York,* Americ. mathem. soc., Bulletin $11_2$, 1905, 283—314.

**Segre, C.,** La geometria d'oggidì e i suoi legami coll' analisi. [81
Verhandl. d. 3. internat. Mathem.-Kongr. 1904, 1905, 109—120. — [Wieder abgedruckt:] *Palermo,* Circolo matem., Rendiconti 19, 1905, 81—93.

**Gutzmer, A.,** Geschichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung (1904). [Rezension:] Revista trimestrial de matem. 5, 1905, 40. [82

**Galdeano, Z. G. de,** Echegaray cientifico. [83
Revista trimestrial de matem. 5, 1905, 33—35.

**Alasia, C.,** George Bruce Halsted. [84
Le matematiche pure ed applicate 2, 1903, 1—5 [mit Porträt].

**Cabreira, A.,** Quelques mots sur les mathématiques en Portugal. Notice et défense. Avec biographie de l'auteur par A. Santos Lucas. Lisbonne 1905. [85
8°, VII + 64 S. + Porträt.

Verzeichnis des Verlags von B. G. Teubner in Leipzig auf dem Gebiete der Mathematik, der technischen und Naturwissenschaften nebst Grenzgebieten. Mit einem Gedenktagebuch für Mathematiker und einem Bildnis des Begründers der

Firma B. G. Teubner. Leipzig, Teubner 1904. [86
8°, XLVIII + 272 S. + Porträt. — Das Gedenktagebuch ist von Felix Müller bearbeitet. — [Rezension:] Naturw. Rundschau 20, 1905, 217—218. (E. Lampe.)

*Indici generali degli „Annali di scienze matematiche e fisiche" (1850—1857), degli „Annali di matematica pura ed applicata" (1858—1866) e degli „Annali di matematica pura ed applicata" (1867—1897). Milano 1904. [87
4°. — [Rezension:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 14, 1905, 138.

### e) Nekrologe.

Ernst **Abbe** (1840—1905). [88
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 14, 1905, 217—230 [mit Porträt]. (O. Knopf.) — Naturwiss. Rundschau 20, 1905, 193—195. (E. Wandersleb.)

Karl Anton **Bjerknes** (1825—1903). [89
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 8, 1905, 20—21. (G. L.)

Ferdinand **Caspary** (1853—1901). [90
Arch. der Mathem $9_3$, 1905, 59. (M. Krause.)

Luigi **Cremona** (1830—1903). [91
Giorn. di matem. 42, 1904, 317—336 [mit Schriftverzeichnis]. (E. Bertini; das Schriftverzeichnis ist ein Abdruck aus der Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, 189—195.)

François Jacques Philippe **Folie** (1833—1905). [92
*Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. $7_3$, 1905, 698—700.

Wilhelm Ferdinand **Fuhrmann** (1833—1904). [93
Zeitschr für mathem. Unterr. 36, 1905, 68—71 [mit Porträt]. (C. Kostka.)

Leopold **Gegenbauer** (1849—1903). [94
Leopoldina 39, 1903, 85.

Josiah Willard **Gibbs** (1839—1903). [95
Americ. journ. of sc. $16_4$, 1903, 187—202 [mit Schriftverzeichnis]. (H. A. Bumstead.)

Heinrich **Hartl** (1840—1903). [96
Leopoldina 39, 1903, 102.

Ronald William Henry Turnbull **Hudson** (1876—1904). [97
*London*, Mathem. soc., Proceedings $2_2$, 1905, XV—XVII. (J. F. Cameron.)

Rudolf **Lipschitz** (1832—1903). [98
Leopoldina 39, 1903, 130.

Paolo **Paci** (1847—1904). [99
Loria, G., *Paolo Paci. Cenno necrologico.* Genova 1905. 6 + (1) S. Fol. [mit Schriftverzeichnis].

George **Pirie** (1843—1904). [100
*London*, Mathem. soc., Proceedings $2_2$, 1905, XVIII—XIX. (W. L. Davidson.)

Pietro **Tacchini** (1838—1905). [101
Nature 71, 1905, 564; 583 (R. Meldola).

Paul **Tannery** (1843—1904). [102
*Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. $7_3$, 1905, 544—574. (H. Bosmans.) — Archiv für Geschichte der Philosophie 18, 1905, 293—302. (F. Picavet.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 8, 1905, 27—30. (G. Loria.) — Bullet. d. sc. mathém. $29_2$, 1905, 102—110. (Abdruck des Nekrologes in der „Revue générale des sciences" 16, 1905, 97—99.) — Fiziko-matem. naoukl $1_2$, 1905, 391—392. (V. Bobynin.)

Wilhelm **Weiß** (1859—1904). [103
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 14, 1905, 171—175 [mit Porträt]. (E. Waelsch; mit einem Zusatz von M. Noether.)

### f) Aktuelle Fragen.

**Eneström, G.,** Über den Nutzen der Begründung eines Mathematikerarchivs. [104
Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 97—100.

**Eneström, G.,** Welcher Platz gebührt der Geschichte der Mathematik in einer Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften? [105
Verhandl. d. 3. internat. Mathem.-Kongr. 1904, 1905, 546—550.

**Zeuthen, H. G.,** Gebrauch und Mißbrauch historischer Benennungen in der Mathematik. [106
Verhandl. d. 3. internat. Mathem.-Kongr. 1904, 1905, 536—542.

**Liebmann, H.,** Notwendigkeit und Freiheit in der Mathematik. [107
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 14, 1905, 230—248.

**Fehr, H.,** Enquête de „L'enseignement des mathématiques" sur la méthode de travail des mathématiciens. [108
Verhandl. d. 3. internat. Mathem.-Kongr. 1904, 1905, 603—607.

[Internationaler Mathematiker-Kongreß in Heidelberg 1904.] [109
Verhandl. d. 3. internat. Mathem.-Kongr. 1904, 1905, 1—54.

**Gutzmer, A.,** [Bericht über die Literaturausstellung des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses.] [110
Verhandl. d. 3. internat. Mathem.-Kongr. 1904, 1905, 719—723, 729—731.

[Mathematisch-historischer Kongress in Genf 1904.] [111
Fiziko-matem. naouki $1_2$, 1905, 398—400.

[Mathematiker-Kongress in Saint-Louis 1904.] [112
*New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin $11_2$, 1905, 358—363. (H. S. White.)

# Wissenschaftliche Chronik.

### Ernennungen.

— Professor I. Bendixson in Stockholm zum Professor der höheren Analysis an der Universität („Stockholms högskola") daselbst.

— Professor J. Franel in Zürich zum Direktor des Polytechnikums daselbst.

— Professor J. Ruis-Castizo in Zaragoza zum Professor der theoretischen Mechanik an der Universität in Madrid.

### Todesfälle.

— Henry Dufet, Professor der Physik an der „Faculté des sciences" in Paris, geboren in Nantes den 9. September 1848, gestorben den 10. April 1905.

— Bloomfield Jackson Miller, Mathematiker der „Mutual benefit insurance company" in Newark, gestorben in Newark den 11. April 1905.

— Alfred Potier, Professor der Physik an der „Ecole des mines" in Paris, geboren den 11. Mai 1840, gestorben in Paris 1905.

— Adolf Schepp, Oberleutnant a. D., Übersetzer verschiedener mathematischer Arbeiten, geboren in Wiesbaden den 9. November 1837, gestorben daselbst den 9. März 1905.

— Otto Wilhelm von Struve, früher Direktor der Sternwarte zu Pulkowa, geboren in Dorpat den 25. April (A. St.) 1819, gestorben in Karlsruhe den 13. April 1905.

— Leben Warren, früher Professor der Mathematik am „Colby college", gestorben den 21. April 1905, 69 Jahre alt.

### Vorlesungen über Geschichte der Astronomie.

— An der Universität in Berlin hat Professor W. Förster für das Sommersemester 1905 eine zweistündige Vorlesung über Geschichte der mittelalterlichen Astronomie angekündigt.

### Gekrönte Preisschriften.

— *Accademia delle scienze di Napoli.* Un prix a été décerné à M. E. Pascal pour un mémoire sur la théorie des formes ternaires biquadratiques.

# Un traité grec d'arithmétique antérieur à Euclide.

Par Paul Tannery.[1]

1. L'ouvrage de Boethius *De institutione musica*[2]) contient des données intéressantes pour l'histoire de l'arithmétique chez les Grecs, et n'a certainement pas été assez utilisé à cet égard. J'en mentionnerai deux exemples.

Le premier n'a qu'une importance secondaire; cependant il concerne une indication qui permet d'aborder la solution d'une petite énigme. Aucun écrit ne parait avoir circulé dans l'antiquité sous le nom d'Hippasus de Métaponte,[3]) pourtant, en dehors des légendes relatives à son rôle ou des opinions de physique que lui attribuent les doxographes, on trouve dans Jamblique sur Nicomaque[4]) et dans Théon de Smyrne[5]) des assertions concernant ses travaux sur l'arithmétique et sur la musique, assertions qui supposent une tradition écrite. On doit donc se demander d'où vient cette tradition, et quelle peut en être la valeur.

Or nous lisons dans Boethius (*Mus.* II, 18, p. 250): „Sed Eubulides atque Hippasus alium consonantiarum ordinem ponunt". Ce passage conduit à penser que l'opinion dont il s'agit et qui d'ailleurs n'a aucun intérêt

1) Quelques semaines avant sa mort, Paul Tannery m'écrivit: „J'ai sur le chantier pour vous un article faisant suite à celui que je vous ai envoyé sur la musique grecque. J'ai l'intention de démontrer que la *κατατομή κανόνος* d'Euclide n'est pas authentique, et j'ai exhumé de Boèce un fragment d'Archytas prouvant que déjà il faisait des démonstrations arithmétiques sur le type géométrique." Le manuscrit de cet article a été retrouvé par Madame M. Tannery parmi les papiers de son mari, et il a été mis à ma disposition. L'article n'est pas terminé, mais la partie se rapportant au fragment d'Archytas est achevée, et elle est publiée ici. G. Eneström.

2) Je citerai l'édition de Friedlein: *Anicii Manlii Torquati Severini Boetii De institutione arithmetica libri duo. De institutione musica libri quinque* (Leipzig, Teubner 1867).

3) Voir Laertius Diogenes, VIII, 84.

4) Ed. Tennulius (Arnheim 1668), p. 11: définition du nombre comme „premier paradigme de la formation du cosmos"! p. 141—142: nom donné à la proportion harmonique, auparavant appelée sous-contraire; p. 159: introduction des 4e, 5e et 6e médiétés.

5) Ed. Hiller (Leipzig, Teubner 1878), p. 59: expériences acoustiques (passage suspect d'ailleurs).

avait été défendue par un certain Euboulide, qui l'aurait exposée comme étant d'Hippasus. Mais cet Euboulide est évidemment l'auteur qualifié de pythagoricien dans les *Theologumena arithmetices* (sur l'hexade), et cité à côté d'Androcyde etc., comme ayant raconté que l'âme de Pythagore se réincarnait tous les 216 ans.[1]) Nous pouvons dès lors hardiment conclure que c'est à cet auteur (probablement aussi peu digne de foi qu'Androcyde, et, comme lui, de la première période alexandrine) que l'on doit l'origine de la tradition écrite sur les travaux d'Hippasus en arithmétique et en musique. Il semble au reste l'avoir forgée sans grand talent d'invention, se contentant de lui faire prendre part aux découvertes de Lasos d'Hermione ou à celles d'Archytas (malgré l'anachronisme, en ce qui concerne ce dernier, qui vivait au moins un siècle après Hippasus). Tout au plus, Euboulide s'est-il avisé en outre de mettre au compte du disciple de Pythagore quelqu'une de ses fantaisies personnelles, comme celle qu'a mentionnée Boethius.

2. Mais ce dernier a beaucoup mieux mérité notre reconnaissance, en nous conservant (*Mus.* III, 11, p. 285—286) toute une démonstration d'Archytas, laquelle semble bien offrir des caractères incontestables d'authenticité. Il s'agit de la proposition qu'un rapport *épimore* (c. a. d. de la forme $\frac{n+1}{n}$) ne peut être divisé en deux rapports égaux par l'intercalation d'aucun nombre. La particularité de cette proposition est une garantie évidente de son ancienneté.

A la vérité, la marche de la démonstration est de nature à nous déconcerter quelque peu de prime abord; elle ne se comprend en effet que si on suppose déjà développée une suite de théorèmes assez considérable sur un plan analogue à celui du livre VII des Eléments euclidiens. Mais c'est précisément là ce qui fait à mes yeux l'importance historique de ce fragment d'Archytas, ce qui la rend presque égale, dans le domaine de l'arithmétique, à celle du célèbre fragment d'Hippocrate de Chios, conservé par Simplicius d'après Eudème.

A la vérité encore, Boethius dénigre lui-même la démonstration d'Archytas. „Nimium fluxa est“, dit-il en promettant d'en donner plus loin une meilleure. Mais celle-ci, il l'emprunte (*Mus.* IV, 2, p. 303, 19 à 304,6) à la *κατατομὴ κανόνος* euclidienne, qu'il a presqu'entièrement

1) En sorte qu'après Euphorbe, au temps de la guerre de Troie, il y aurait eu un autre avatar seulement avant Pythagore. Porphyre (*De vita Pythagorae*, 45) en compte trois, Æthalide, Hermotime, Pyrrhos, probablement d'après une tradition plus récente. — Notre Euboulide peut aussi être l'auteur mentionné incidemment par Laertius Diog. II, 41 à propos de Socrate; VI, 20 à propos de Diogène le cynique, pour deux assertions historiques plus ou moins contestables.

soit traduite, soit paraphrasée, et où la proposition en question porte le No 3. Or, il y a au fond entre les deux démonstrations une identité réelle, comme on va pouvoir en juger par la comparaison des deux textes.

ARCHYTAS, d'après BOETHIUS.

Sit superparticularis proportio *.A. B.*, sumo in eadem proportione minimos *.C. DE.* Quoniam igitur sunt minimi in eadem proportione *.C. DE.* et sunt superparticulares, *.DE.* numerus *.C.* numerum parte una sua eiusque transcendit. Sit hæc *.D.* Dico, quoniam *.D.* non erit numerus sed unitas. Si enim est numerus *.D.* et pars est eius, qui est *.DE.*, metitur *.D.* numerus *.DE.* numerum; quocirca et *.E.* numerum metietur, quo fit, ut *.C.* qnoque metiatur. Utrumque igitur *.C.* et *.DE.* numeros metietur *.D.* numerus, quod est impossibile. Qui enim sunt minimi in eadem proportione quibuslibet aliis numeris, hi primi ad se invicem sunt [et solam differentiam retinent unitatem]. Unitas igitur est *.D.* Igitur *.DE.* numerus *C* numerum unitate transcendit. Quocirca nullus incidit medius numerus, qui eam proportionem æqualiter scindat. Quo fit, ut nec inter eos qui eandem his proportionem tenent, medius possit numerus collocari, qui eandem proportionem æqualiter scindat.

EUCLIDE *κατατ. κανόνος*
(*Musici script. Gr.* éd. JAN, p. 152).

*Ἔστω γὰρ ἐπιμόριον διάστημα τὸ ΒΓ, ἐλάχιστοι δὲ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τοῖς Β, Γ ἔστωσαν οἱ ΔΖ, Θ. οὗτοι οὖν ὑπὸ μονάδος μόνης μετροῦνται κοινοῦ μέτρου. ἄφελε ἴσον τῷ Θ τὸν ΗΖ.*

*Καὶ ἐπεὶ ἐπιμόριός ἐστιν ὁ ΔΖ τοῦ Θ, ἡ ὑπεροχὴ ὁ ΔΗ κοινὸν μέτρον τοῦτε ΔΖ καὶ τοῦ Θ ἐστί· μονὰς ἄρα ὁ ΔΗ· οὐκ ἄρα ἐμπεσεῖται εἰς τοὺς ΔΖ, Θ μέσος οὐδείς. ἔσται γὰρ ὁ ἐμπίπτων τοῦ ΔΖ ἐλάττων, τοῦ δὲ Θ μείζων, ὥστε τὴν μονάδα διαιρεῖσθαι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐμπεσεῖται εἰς τοὺς ΔΖ, Θ τις. ὅσοι δὲ εἰς τοὺς ἐλαχίστους μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσι, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται. οὐδεὶς δὲ εἰς τοὺς ΔΖ, Θ ἐμπεσεῖται· οὐδὲ ⟨ἄρα⟩ εἰς τοὺς Β, Γ ἐμπεσεῖται.*

Analysons ces deux démonstrations. ARCHYTAS part d'une définition des nombres épimores qu'il faut supposer identique à celle de NICOMAQUE,

c'est à dire deux nombres tels que leur différence soit un sous-multiple donné du plus petit (par conséquent soit un commun diviseur des deux nombres). Il prend les nombres minimi dans le même rapport (cf. EUCLIDE VII, 33) et il admet implicitement que dans ces minimi, la différence est le même sous-multiple du plus petit que pour les nombres non minimi qui sont dans le même rapport (ib. VII, 10 et 20). Il sait enfin que les nombres minimi pour un rapport quelconque sont premiers entre eux (ib. VII, 21). Dès lors il lui est facile de démontrer que la différence de deux *épimores minimi* est l'unité.

Cette partie de la démonstration est très circonstanciée. Dans la *Divisio canonis* elle est très abrégée, ou plutôt, quoique dans les *Eléments* il ne soit jamais parlé de nombres épimores, la *Divisio* suppose connu d'avance l'objet de cette démonstration. On aura remarqué dans la démonstration d'ARCHYTAS l'opposition très nette entre l'unité et les nombres. Je n'insiste pas sur l'absurdité du membre de phrase que j'ai mis entre crochets. Evidemment BOETHIUS n'avait pas sous les yeux un texte exempt d'interpolations.

Dans la seconde partie de la démonstration, ARCHYTAS procède beaucoup plus rapidement, mais ce qu'il dit est parfaitement suffisant. Comme il ne peut y avoir de moyen entre deux nombres entiers consécutifs, il lui suffit d'invoquer une proposition qui est un cas particulier de celle d'EUCLIDE VIII, 8. La *Divisio* au contraire démontre assez inutilement par l'absurde l'impossibilité d'intercaler aucun moyen; d'après la proportion précitée, elle conclut à l'impossibilité d'intercaler entre deux épimores non minimi soit un soit plusieurs moyens. Cette conclusion dépasse celle d'ARCHYTAS, en ce qu'elle montre l'impossibilité de diviser un intervalle (rapport) épimore en un nombre quelconque de rapports égaux.

3. La démonstration d'ARCHYTAS devait très probablement se trouver dans le traité dont NICOMAQUE nous a conservé le début et qui avait pour objet la théorie de la musique. Ce traité, le seul ouvrage mathématique d'ARCHYTAS qui ait circulé pendant l'antiquité classique, existait encore du temps de PORPHYRE; je ne crois pas que BOETHIUS en ait vu le texte grec et je suppose qu'il a emprunté à APULÉE de Madaure le fragment reproduit ci-dessus.

Comme je l'ai dit, ce fragment me parait suffisant pour prouver l'existence dès le temps d'ARCHYTAS, d'*Eléments arithmétiques* développés sous la forme que nous nommons euclidienne, peut-être même (si la traduction est fidèle) sans l'inutile représentation par des lignes.

On sait en effet qu'EUCLIDE symbolise un nombre, somme de deux autres, par segment de droite divisé en deux autres. Ainsi, dans le texte grec reproduit plus haut, l'épimore est un segment $\Delta Z$ divisé au point $H$

en deux segments, $HZ$ égal au sous-épimore, et $\Delta H$ égal à l'unité. Dans le texte d'ARCHYTAS, une somme est au contraire représentée par deux lettres juxtaposées, dont chacune figure une partie de la somme. Ainsi l'épimore est $DE$, $D$ étant l'unite, et $E$ étant égal au sous-épimore $C$. Ce système est plus simple, et tout à fait analogue à celui qu'emploie ARISTOTE. Il diffère d'ailleurs essentiellement de notre notation algébrique, en ce qu'il reste concret. La lettre remplace bien un nombre quelconque (ou un objet de la pensée), mais seulement là où ce nombre est supposé placé; elle n'en symbolise pas la valeur et ne se prête pas aux opérations. C'est pour cela qu'ARCHYTAS ne prend pas $C$ et $CD$ pour les deux termes du rapport. Il va sans dire que nous devons naturellement supposer les *Eléments arithmétiques* existant avant ARCHYTAS, comme beaucoup moins parfaits que ceux d'EUCLIDE, mais ARCHYTAS lui-même et aussi EUDOXE ont sans aucun doute contribué à les améliorer et à les développer, soit dans un intérêt purement arithmétique, soit dans leurs recherches relatives à la musique.

# Die mathematischen S. Marcohandschriften in Florenz.

Von Axel Anthon Björnbo in Köbenhavn.

2.

**Codex S. Marco Florent. 193.**[1])

(Biblioteca Laurenziana.)

Latein. Pergamenths. in Qvarto aus dem 14. Jahrh.; besteht aus 68 Folien in 3 Teilen. Die Qvaternionen sind im 1. Teil: fol. 1, 2—13; im 2. Teil: 14—21, 22—29, 30—37, 38—45, 46—55, 56; im 3. Teil: 57—68. Blattfläche 23,7 × 17 cm, Schriftfläche 1. Teil: 18 × 14 cm; 2. Teil: 16,1 × 13,4 cm; 3. Teil: 18 × 13,4 cm. Im 1. und 3. Teil zwei Kolumnen, während 2. Teil nur Tafeln enthält.

Auf fol. 1ʳ findet sich die gewöhnliche Anteskription mit Inhaltsverzeichnis: (Hand A): *Iste liber est conuentus sancti Marci de Florentia ordinis predicatorum, quem habuit a clarissimo viro Cosmo Medice ciue florentino*, (Hand B): *quem emit ab heredibus ser Phylippi ser Vgolini Peruzij notarij florentinj.* (Hand C): *Tabule in astrologia. Tabule Alfonsi regis Castelle. Tabule almanach.*

Der Inhalt ist folgender:

**1.** Darstellungen von Astrolabieneinrichtungen mit Erklärungen[2]) (fol. 1ᵛ—2ᵛ).

fol. 1ᵛ: 1. *Hec est forma allidada seu regule cum tabellis ad capiendum altitudinem solis de die et stellarum de nocte et ad ostendendum gradus tam signorum quam planetarum in signis.*

2. *Hec est forma faciei astrolabii, in qua continentur domus, exaltationes, triplicitates triuium et facies planetarum in singulis; ac eciam quidem proprietates graduum signorum.*

fol. 2ʳ: 3. *Hec est forma tabule maioris equatorii, in qua signatur auges et centra vera tam defferencium tam equancium omnium planetarum secundum eorum debitam distanciam a centro terre. Et eciam continentur in ea illa que com-*

1) Vgl. Bibl. Math. $4_3$, 1903, p. 238—245.

2) Die Figuren, zu denen die fünf hier abgedruckten Erklärungen gehören, sind wahrscheinlich dem „*Astrolabium Messehallah*" entnommen.

*muniter in dorso astrolabii describi solent cum circulo mansionum lune.*

fol. 2v: 4. *Hec est forma bouelle, in qua signantur circuli epicyclorum 6 planetarum.*

5. *Hec est forma retis seu arance pro astrolabio; in qua eciam continetur circulus epyciclorum (!) cum centro communi defferencium omnium planetarum.*

**2.** Anonyme Canones tabularum [regis Alphonsi?][1]) (fol. 3r—12v).
Überschrift: fehlt.

Anfang: *Quoniam inter ceteras tabulas, quas de motibus astrorum hactenus composuerunt philosophi, tabule illustris Alfonsi, olim regis Castelle, a nonnullis reputantur astrologis certiores, tum secundum veritatem earundem quamplures compilauerint tabulas temporales, quas almanach vocant. Et licet in hoc* ... (22 Kapitel und 4 kleinere Tafeln).

Schluß: ... *et arcus, qui est inter augem mediam et veram est equo arti in epicyclo. Explicit deo gracias.*

fol. 13r—v ist leer.

**3.** Alphonsinische Tafeln[2]) (fol. 14r—36v).

Überschrift (jüngere Hand): *Tabule Alfonsi regis Castelle.*

Tafel 1: *Tabula differenciarum erarum hic positarum.*

Letzte Tafel: *Tabula equacionis Mercurij tercia.*

Darunter (Hand C): *hucusque Alfonsus rex Castelle.*

**4.** Anonyme astronomische Tafelnsammlung[3]) (fol. 37r—55v).

Überschrift: fehlt.

Tafel 1: *Tabula medij motus argumenti latitudinis lune in annis et mensibus.*

Letzte Tafel: *Hec tabula continet motum solis ad dies, horas et alias finitiones subscriptas ad sciendum verum introitum ipsius solis in principia signorum 12 in anno domini 1365° incipiente secundum sufficientem precisionem.*

fol. 56r—v ist leer.

**5.** Canones zu den vorhergehenden Tafeln (fol. 57r—58r).

Überschrift: fehlt.

Anfang: *Ad perficiendum presentes tabulas dignum duxi dare doctrinam breuem et facilem ad inueniendum eclipses solis et lune secundum*

1) Dieser Text ist mir sonst ganz unbekannt. Über die Canones zu den Alphonsinischen Tafeln vgl. Steinschneider, *Hebr. Übers.* p. 616 ff.

2) Die gegenwärtige Redaktion der Alphonsinischen Tafeln ist die in den Handschriften am allgemeinsten vorkommende; sie stimmt nur teilweise mit den Redaktionen in den Ausgaben 1483, 1492 und 1518—21 überein.

3) Sowohl diese Sammlung als die nachfolgenden Canones sind mir sonst unbekannt; vgl. doch Steinschneider, *Hebr. Übers.* p. 621—622.

*communem modum operandi, ut habeant in se, quicquid necessarium est et vtile astronomo per motus et motuum differentias operari. Ad inueniendum igitur eclipsim solis ...*

Schluß: ... *usque ad medium eius, quo duplato habebitur tempus tocius eclipsis. Explicit.*

**6.** Anonyme astronomische Tafelnsammlung[1]) (fol. 58r—62v).

Überschrift: fehlt.

Tafel 1: *Tabula motus solis et lune in una hora.*

Letzte Tafel: *Tabula diuersitatis aspectus lune in 7° climate.*

**Anhang** (fol. 63r). *Ad ostendendum quid sit diuersitas aspectus, ponatur circulus solis* $\overline{abc}$, *centrum terre* $\overline{d}$, *circumferentia terre* $\overline{efg}$ ... (Schluß): ... *uersus meridiem. Per predictam igitur patet, quid sit diuersitas aspectus lune tam in longitudine quam in latitudine. Et hec omnia uideri possunt manifeste per subiectam figuram.*

fol. 64r—68v sind leer.

### Cod. S. Marco Florent. 194.
(Biblioteca Laurenziana).

Latein. Pergamenths in Qvarto aus dem 14. Jahrh.; besteht aus 135 Folien mit den Nummern 1—61, 63—136. Blattfläche 23,5 × 16,7 cm. Schriftfläche (fol. 1—61 enthalten nur Tafeln) fol. 63—136: 18 × 11 cm. in zwei Kolumnen à 18 × 5 cm. Zeilenzahl 48. Schrift: ital. Minuskel.

Unten auf fol. 1r hat Hand C (?) folgendes Inhaltsverzeichnis hinzugefügt:

*In isto volumine continentur isti libri:*

*Tabule magistri* Campani.

*Tabule tollectane.*

Terhit bentcorat *de motu septem errantium et 8e spere.*

*Introductorium* Arcachel *cum quibusdam judicijs Arabum.*

*Liber* Tolomei *circa judicia, quem scricsit* (sic!) *ad* Aristotonem.

*Flores* Albumansar.

*Plures libelli natiuitacum et aliorum judiciorum.*

Auf dem letzten ursprünglich leeren Blatte steht auf der Kehrseite (fol. 136v) die Subskription: *Liber* Philippi *ser* Ugolini Pieruzi *notarii de Florentia.*

Der Inhalt ist folgender:

**1.** Astronomische Tafeln für die Stadt Pisa[2]) (fol. 1r—2v).

fol. 1r: *Tabula declinationis cuiuslibet gradus zodiaci ab equatore.*

---

1) Diese meistens aus *tabulae eclipsium* bestehende Sammlung ist mir sonst unbekannt.

2) Diese Pisanischen Tafeln sind mir sonst unbekannt

fol. $1^v$: *Tabula eleuationum signorum Pisis, cuius latitudo est 43 gradus, hore eius cancri 15, minuta 12.*

fol. $2^r$: *Tabula altitudinis solis in meridie ad situm Pisarum, cuius latitudo est gradus 43, hore eius cancri 15, minuta 12.*

fol. $2^v$: *Tabula longitudinum ciuitatum ab occidente et latitudinum earum ab equatore.*

fol. $3^r$ ist leer.

**2.** Campanus: Astronomische Tafeln[1]) (fol. $3^v$—$16^v$).

fol. $3^v$—$4^r$: *Tabula equationis solis.*

fol. $4^v$: *Tabula ueri motus planetarum.*

fol. $5^r$: *Tabula medij motus solis super annos Christi ad meridiem Nouarie; latitudo eius 45 gradus, hore cancri 15, minuta 27* (für die Jahre 784, 812, 840, 868 usw. bis 1512; bei dem Jahre 1316 steht ein Kreuz).

fol. $6^r$—$13^v$: *Tabula medij motus* [1]*lune,* [2]*capitis draconis,* [3]*Saturni,* [4]*Jouis,* [5]*Martis,* [6]*Veneris,* [7]*Mercurii,* [8]*octaue spere* (alle für Novara und für die Jahre 784—1512).

fol. $14^r$: *Tabula equationis motus accessionis et recessionis 8^e spere* und *Tabula ueri motus 8^e spere super annos domini nostri Yhesu Christi* (für die Jahre 1320—1350).

fol. $14^v$: *Tabula medie coniunctionis solis et lune* (für Novara).

fol. $15^r$: *Tabula medie oppositionis solis et lune* (für Novara).

fol. $14^v$—$15^r$ (unter den Tafeln): Erklärung der letzten zwei Tafeln: *Canonum magistri Campani ad inueniendum diem, horas et minutum hore medie coniunctionis et oppositionis solis et lune. Ego Campanus composui hanc presentem tabulam ad inueniendum diem, horam et minutum hore medie coniunctionis et oppositionis solis et lune, et feci eam ad annos Christi super medium diem ciuitatis Nouarie . . .*

fol. $15^v$—$16^v$: *Tabula coniunctionis et oppositionis solis et lune* (für Novara).

fol. $17^r$ enthält zwei später hinzugefügte Fragmente: 1. *Anulum ualde utilissimum ad morbum caducum* . . . (2 Zeilen). 2. *Documentum Hermetis contra lapidem* . . (7 Zeilen).

**3.** Toletanische Tafeln[2]) (fol. $17^v$—$60^r$).

Tafel 1: *Tabula equationis solis.*

---

1) Eine andere Redaktion von Campanus' Tafeln findet sich im Cod. Digby 114.

2) Über diese Tafeln s. Steinschneider, *Études sur Zarkali;* Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. 16, 1883, p. 73 ff. Ob die Tafeln, welche noch nicht ediert wurden, von Gerhard von Cremona übersetzt sind, ist nicht festgestellt.

Letzte Tafel: *Tabula vmbre*[1]) (von 1° bis 90°).

**Anhang:** fol. $60^v$: *Tabula horarum horologiorum ad situm Pisarum.*

fol. $61^r$: *Tabula magistri CAMPANI ad inueniendum annos Arabum per annos Christi.*[2])

fol. 62 fehlt.

**4.** Astronomisches Textfragment (fol. $63^r$—$66^r$).

Anfang: . . . / *Sit igitur quedam celestis machine spera omnium infra se planetarum* . . .

Schluß: . . . *alia pars longitudo prior appellatur, id est a tribus signis ad nouem.*

**5.** TÂBIT-IBN-KORRAH: De motu octavæ sphæræ[3]) (fol. $66^r$—$67^v$).

Überschrift: *TEBITH de motu 8^e spere.*

Anfang: *Imaginabor speram equationis diei* . . .

Schluß: . . . *cum quo intrat in lineam numeri.*

**Anhang 1** (fol. $67^v$—$68^r$) (wahrscheinlich 4 aus einem größeren Werke ausgeschnittene Kapitel): [1]) **De eclipsi solis.** *Cum uolueris scire, utrum sol pati debeat.* . . . [2]) **De eclipsi lune.** . . . [3]) **De latitudine 5 planetarum.** . . . [4]) **De eodem** . . . *uidebuntur si aliter minime.*

**Anhang 2** (fol. $68^v$). **Ad bisextum inueniendum.** *Annus arabicus constat ex 354 diebus* . . . (13 Zeilen) . . . *erit bisextus siue non erit.*

**6.** SAHL BEN BISCHR: Introductorium[4]) (fol $69^r$—$74^r$).

Überschrift: *Incipit liber ARCACHELIS introductorius ad librum iudiciorum Arabum.*

Anfang: [*A*] *planetis erraticis que feruntur in signis non quod* . . .

Schluß: . . . *deiectionem et casum et paupertatem.*

**Anhang** (fol. $74^v$): eine astrologische Tafel.

**7.** SAHL BEN BISCHR: De judiciis[5]) (fol. $75^r$—$87^v$).

Überschrift: *Judiciorum Arabum liber incipit et primum de modo questionis docet.*

---

1) Diese Tangententafel ist mit unbedeutenden Abweichungen mit der von CURTZE (Bibl. Math. $1_3$, 1900, p. 412) herausgegebenen identisch.

2) Dieselbe Tafel mit erklärendem Text findet sich in Cod. Harl. 13 (Brit. Mus.), fol. $30^{r-v}$ (14. Jahrh.).

3) Dieser in Handschriften des 13.—15. Jahrhunderts sehr allgemeine Text ist dreimal herausgegeben (1480, 1509 und 1518).

4) Dieser noch nicht edierte Text ist bisher nur im Cod. Digby 47, $19^r$—$29^r$ (14. Jahrh.) und im Cod. Paris. 16208, fol. $26^v$—$33^v$ (13.—14. Jahrh.) gefunden worden; vgl. STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.* p. 606. Der Schluß ist in den drei Handschriften verschieden.

5) Dieser Text ist mit Buch 3 des in Venedig 1493 mit PTOLEMAIOS' *Quadripartitum* herausgegebenen Werkes des SAHL identisch. Vgl. übrigens STEINSCHNEIDER, *Hebr. Übers.* p. 603—607. Neuausgaben: Venedig 1519 und Basel 1533. Der gegenwärtige Schluß stimmt weder mit den Ausgaben noch mit den anderen bekannten Hss.

Anfang: *Cum interrogatus fueris de aliqua interrogatione, incipies aspicere, sicut predixi tibi ...*

Schluß: ... *nam astrologia astrorum sermo interpretatur, astronomia uero ipsum opus intelligitur; inueniuntur tamen pro se inuicem posite.*

**8.** Pseudo-Aristoteles oder Pseudo-Ptolemaios: Liber judiciorum[1]) (fol. $87^v$—$95^v$).

Überschrift: *Judiciorum Ptolemei ad Aristonem filium suum liber incipit.*

Anfang: *Signorum alia sunt masculina, alia feminina ...*

Schluß: . . . *quia medicari non potest, nisi in plura congruo marti*^s^. *Sic et de ceteris intellige pluris.*

**9.** Sahl ben Bischr: De electionibus[2]) (fol. $96^r$—$100^r$).

Überschrift: *Incipit liber de concordantia electionum.*

Anfang: *Omnes concordati sunt philosophi, quod electiones sunt debiles, nisi ...*

Schluß: ... *non retrogradus nec impeditus, sintque ipse et luna mundi a malis. Explicit liber electionum.*

**10.** Astrologisches Fragment[3]) (fol. $100^{r-v}$).

Überschrift: *De uita alicuius* (Kapitelüberschrift).

Anfang: *Cum interrogatus fueris de uita hominis, aspice ascendens ...*

Schluß: ... *per huiusmodi rerum inuestigatione merito uendicauit.*

**11.** Maschallah: Epistola de rebus eclipsibus[4]) (fol. $101^r$—$102^r$).

Überschrift: *Epistola Messehallah.*

---

1) Texte mit diesem Anfang, aber verschiedenem Schluß, die bald Ptolemaios, bald Aristoteles beigelegt werden, finden sich im Cod. Cotton. (Brit. Mus.) App. VI, fol. $8^r$—$20^v$ (ca. 1300); Digby 38, fol. $78^r$ ff. (14. Jahrh.); Amp. F 395, fol. 201—$203^r$ (Anno 1373). Im Cod. Paris. 16208 (13.—14. Jahrh.) stehen zwei verschiedene Redaktionen (fol $59^r$—$65^r$ und fol. $76^r$—$83^v$).

2) Von diesem mehrmals (Venedig 1493 & 1509, Paris 1513 etc.) edierten Texte kenne ich 10 Handschriften.

3) Ursprung dieses Fragmentes vorläufig unbekannt.

4) Dieser Text, den ich aus 25 Handschriften kenne, ist mehrmals (1493, 1519 (?), 1533, 1549 und 1551) herausgegeben worden. Der eigentliche Textanfang ist: *Dixit Messehallah: Quia dominus altissimus* .... Näheres siehe Steinschneider, *Hebr. Übers.* p. 602—3 und Wüstenfeld, *Lat. Übers.* p. 34 Die Aufschlüsse dieser Autoren über Cod. Can. Misc. (Bodl.) 517 sind fehlerhaft. Der gegenwärtige Text (ohne Vorwort) findet sich daselbst fol. $21^v$—$23^r$, und zwar mit der Überschrift: *Incipit ex scientiis scientie astrorum translato* (!) *a Johanne Ispano de arabico in latinum liber Mesalla in rebus eclipsis solis et lune et in coniunctionibus planetarum et in revolutionibus annorum breuiter ellucidata et sunt in ea 12 capitula* und mit der Unterschrift: *translato a Johanne Ispano de arabicho in latinum. Finis. Deo gracias amen.* Wüstenfelds No. 19 ist also mit seinem No. 13 identisch.

Anfang (Vorwort): *Incipit epistola Mesehallah in rebus eclipsis solis et lune et in coniunctionibus planetarum ac reuolutionibus annorum breuiter elucidata, et sunt in ea 12 capitula ...*

Schluß: ... *ultimum eorum, que protulimus in hoc libro, et est ex secretis scientie astrorum. Perfectus est liber Mesehallah, translatus a Johanne Hyspalensi in Lunia ex arabico in latinum sub dei laude et eius auxilio.*

**12.** Maschallah: De cogitationibus[1] (fol. $102^{r-v}$).

Überschrift: *Tractatus de cognitione uel intentione, et refertur ad Mes.* (d. h. Mesehallah).

Anfang: *Precipit Mesehallah, ut constituas ascendens ...*

Schluß: ... *et iam exposuerit superius, qualiter misceas significationes planetarum significationibus signorum.*

**13.** Maschallah: Libellus interpretationum de interrogationibus[2] (fol. $102^{v}$—$105^{v}$).

Überschrift: *Incipit liber interpretationum de occultis.*

Anfang: *In nomine domini incipit libellus interpretationum de interrogationibus, quem puto esse Mesehallah. Inueni enim exemplar extractum de libro suo in interrogationibus. Scito quod aspiciens, id est astrologus ...*

Schluß: ... *sit luna penitus ab infortuna libera. Explicit.*

**14.** Alkindi: De creticis diebus[3] (fol. $105^{v}$—$107^{v}$).

Überschrift: *Incipit opus celeberrimum.*

Anfang: *Lucem creatoris obsecro, ut ueritatis lucem pectori meo admittat ...*

Schluß: ... *et Jupiter sit in oppositione, uincet Saturnus. Explicit.*

**15.** Maschallah: De interrogationibus[4] (fol. $107^{v}$—$114^{v}$).

Überschrift: *In nomine domini peritissimi et misericordissimi receptionis et coniunctionis liber incipit.*

---

1) Über diesen in Nürnberg 1549 gedruckten Text s. Steinschneider, *Hebr. Übers.* p. 600—602. Ich kenne 10 Hss.

2) Über diesen noch nicht edierten Text s. Steinschneider, *Hebr. Übers.* p. 601—602. Hier fehlt der zweite Teil des Buches mit dem Anfang: *Dixit Dorotheus: Cum interrogatus fueris* ... Der eigentliche Anfang ist: *Scito quod aspiciens* ...

3) Dieser Text (oder Textauszug) ist selten. Ich kenne ihn nur aus Cod. Digby 47, fol. $78^{r}$—$83^{r}$ (14. Jahrh.), wo Über (Unter)-schrift heißt: *Incipit* (*Explicit*) *liber de creticis diebus Alkindi.*

4) Diesen in Venedig 1493 nnd Nürnberg 1549 gedruckten Text kenne ich aus Cod. Paris. 16204, p. 404—422 (13. Jahrh); Harl. (Brit. Mus.) 13, fol. $218^{r}$—$228^{r}$ (14. Jahrh.); Digby 194, fol. $128^{r}$—$138^{r}$ (15. Jahrh.); Can. Misc. (Bodl.) 396, fol. $93^{r}$—$105^{v}$ (14. Jahrh.). Das Buch ist von Johannes Hispalensis übersetzt; vgl. Steinschneider, *Hebr. Übers.* p. 600 und Wüstenfeld, *Lat. Übers.* p. 34.

Anfang: *Capitula secretorum iudiciorum. Inuenit uir quidam ex sapientibus librum ex libris secretorum ...*

Schluß: ... *ideoque cogebatur ad hoc nutu dei. Finit liber astrologi* Meseнallaн, *qui interpretatur, quem deus uoluerit magistri uel uoluerim coniunctionem ac receptionem* (diese Stelle unsicher!). *Explicit liber.*

**16.** Abu Maschar: De floribus[1]) (fol. 114ᵛ—122ʳ).

Überschrift: *Incipit liber* Abumasar *de floribus.*

Anfang (Vorwort): *Hic est liber, quem collegit* Abumasar *de floribus eorum, que significant res superiores ...* (Text:) *Dixit* Abumasar: *Oportet primum scire ...*

Schluß: ... *apud te, secundum quod exposui tibi, si deus uoluerit, quia ipse est auxiliator. Explicit liber florum.*

**17.** Gergis (?): De planetarum significationibus[2]) (fol. 122ʳ—124ʳ).

Überschrift: *Incipit liber de planetarum significationibus. De sole. Incipiunt significationes in domibus.*

Anfang: *Sol cum fuerit in ascendente ...*

Schluß: ... *nec dimittas hoc quod dico tibi et proferas aliud et inuenies, si deus uoluerit. Explicit.*

**18.** Alkabisi: De judiciis, Different. 2, Cap. 1.[3]) (fol 124ʳ—125ʳ).

Überschrift: *Tractatus alius 7 planetarum ad plurima et diuersa* (am Rande mit jüngerer Hand: *extat in* Alcabitio).

Anfang: *Saturnus est masculinus, malus, diurnus ...*

Schluß: ... *et postea anni 56 uel 59; si superat, uiuit annos octoginta. Explicit liber iste.*

**19.** Omar ben Ferukhan al-Tabari: De nativitatibus I—IV[4]) (fol. 125ʳ—135ᵛ).

1) Dieser Text, von welchem ich über 20 Abschriften kenne, ist von Sessa in Venedig s. a. (4°) gedruckt worden. Andere Ausgaben Augsburg 1488, Venedig 1488 u. 1495.

2) Dieser Text wird am öftesten dem alten, unsicheren Astrologen Gergis oder Jergis beigelegt, in einer Handschrift (Cod. Borbon. VIII. C. 44) dem Abu-Maschar. Steinschneider (Zeitschr. für Mathem. 16, 1871, p. 370) vermutet hier einen Auszug aus dem in Venedig 1509 gedruckten *Liber nouem judicum.* Ein Vergleich bestätigt nicht diese Annahme. S. auch Steinschneider, *Die Europäischen Übersetzungen aus dem Arabischen;* Sitzungsber. der Akad. d. Wissensch. in Wien (Philolog.-hist. Kl.) 151, 1905, S. 23—24.

3) Auszug aus dem in Venedig 1485, 1491 und 1521 gedruckten von Johannes Hispalensis übersetzten Text des Alkabisi (Alchabitius): *Postulata a domino prolixitate ....*

4) Diesen mehrmals (Venedig 1503 und 1551) gedruckten Text hat Steinschneider behandelt in Zeitschr. der deutschen morgenl. Ges. 18 (1864), p. 179; vgl. auch Bibl. Math. $5_2$, 1891, p. 67. Der Verfasser ist sowohl in den alten Handschriften (wie hier) als von neueren Autoren oft mit Al-Fergani verwechselt worden.

Überschrift: *Incipit liber Omar ben Alfarg' de natiuitatibus.*

Anfang: *Dixit Omar ben Alfarghani et iberiadis* (!); *Scito quod diffinitiones natiuitatum nutritione sunt 4* ...

fol. 134v: ... *in gradus equales, et ipsum erit ascendens. Finit liber cum laude dei et eius auxilio.* — **De patre.** *Item alie sententie de patre Ptolemei* ...

Schluß: ... *gradus ad quem peruenit directio est primus gradus arietis et diuisor Jupiter. Perfectus est uniuersus liber Omar Benfargar Tyberiadis cum laude dei et eius auxilio, quem transtulit magister Johannes Hyspalensis atque Luniensis de arabico in latinum.*

**20.** Astrologisches Fragment[1]) (fol. 135v—136r).

Überschrift: *Descriptio 7 planetarum secundum Syriacas* (Kapitelüberschrift).

Anfang: *Sol qui primus est planetarum* ... (mehrere ähnliche Kapitelüberschriften) ...

Schluß: ... *et luna cum parte fortune erit.*

**21.** 3 Kapitel aus Ali ben Ahmed al-Imrani's liber electionum[2]) (fol. 136r).

Anfang: *Patet, cum hoc fecerimus, ut sit luna* ...

Schluß: ... *in cancro uel leone seu in uirgine. Hec tria ultima capitula excerpta sunt de libro electionum, edito ab Aly filij Abymetembram et translato de arabico in latinum Abraham Judeo existente interprete.*

fol. 136v enthält außer der oben erwähnten Subskription zwei kleine Fragmente von viel jüngeren Händen geschrieben.

1) Den Ursprung dieses Fragments habe ich nicht ermitteln können.

2) Nach der Unterschrift sollte das gegenwärtige Fragment ein Auszug sein aus Imrani's von Abraham bar Chijja (Savasorda) und Plato Tiburtino übersetzten *De electionibus* (in 2 Büchern mit bezw. 5 und 13 Kapiteln. Anfang: *Rogasti me karissime* ...)

# Gerhard von Cremonas Übersetzung von Alkwarizmis Algebra und von Euklids Elementen.

Von Axel Anthon Björnbo in Köbenhavn.

## 1.

Kürzlich hat G. Eneström die Frage von den verschiedenen lateinischen Übersetzungen mit dem Titel „algebra et almuchabala" berührt.[1]) Er hebt hervor, daß der von Libri[2]) herausgegebene „Liber Maumeti filii Moysi Alchoarismi de algebra et almuchabala" *(Hic post laudem dei et ipsius exaltationem inquit . . . . secundum cambium et mensurationem et ponderationem)* mit dem in den alten Verzeichnissen über Gerhard von Cremonas Übersetzungen aufgeführten Titel: *Liber alchoarismi* (Variant: *algorismi, argorismi*) *de iebra et almucabala* in allen Beziehungen so gut übereinstimmt, daß es nicht unbegründet gewesen sei, wenn man Libris Text dem Gerhard zugeschrieben hat, obwohl in den bisher bekannten Abschriften[3]) dieser[4]) Übersetzung von Muhammed ibn Musa Alkwarizmis Algebra kein Übersetzer genannt wird. „Auf der anderen Seite", sagt Eneström, „kann freilich bemerkt werden, daß der Cod. Vatic. 4606 einen *Liber qui secundum Arabes vocatur algebra et almucabala* enthält, der ausdrücklich als „translatus a magistro Giurardo Cremonense in toleto de arabico in latinum" bezeichnet wird.[5]) . . . Die zwei erwähnten algebraischen Traktate sind nicht wesentlich verschieden, und es ist nicht

1) Bibl. Math. $5_3$, 1904, S. 404.

2) G. Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie.* I (Paris 1838), S. 253 ff.

3) Diese Abschriften sind: Cod. Par. 9335, Par. 7377 B, Cantab. Mm. 2. 18, alle vom 14. Jahrh. Libri, l. c. S. 253, nennt außerdem eine dritte Pariserhs., die ich nicht kenne. Hierzu kommt noch (vgl. unten) Cod. Matrit. Aa 30.

4) Es gibt eine andere Übersetzung durch Robertus Retinensis. Vgl. Bibl. Math. 1899, S. 90; Steinschneider, *Die Europäischen Übersetzungen aus dem Arabischen.* I; Sitzungsber. der Akad. d. Wissensch. in Wien (Philolog.-hist. Kl.) **149**, 1904, S. 72; Steinschneider, Zeitschr. für Mathem. **16** (1871), S. 375, 392; E. Wappler, *Zur Geschichte der deutschen Algebra im fünfzehnten Jahrhundert.* Programm Zwickau, 1887, S. 1.

5) Ediert in Boncompagni, *Gherardo Cremonese* (Roma 1851), S. 28 ff.

leicht einzusehen, warum Gherardo Cremonese sich die Mühe gegeben hätte, zwei so wenig verschiedene Schriften über denselben Gegenstand zu übersetzen".

Eneström hat Recht; wir können uns schwerlich vorstellen, daß Gerhard die beiden Texte übersetzt habe; hat er aber nur den einen übersetzt, so muß es der anonyme von Libri herausgegebene sein, so daß der von Boncompagni herausgegebene „ausdrücklich dem Gerhard beigelegte", ihm jedoch nicht gehört. Libris Text ist nämlich unzweifelhaft eine Übersetzung aus dem Arabischen[1]), und erinnert, was Sprache, Terminologie und namentlich den äußeren Apparat betrifft, an die sicheren Gerhardschen Übersetzungen. Boncompagnis Text, als Gerhard-Übersetzung betrachtet, ist dagegen sehr verdächtig; so findet man in demselben keine einzige *sichere* Spur der „Übersetzung", sondern drei Verse (!)[2]) und mehrere Stellen[3]), die kaum von einem Araber geschrieben sein können; überhaupt trägt Boncompagnis Text in jeder Beziehung den Charakter einer mittelalterlichen (italienischen?) Bearbeitung oder Modernisierung von einer nach dem Arabischen hergestellten Übersetzung, wie z. B. Libris Text. Nach den äußeren Kriterien also ist Boncompagnis Text sicher, Libris vielleicht eine Gerhardsche Übersetzung, nach den inneren aber ist Libris wahrscheinlich eine solche, Boncompagnis dagegen gar keine Übersetzung, sondern vielmehr eine neuere Bearbeitung, vielleicht eben von Libris Text.

Wenn es sich nun um Gerhard von Cremona handelt, stellt sich die Sache so, daß die inneren Kriterien, und von den äußeren die Übereinstimmung an Titel mit den alten Verzeichnissen über Gerhards Übersetzungen viel schwerer wiegen als die Über- und Unterschriften; denn aus der Lebensbeschreibung Gerhards[4]) wissen wir, daß er seine Übersetzungen nicht signierte, so daß die in den Abschriften seiner Übersetzungen vorkommenden Subskriptionen, was auch meistens aus ihrer Form ersichtlich ist, sicher von anderen hinzugefügt worden sind; folglich sind derartige Subskriptionen, in welchen Gerhard genannt wird, zwar nicht *wertlos*, aber den anderen Kriterien gegenüber *minderwertig*, um so mehr, da sie nie in Ich-Form geschrieben sind, mit einer einzelnen Ausnahme niemals Datierungen enthalten und meistens nur in einzelnen Abschriften jeder

1) Siehe z. B. folgende Stellen der Ausgabe: S. 253, 1 *(Hic post laudem dei et ipsius exaltationem inquit)*; 256, 23—24; 258, 13—18; 265, 9—12; 269, 10—11; 270, 26—27; 274, 16—24; 284, 19—20; 285, 21—22.

2) Boncompagnis Ausgabe S. 31, 32, 34.

3) Ebenda S. 36, 21—23; 41, 34—35; 46, 4—5 usw.

4) Ediert in Boncompagni, *Gherardo Cremonese*, S. 3—4 und in Wüstenfeld, *Die Übersetzungen Arabischer Werke in das Lateinische* (Göttingen 1877), S. 57—58.

Übersetzung vorkommen. Deswegen sind so viele mit GERHARDS Namen verknüpfte Fragen noch ungelöst oder gar falsch gelöst, weil man immer ohne den rechten Sinn für Quellenkritik ganz unwillkürlich die Fragen in erster Linie nach den Subskriptionen gelöst, und sich nicht die Mühe gegeben hat, die verschiedenen in Frage kommenden Übersetzungen inhaltlich und sprachlich miteinander zu vergleichen, und zwar zuerst ohne Rücksicht auf die gerade in diesem Falle minderwertigen und deshalb erst in zweiter Linie in Betracht kommenden Subskriptionen.

Bestätigung dafür, daß die hier geäußerten Ansichten nicht „Redensarten" sind, die uns aus dem traurigen Dilemma mit den zwei Texten „de algebra et almuchabala" heraushelfen sollen, finde ich in den von mir registrierten Handschriften. Es zeigt sich nämlich, daß die Übersetzung von ALCHABITIUS' *Liber introductorius (Postulata a domino prolixitate .... quin preferamus eum)*[1]) in einer Handschrift ausdrücklich dem GERHARD, in allen anderen dagegen richtig JOHANNES HISPALENSIS beigelegt wird; ferner, daß ein anderer Text[2]) [Anf.: *Quisquis in 4 matheseos* . . . (Vorwort) . . . *Unitas est origo* . . . (Text) . . . *erunt denominata a fractionibus majoribus*] (welcher dem Anschein nach nicht eine direkte Übersetzung aus dem Arabischen ist und in keiner Beziehung an GERHARDS Übersetzungen erinnert) in einer Handschrift als eine „Übersetzung" GERHARDS bezeichnet, in einer anderen dem JOHANNES HISPALENSIS als „Herausgeber" beigelegt wird, so daß es also nachweisbar ist, daß die Subskriptionen, in welchen GERHARD ausdrücklich als Übersetzer genannt wird, nicht immer als tadellos zu betrachten sind. — Endlich habe ich nach freundlicher Mitteilung von J. L. HEIBERG den Inhalt einer lateinischen Madrider Handschrift registrieren können[3]), in welcher LIBRIS Text als *Liber MAUMET filii MOYSI ALGORISMI de algebra et almichabala translatus a magistro GERARDO CREMONENSI in Toleto de arabico in latinum* bezeichnet wird, wodurch die meiner Ansicht nach schon im voraus einzig denkbare Lösung der Frage, ob LIBRIS oder BONCOMPAGNIS Text als die GERHARDsche Übersetzung von ALKWARIZMIS *Liber de algebra et almuchabala* zu betrachten sei, insofern bestätigt wird, als auch LIBRIS Text, die sicher echte „Übersetzung", ausdrücklich dem GERHARD zugeschrieben wird.

1) Mehrmals herausgegeben, z. B. Venedig 1491, 1502, 1521.

2) Ediert von BONCOMPAGNI, *Trattati d'aritmetica* II (Roma 1857); vgl. ENESTRÖM, Bibl. Math. $6_3$, 1905, S. 114.

3) Cod. Matrit. Aa 30 (14. oder 15. Jahrh.?), wo der Text 352ʳ—359ʳ zu finden ist. Die Subskription ohne Angabe von Anfang und Schluß des Textes sowie Näheres über den Inhalt der Handschrift hat HEIBERG schon in den Abhandl. z. Gesch. d. Math. 5, 1890, S. 5 mitgeteilt.

## 2.

Es ist lange als ein bedauernswerter Mangel in unseren Kenntnissen der mittelalterlichen Übersetzungsliteratur betrachtet worden, daß wir die 15 Bücher der Euklidischen Elemente in Gerhards Übersetzung nicht kannten, obwohl nach den alten Verzeichnissen seiner Übersetzungen eine solche existieren sollte.[1]) Die verschiedenen Redaktionen dieses Werkes, die in den lateinischen Handschriften des Mittelalters gefunden wurden, waren nämlich (nach den Über- und Unterschriften in den Handschriften) entweder auf Athelhart von Bath oder auf den Kommentator Johannes Campanus, oder aber auf griechische Quellen zurückzuführen. Gerhards Übersetzung dagegen, die unzweifelhaft wie die des Athelhart nach einer arabischen Vorlage hergestellt sein mußte, konnte bisher nicht nachgewiesen werden, indem eben alle die Redaktionen, die nach der Zeit dem Gerhard beigelegt werden könnten und in denen Spuren der Übersetzung aus dem Arabischen vorkamen, eine mehr oder weniger intime Verwandtschaft mit der dem Athelhart ausdrücklich beigelegten Übersetzung aufwiesen. Deshalb schrieb auch neulich Steinschneider: „Diese Übersetzung scheint verloren, wenn sie überhaupt existierte“.[2]) Mir war die Auffindung dieser Übersetzung, an deren Existenz ich nicht zweifelte, sehr erwünscht, weil ich schon seit mehreren Jahren zu einer Neubehandlung von Gerhards Übersetzungen mathematischer und astronomischer Arbeiten Material sammelte, und seine Euklidübersetzung die natürliche und unentbehrliche Grundlage dieser Neubehandlung bilden mußte.

Aus der uns überlieferten Lebensbeschreibung Gerhards wissen wir, wie oben hervorgehoben, daß er seine Übersetzungen nicht signierte, und in der Tat sind die lateinischen Übersetzungen, die wir ihm mit Sicherheit zuschreiben können, in unseren Handschriften zum größten Teil anonym. Also dürfen wir nicht erwarten, eine dem Gerhard zugeschriebene Euklidübersetzung zu finden; vielmehr müssen wir dieselbe

---

1) Vgl. Boncompagni, *Gherardo Cremonese* S. 5.

2) Steinschneider, *Europäische Übersetzungen*, S 18. — Im Gegensatz zum schroffen Standpunkte Steinschneiders hat man versucht einen vermittelnden zu begründen, indem man angenommen hat, Gerhard habe nur die ältere Athelhartsche Übersetzung bearbeitet, z. B. sie mit verkürzten, vermehrten oder neuübersetzten Beweisen versehen; vgl. Bubnow, *Opera Gerberti* (Berlin 1899), S. 174—175. Undenkbar ist diese Erklärung wohl nicht; nach allem aber, was man von Gerhards Tätigkeit weiß, darf man zunächst der Annahme geneigt sein, daß er ausschließlich als Übersetzer arabischer Handschriften, dagegen nicht als Kommentator oder Bearbeiter seiner lateinischen Vorgänger gearbeitet hat. Ein direkter Beweis dieser Annahme, d. h. ein Gegenbeweis gegen den vermittelnden Standpunkt kann freilich nicht geführt werden.

unter den anonymen Übersetzungen suchen; folglich ist hier ein Fall, in welchem wir mit gewissem Recht hoffen dürfen, durch die von mir in Angriff genommene systematische Registrierung der mittelalterlichen Handschriften die verlorene Übersetzung wieder zu finden.

Schon im Jahre 1901 fand ich nun im Cod. Reg. 1268 eine bisher unbekannte Übersetzung von Buch X—XV der Elemente, und zwar eine aus dem Arabischen herstammende. Aus meiner Beschreibung[1]) der betreffenden Handschrift, die STEINSCHNEIDER leider entgangen ist, geht hervor, daß wir hier nur mit einem Fragment zu tun haben, d h. daß die fehlenden Bücher I—IX ursprünglich in der Übersetzung einbegriffen waren, ferner daß die Übersetzung in gewissen Beziehungen vollständiger als die bisher bekannten war[2]); ich machte auch darauf aufmerksam, daß sie vielfach an die sicheren GERHARDschen Übersetzungen erinnerte, und dabei dachte ich namentlich an den *Liber trium fratrum*, AL-NARIZIS EUKLIDkommentar und MENELAOS' Sphärik.

Im Sommer 1904 wurde es mir durch eine vom Carlsbergfond zu Kopenhagen gewährte Reiseunterstützung möglich, in Frankreich und England über 300 Handschriften zu registrieren, und auf dieser Reise fand ich in Paris und Boulogne-sur-Mer zwei vollständige Exemplare derselben Übersetzung, von welcher ich in Rom nur die sechs letzten Bücher gesehen hatte, und später fand ich in Oxford sehr alte Fragmente derselben. Auch in Brügge findet sich ein Exemplar. Das ganze Material ist:

Vollständige Exemplare (Anf.: *Ea a quibus procedit scientia ex qua res que scitur comprehenditur ... erit habens 12 bases pentagonales equilateras et equalium laterum. Et illud est quod demonstrare voluimus*): 1) Cod. Paris. 7216 (15. Jahrh.), fol $1^r$—$107^v$ mit Scholien $107^v$—$108^r$. — 2) Cod. Bononiens. (Boulogne-sur-Mer) 196 (14. Jahrh.), fol. $1^r$—$144^r$ mit Scholien $144^r$—$148^r$. — 3) Cod. Brugens. 521 (14. Jahrh.).[3])

Fragmente: 1) Cod. Reginens. 1268 (14. Jahrh.), fol. $92^r$—$142^v$ (Buch X—XV) mit Scholien fol. $142^v$—$143^v$. — 2) Cod. Digby 174 (Schluß des 12. Jahrh.), fol. $160^r$—$173^v$ (Buch XI, 2—XIV, Prolog inkl.)[4])

1) Abhandl. zur Gesch. der math. Wissensch. 14, 1902, S. 138—142.

2) Die Übersetzung enthält z. B. die sonst nur in den griechischen Handschriften vorkommende Vorrede des HYPSIKLES zu dem von ihm verfaßten 14. Buch.

3) Dieses Exemplar kenne ich nur aus P. LAUDE, *Cat. méthod. des mss. de la bibl. publ. de Bruges* (Bruges 1859), p. 452—453.

4) Fol. $99^r$—$159^r$ in dieser Handschrift ist ein Gemisch von verschiedenen Teilen der EUKLIDübersetzung des ATHELHART VON BATH. 1) fol. $99^r$—$132^r$: ATHELHARTS Übersetzung Buch I—XI, 1 (zuerst Vorwort: *Geometria sicut et reliquarum ...*, dann Überschrift: *Primus liber EUCLIDIS philosophi de arte geometrica incipit uel incipit ars geometrie CCCLXIIII propositiones et proposita continens ab EUCLIDE in arabico* (!) *composita et ab ADHELLARDO BACN. in latinum transsumpta*, dann drei Zeilen mit kurzen

In keiner dieser Abschriften wird der Übersetzer genannt; jedoch bezweifle ich nicht, hier die Gerhardsche Übersetzung gefunden zu haben. Wir wissen nämlich nur von zwei mittelalterlichen Übersetzungen der Euklidischen Elemente aus dem Arabiscben, und zwar die von Athelhart und Gerhard, und da, wie gesagt, alle die früher bekannten Übersetzungen und Redaktionen entweder auf die Athelhartsche oder auf den griechischen Urtext zurückzuführen sind, so bleibt nur Gerhard übrig, wenn eine neue nach dem Arabiscben hergestellte Übersetzung auftaucht; die Anonymität ist in diesem Falle kein Gegenbeweis, sondern vielmehr eine Bestätigung der Autorschaft Gerhards. Ein endgültiger Beweis dafür, daß Gerhard der Übersetzer sei, läßt sich indessen bei dieser wie bei so vielen der ihm beigelegten Übersetzungen nur durch einen eingehenden Vergleich von Sprache, Terminologie, Schreibweise der Eigennamen usw. führen, und zwar so, daß man die streitigen Übersetzungen mit den sichergestellten vergleicbt. Diese sehr beschwerliche Erörterung babe ich in Angriff genommen, ohne jedoch vorläufig das Ende und die scbließlichen Resultate überblicken zu können. Hier sollen deswegen nur in aller Kürze ein paar Hauptpunkte bervorgehoben werden.

Aus dem Umstand, daß in der neugefundenen Übersetzung öfters griechische Benennungen vorkommen, wie z. B. *rombus*, *romboides* (wo Athelhart die arabischen Benennungen behält), *exhigonius*, *ambligonius*, *orthogonius*, *gnomo*, *pyramis*, *poligonius*, *pentagonus* usw., läßt sich nur beweisen, daß diese Übersetzung wenigstens in der Hauptsache von der Athelhartschen unabbängig ist. Es lag nämlich eine alte Euklidübersetzung aus dem Griechischen vor, welcher sowohl Athelhart[1]) und Plato von Tivoli[2]) als Gerhard von Cremona[3]) besonders in der

Bemerkungen über Definitionen und Postulate, endlich I, 1—XI, 1, wo überall vom Satze nur die ersten Worte, dagegen ziemlich lange Beweise. — 2) 139ʳ—145ʳ: Wiederholung (Abschrift einer fast gleichzeitigen Hand) von den obigen Blättern 125ʳ—132ʳ, d. h. Buch X, 1—XI, 1. — 3) 146ʳ—153ʳ: Buch II, 1—V, 2 derselben Übersetzung, diesmal mit vollständigen Sätzen. — 4) 154ʳ—159ʳ: Buch VI, 11—X derselben Übersetzung, Buch VII—X jedoch ohne Beweise. — 5) 160ʳ—173ʳ: Buch XI, def. 1—XIV Prolog, wo XI, def. 1—XI, prop. 1 der obigen (Athelhartschen) Übersetzung entnommen sind, während XI, 2—XIV, Prolog ein Fragment der neuen, bisher unbekannten Übersetzung bildet. — Mit dieser Handschrift muß Cod. Marc. 332 (Valentinellis Katalog XI, 6) fol 86ʳ—233ʳ (13. Jahrh.) verglichen werden. Da findet man auch eine Redaktion von Athelharts Euklidübersetzung mit Vorwort (*Geometria sicut et* . . ., vgl. oben).

1) Vgl. Heiberg, Zeitschr. für Math. **35**, 1890; Hist. Abt. p. 48—58 u. 81—98.

2) Vgl. Curtzes Ausgabe von Abraham bar Chijjas *Liber embadorum;* Abhandl zur Gesch. d. math. Wissensch. **12**, 1902, p. 10—18.

3) Vgl. Curtzes Ausgabe von Gerhards Übersetzung des Al-Narizi-Kommentars (Leipzig 1899).

Terminologie sehr oft folgten, und der anonyme Übersetzer der neugefundenen Übersetzung hat offenbar diese Übersetzung aus dem Griechischen auf ganz andere Weise als ATHELHART benutzt. Dagegen glaube ich nicht, daß sich genau eine und dieselbe sonst nie vorkommende Anwendung von griechischen Lehnwörtern in der neugefundenen EUKLIDübersetzung und in den sicheren GERHARDschen Übersetzungen feststellen läßt, so daß auf diesem Wege wahrscheinlich jeder Versuch einer positiven Beweisführung hinfällig wird. Zu bemerken ist jedoch, daß wir in dem neugefundenen Texte die aus der GERHARDschen AL-NARIZI-Übersetzung bekannte Bezeichnung *superficies equidistantium laterum et rectorum angulorum*[1]) wiederfinden, wo ATHELHART *parallelogrammum rectangulum* sagt.

Viel mehr Beweiskraft haben dagegen die einzelnen Fälle, wo in der neugefundenen Übersetzung arabische Lehnwörter vorkommen. So findet man Buch 5, Def. 11, wo der griechische Text *ὁμόλογα μεγέθη* hat, die Übersetzung *quantitates mutuascita*, und an derselben Stelle schreibt GERHARD im AL-NARIZI-Kommentar *quantitates mutasicha*[2]); bei ATHELHART fehlt diese Definition. In den Definitionen des 11. Buches findet man in der neuen EUKLIDübersetzung öfters neben *axis* das Wort *meguar.*[3]) Dieses Wort findet man nun in fast allen sicheren Übersetzungen des GERHARD, wo von festen Umdrehungsachsen geredet wird; dagegen ist es mir nicht gelungen, das Wort in den älteren Übersetzungen zu finden, die dem GERHARD nicht gehören. Während PLATO VON TIVOLI das Wort vermeidet, sagt JOHANNES HISPALENSIS (z. B. in seiner Übersetzung von AL-FERGANIS Astronomie) immer *axis;* dasselbe Wort braucht EUGENIUS Amiratus in seiner Übersetzung von PTOLEMAIOS' Optik, während HERMANNUS DALMATA in PTOLEMAIOS' Planisphærium *axis* oder *axis intelligibilis* sagt. ATHELHART VON BATH endlich sagt *latere fixo* an den Stellen, wo in der neugefundenen Übersetzung *cum inter meguarem figitur latus* steht. In GERHARDS Übersetzungen von *Liber trium fratrum,* ALKINDIS Optik, THEODOSIOS' *De locis habitabilibus,* AUTOLYKOS' *De spera mota* und GEBERS Astronomie finde ich aber das Wort *meguar,* und ebenso in der kürzeren Übersetzung von THEODOSIOS' Sphärik, die ich schon früher aus anderen Gründen GERHARD beigelegt habe.[4]) Schon lange

1) Buch 2, Def. 1.

2) S. CURTZES Ausgabe S. 165, 31.

3) Eigentlich *cum inter meguarem figitur latus* = *μενούσης πλευρᾶς* bei Umdrehungskörpern.

4) GERHARDS unedierte Übersetzung von AL-FERGANIS Astronomie habe ich noch nicht untersuchen können; in MENELAOS' Sphärik und MESSAHALLAH *De orbe* kommt der Begriff der Umdrehung nicht vor. In GERHARDS Übersetzung von PTOLEMAIOS' *Syntaxis* habe ich bisher nur *axis* und nicht *meguar* finden können.

vordem ich die neue Euklidübersetzung fand, hatte ich mir den Gebrauch des Wortes *meguar* als ein Kriterium für Gerhardsche Übersetzungen notiert, und von dem Augenblick an, da ich das Wort in der neuen Euklidübersetzung fand, war ich überzeugt, daß sie dem Gerhard gehören müsse.

Für diejenigen, die weitere Bestätigung meiner Annahme wünschen, stelle ich ein paar von den Euklidischen Definitionen und *termini technici* nach Athelharts Übersetzung, Al-Narizis Kommentar und dem neugefundenen Texte zusammen.

II, def. 1.

| Athelhart. | Al-Narizi. | Gerhard (?). |
|---|---|---|
| Omne parallelogrammum rectangulum sub duabus lineis angulum rectum dicitur contineri. | Omnis superficies equidistantium laterum et rectorum angulorum a duabus lineis continetur, que unum angulorum eius rectum continent. | Omnis superficies equidistantium laterum et rectorum angulorum ab his duabus rectis lineis dicitur comprehendi, que rectum comprehendunt angulum. |

V, def. 1—2.

| | | |
|---|---|---|
| Pars est quantitas quantitatis minor maioris, cum minor maiorem numeret. — Multiplex est maior minoris quando eam minor metitur. | Minor quantitas est pars maioris quantitatis, quando mensurat maiorem. — Et est maior multiplex minoris, cum cadit supra ipsam mensuratio minoris. | Quantitas minor est pars quantitatis maioris, quando mensurat maiorem. — Maior uero est multiplex minoris, quando cadit super eam mensuratio minoris. |

X, def. 1.

| | | |
|---|---|---|
| Quantitates quibus fuerit una quantitas communis eas numerans, dicentur communicantes, quibus vero non fuerit una communis quantitas eas numerans dicentur incommensurabiles. | Quantitates, sive sint linee, sive superficies sive corpora, que dicuntur communicantes, sunt, quas omnes una quantitas numerat. Quantitates, que dicuntur incommunicantes, sunt, quas omnes una quantitas non mensurat. | Quantitates sive sint linee, sive superficies, sive corpora, que communicantes dicuntur, sunt, quas omnes quantitas una mensurat. Incommunicantes uero dicuntur, quas omnes una quantitas eis communis non mensurat. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| V, def. 9[1]) | proportio duplicata | prop. duplicata cum iteratione | prop. cum iteratione duplicata |
| „ „ 10 | prop. triplicata | prop. triplicata cum iteratione | prop. triplicata cum reiteratione |
| „ „ 11 | prop. e contrario | conuersio proportionis | prop. conuersa |
| „ „ 12 | permutatim | prop. permutata | prop. permutata |
| „ „ 14 | prop. coniuncta | prop. composita | prop. composita |
| „ „ 15 | prop. disiuncta | prop. diuisa | prop. diuisa |
| „ „ 16 | prop. euersa | prop. euersa | prop. euersa |
| „ „ 17 | prop. equa | prop. equalitatis | prop. que equalitas nominatur. |

Die ganz offenbare Ähnlichkeit der dem GERHARD „sicher“ gehörigen AL-NARIZI-Übersetzung und der anonymen EUKLIDübersetzung rührt nicht davon her, daß demselben im Gegensatz zu ATHELHARTS Übersetzung eine und dieselbe arabische Redaktion zugrunde lag; denn während AL-NARIZI die arabische Übersetzung des HADJDJADJ BEN JUSUF benutzte, ist der neugefundene lateinische EUKLID offenbar nach einem arabischen Manuskript hergestellt, welches die Redaktion des TÂBIT IBN KURRAH enthielt, und TÂBIT machte selbst eine Übersetzung (vgl. unten) oder verbesserte die des ISHAK BEN HONEIN.[2]) Welche arabische Redaktion dem ATHELHART als Vorlage diente, ist dagegen schwerer zu ermitteln, teils weil so viele ATHELHART-Rezensionen vorliegen, teils weil seine ursprüngliche Übersetzung aller Wahrscheinlichkeit nach eine „verkürzte und bearbeitete“ war. In dieser Beziehung ist die neue lateinische Übersetzung, die ich also bis auf weiteres dem GERHARD beilegen muß, viel klarer und viel interessanter als ATHELHARTS; sie ist nämlich ganz offenbar weder gekürzt noch bearbeitet, sondern eine „worttreue“ Übersetzung einer arabischen Handschrift, die eine neuere Redaktion der TÂBITredaktion enthielt, und sie bietet uns viel neues Material zur Überlieferungsgeschichte der *Elemente*. Sehr oft kommen TÂBITzitate vor, eingeleitet mit Wendungen wie: *THEBIT dixit: In alia scriptura repperi, quod ostenditur alio modo* oder *Dixit THEBIT: Inueni in alia scriptura greca huius figure aliam probationem*, durch welche Zitate uns TÂBITS textkritische Behandlung der Elemente „nach griechischen Handschriften“ bezeugt wird. Ebenso oft kommen aber

1) V, def. 13 fehlt bei ATHELHART; AL-NARIZI und GERHARD (?) haben hier *proportio mutasicha* bezw. *mutuascita*; vgl. oben.

2) STEINSCHNEIDER (*Euklid bei den Arabern*, Zeitschr. für Math. **31**, 1886; Hist. Abt. p. 83) meint, obwohl KIFTI dem TÂBIT eine unabhängige EUKLIDübersetzung beilegt, er habe nur die Übersetzung ISHAKS verbessert. Durch die unten angeführten Stellen erhält KIFTIS Bericht jedoch eine wesentliche Bekräftigung.

„Aliter"-Beweise, Hinzufügungen und „textkritische" Bemerkungen des neueren Kommentators vor, eingeleitet mit Wendungen wie: *Hoc preterea theorema in alio repperi libro una notatum figura* oder *Inueni in aliis scripturis aliam probationem, que est huiusmodi* oder *Post hoc reperi in alia arabica scriptura hoc, neque reperi illud in greco* oder *Quoniam in alio libro reperi quod dicitur in XI et XII theorematibus in uno tantum theoremate contineri ne aliquid nobis deesset curaui hoc ipsum theorema ponere;* aus solchen Bemerkungen ersehen wir deutlich, daß der jüngere Kommentator die ihm vorliegende Tâbit-Redaktion mit anderen ebenso fleißig und mit ebenso klarem Sinn für Textvariante verglichen hat wie Tâbit die griechischen Handschriften. Aus zwei Hauptstellen endlich geht hervor, daß dieser neue Kommentator, wie gesagt, eine Tâbit-Redaktion als Grundlage benutzte und wohl mit Recht glaubte, eine Tâbit-Übersetzung vor sich zu haben: 1) *Refert Thebit qui transtulit hunc librum in arabicam linguam se inuenisse quod additur ante figuram XXXI huius partis in quibusdam scriptis grecis cuiusdam Icanich Babilloniensis, quod tamen non est de libro*; 2) *Hic additur quedam figura, que non est huius libri neque inuenitur translatione Thebit . . et dicitur esse cuiusdam qui uocatur Jezidi.* Auch in der Beziehung sind diese Stellen interessant, daß hier zwei entstellte Namen vorkommen, von bezw. einem griechischen und einem arabischen Autor, die den alten Rätseln vermutlich zwei neue hinzufügen werden.

Ob diese neugefundene mittelalterliche Euklidübersetzung einer Ausgabe wert sei, muß ich vorläufig dahinstellen, so viel aber wage ich zu behaupten, daß sie eine literargeschichtliche Quelle von nicht geringfügigem Wert bildet, und daß sie einerseits über die Geschichte der *Elemente* bei den Griechen und Arabern neues Licht verbreiten wird, anderseits die Grundlage einer Neubehandlung „nach inneren Kriterien" der übersetzerischen Tätigkeit des Gerhard von Cremona abgeben kann.

# Zu Albrecht Dürers Näherungskonstruktionen regelmäßiger Vielecke.

Von K. Hunrath in Kassel.

Die geometrischen Näherungskonstruktionen Dürers hat S. Günther zum Gegenstande einer besonderen Untersuchung [1]) gemacht, indem er die lateinische Ausgabe von 1532 [2]) zugrunde legte. Ich habe Gelegenheit gehabt, in diese lateinische Ausgabe Einsicht zu nehmen, und habe eine Wahrnehmung gemacht, betreffend die Konstruktion des regelmäßigen Dreizehnecks.

Es steht nämlich an der betreffenden Figur (Fig. 2) ganz nahe unter $b$ neben einem Teilstrich der Buchstabe $c$, zwischen $b$ und $c$ die Zahl 24, im Text aber, daß $dc$, nicht $db$, zur Seite des regelmäßigen Dreizehnecks genommen werde. Ich setze die Figur zur Konstruktion des regelmäßigen Elfecks [3]) (Fig. 1), wie auch im Buche geschehen ist, links von der Figur

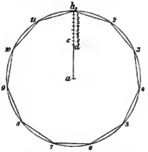


Fig. 1.

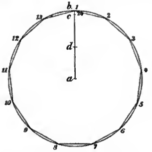


Fig. 2.

zur Konstruktion des regelmäßigen Dreizehnecks. Sodann setze ich die Beschreibungen der Konstruktionen zur Vergleichung nebeneinander.

1) *Die geometrischen Näherungskonstruktionen* Albrecht Dürers. Programmabhandlung der Studienanstalt Ansbach, 1886. — Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* 2², S. 459—467.

2) *Institutiones geometricae.* Paris 1532.

3) $bd$ im Buche, wie oben, versehentlich in 9 (statt in 8) gleiche Teile geteilt

Quum promptè hēdecagonum intra circulum designari cupio, sumo quartam diametri partem, cui adiungo octavam eiusdem quartae. . .

Quod si circulo figura tredecim laterum atque angulorum aequalium inscribenda fuerit, tunc ex quodam centro *a* circulum scribo, in quo excito semidiametrum *ab*, quam per medium seco in puncto *d*, quo facto utor longitudine *dc*, qua tredecies intra peripheriam circumeo.

Wenn man annehmen darf, daß bei der Beschreibung der Konstruktion des Dreizehnecks hinter den Worten „in puncto *d*" etwa die Worte „et a *bd* abscindo vicesimam quartam partem eiusdem *bd*, i. e. quartae diametri partis, nempè *bc*" ausgefallen seien, so ergibt sich eine Konstruktion von großer Genauigkeit. Es ergibt sich nämlich aus $\sin\frac{a}{2} = \frac{23}{96}$ $\frac{a}{2} = 13^0\ 51'\ 43''$, $a = 27^0\ 43'\ 26''$. Der Fehler ist daher, da $\frac{360^0}{13} = 27^0\ 41'\ 32''$ ist, $< 2'$.

Auch zu Dürers Konstruktion des regelmäßigen Neunecks (Fig. 3 und 4) möchte ich einiges bemerken. Er teilt den Kreisumfang in sechs gleiche Teile und beschreibt um die drei in Fig. 3 nicht mit Buchstaben bezeichneten Teilpunkte mit dem Kreishalbmesser Bogen, so daß drei „Fischblasen" entstehen. Darauf teilt er den Kreishalbmesser *ab* in drei gleiche Teile, errichtet auf *ab* im Teilpunkte 2 eine Senkrechte, welche den Umfang der Fischblase in *e* und *f* schneidet, und beschreibt um *a* mit *ae* einen Kreis. Es sei dann *ef* die Seite des in diesen Kreis einbeschriebenen regelmäßigen Neunecks. Endlich zeichnet er neben der Hauptfigur (Fig. 3) einen Kreis mit dem Halbmesser *ae* und in diesen ein Neuneck mit der Seite *ef* (Fig. 4).

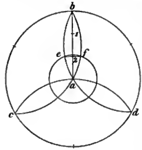
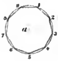


Fig. 3.

Nun löst Daniel Schwenter[1]) die Aufgabe, für einen gegebenen Kreis die Seite des einbeschriebenen regelmäßigen Neunecks zu finden, auf folgende Weise. Er beschreibt um den Mittelpunkt des gegebenen Kreises einen beliebigen größeren Hilfskreis, wendet auf diesen Dürers Konstruktion an und verlängert *ae* und *af* der Figur 3 bis zum Durchschnitt mit dem Umfang des gegebenen Kreises. Der Hilfskreis ist selbstverständlich ganz überflüssig. Man kann nämlich entweder den äußeren Kreis der Figur 3


Fig. 4.

1) Cantor, a. a. O. S. 667.

als den gegebenen ansehen oder einen um $a$ mit $a2$ zu beschreibenden. Im ersten Falle hat man nur $ae$ und $af$ bis zum Durchschnitte mit dem äußeren Kreise zu verlängern. Im zweiten Falle hat man mit dem dreifachen Halbmesser des gegebenen Kreises einen diesem konzentrischen Kreis zu beschreiben und an diesem Kreise DÜRERS Konstruktion auszuführen. Dann ist $ef$ annähernd die Seite des um den als gegeben angenommenen Kreis beschriebenen regelmäßigen Neunecks, und die Durchschnitte von $ea$ und $ef$ mit dem als gegeben angenommenen Kreise sind zwei benachbarte Ecken des einbeschriebenen Neunecks.

In allen Fällen kann man, statt die gefundene Seite des Neunecks neunmal in den Kreisumfang einzutragen, die Ecken des Neunecks auch so finden, daß man vom Kreismittelpunkt (Fig. 3) sowohl nach den nur durch Teilstriche bezeichneten Punkten des äußeren Kreisumfangs Gerade zieht, als auch durch die Punkte, in denen der mit $ae$ beschriebene Kreis die Fischblasen schneidet. Dadurch findet eine Verteilung des Fehlers statt. Die drei Mittelpunktswinkel, deren einer $eab$ ist, sind jeder $= 39^0\ 36'$, die sechs andern jeder $= 60^0 - 19^0\ 48' = 40^0\ 12'$; drei Seiten sind jede $= 0{,}677$, sechs jede $= 0{,}687$ Halbmesser. Für die Mittelpunktswinkel sind die Fehler $-\ 24'$, bezw. $+\ 12'$, für die Seiten, da die Sehne zu $40^0$ etwa 0,684 Halbmesser beträgt, $-\ 0{,}07$, bezw. $+\ 0{,}03$ Halbmesser. Von den Umfangswinkeln sind drei jeder $= 139^0\ 48'$, sechs jeder $= 140^0\ 6'$, der Fehler also $-\ 12'$, bezw. $+\ 6'$.

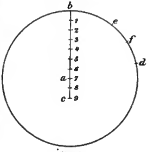


Fig. 5.

Ein Versehen bei dieser Rechnung hat mich auf eine sehr genaue Näherungskonstruktion des regelmäßigen Neunecks geführt. Statt $2 \sin 20^0$ hatte ich $2 \sin 40^0 = 1{,}285575$ gebildet und bemerkt, daß dieser Wert sehr nahe $= \frac{9}{7} = 1{,}285714$ ist. Trägt man nun $\frac{9}{7}$ Halbmesser als Sehne in den Kreis (Fig. 5) $bd = bc$ und halbiert den Bogen $bd$ in $e$, so ist $\sin bae = \frac{9}{14}$, $\sphericalangle\ bae = 40^0\ 0'\ 18'', 7$, der Fehler also $< \frac{1}{3}'$.

Wohl bemerke ich, daß, wenn man die Sehne $bf$ gleich dem Halbmesser in den Kreis einträgt, $df$ annähernd die Seite des einbeschriebenen regelmäßigen Achtzehnecks ist. Es fällt aber dann auf den Mittelpunktswinkel des Achtzehnecks ein Fehler $= 2 \cdot 18'', 7$, und wenn man aus dem Achtzehneck das Neuneck finden wollte, auf den des Neunecks ein Fehler von $4 \cdot 18'', 7$.

# Über ein Eulersches Konvergenzkriterium.

Von Alfred Pringsheim in München.

Wie Herr G. Eneström in seinem Aufsatze: *Über eine von Euler aufgestellte allgemeine Konvergenzbedingung* [1]) mit Recht hervorhebt, scheint Euler die für die Konvergenz der Reihe $\Sigma a_\nu$ sichtlich *notwendige* Bedingung

$$(1) \qquad \lim_{n=\infty} \left| S_{kn} - S_n \right| = 0 \qquad (\text{wo: } S_r = a_0 + a_1 + \cdots + a_r)$$

auch als eine *hinreichende* angesehen zu haben. Wenigstens folgert er einzig und allein aus der Existenz dieser Beziehung für die Reihe mit dem allgemeinen Gliede

$$\frac{c}{a + \nu^\alpha b}$$

im Falle $\alpha > 1$, deren *Konvergenz* [2]). Auf diese Weise findet er aber in Wahrheit nur *zufällig* ein *richtiges* Resultat auf Grund eines *falschen* Schlusses. Hätte er ganz dasselbe Experiment, wie an der eben genannten Reihe, an irgend einer Reihe vorgenommen, die *schwächer divergiert*, als die *harmonische*, z. B. an der Reihe mit dem allgemeinen Gliede

$$\frac{1}{\nu \cdot \lg \nu},$$

so wäre er auf Grund der Beziehung:

$$S_{kn} - S_n = \sum_{n+1}^{kn} \frac{1}{\nu \cdot \lg \nu} < \frac{(k-1)n}{n \cdot \lg n} = \frac{k-1}{\lg n}$$

und Anwendung des Kriteriums (1) zu der *irrigen* Ansicht gelangt, daß auch die Reihe $\sum \frac{1}{\nu \cdot \lg \nu}$ *konvergieren* müsse.

Das fragliche Kriterium ist also *unrichtig*: es genügt eben *nicht* für die Konvergenz der Reihe, wenn die Bedingung (1) für *jedes einzelne*

1) Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, p. 186—189.

2) Comment. acad. sc. Petrop. 7, 1734—35 (gedruckt 1740), p. 152, 153.

(übrigens beliebig groß anzunehmende) $k$ erfüllt ist. Dagegen läßt sich die Bedingung (1) zu einer für die Konvergenz (notwendigen und) *hinreichenden* umgestalten, wenn man noch den Zusatz macht: es müsse die Bedingung (1) erfüllt sein *gleichmäßig* für alle ganzzahligen $k$. Dies würde nähmlich folgendes besagen:

Zu jedem $\varepsilon > 0$ muß sich ein $N$ so fixieren lassen, daß für *jedes* $k = 2, 3, 4, \ldots$ die Ungleichung besteht:

(2) $$|S_{kn} - S_n| < \varepsilon, \quad \text{wenn: } n > N.$$

Vergleicht man diese Bedingung mit der gewöhnlichen Form der *notwendigen und hinreichenden* Konvergenz-Bedingung, nämlich:

(3) $$|S_{m+p} - S_m| < \delta \text{ für } m \geq M, \quad p = 1, 2, 3, \ldots,$$

so fällt zunächst auf, daß an Stelle der in (3) auftretenden *ganz beliebigen*, nur die Schranke $M$ übersteigenden Zahl $m + p$ in Ungleichung (2) eine Zahl von der *speziellen* Form $kn$ steht. Die Bedingung (2) erscheint also auf Grund dieses Vergleiches zunächst nur als eine für die Konvergenz sicherlich *notwendige*. Daß sie aber trotz ihres *scheinbar speziellern* Charakters sich auch als *hinreichend* erweist, resultiert aus der Beziehung:

$$\begin{aligned} |S_{n+p} - S_n| &\equiv |S_{n+p} - S_{n(n+p)} + S_{n(n+p)} - S_n| \\ &\leq |S_{n(n+p)} - S_{n+p}| + |S_{(n+p)n} - S_n| \end{aligned}$$

d. h. schließlich:

$$|S_{n+p} - S_n| < 2\varepsilon \text{ für } n \geq N,$$

sofern nur die Bedingung (2) erfüllt ist.

Übrigens kann man, statt das *gleichmäßige* Verschwinden von

$$\lim_{n=\infty} |S_{kn} - S_n|$$

zu postulieren, die fragliche Konvergenz-Bedingung (1) auch dadurch zu einer (notwendigen und) *hinreichenden* machen, daß man ihre Existenz fordert, auch wenn $k$ *gleichzeitig* mit $n$ und zwar *unabhängig* von $n$ *ins Unendliche* wächst; ja es genügt sogar schon, wenn die Existenz jener Bedingung *nur* für solche ins Unendliche wachsende $k$ feststeht — d. h. es gilt der Satz:

Die Beziehung

(4) $$\lim_{k,n=\infty} |S_{kn} - S_n| = 0 \quad (\text{wo: } S_r = a_0 + a_1 + \cdots + a_r)$$

bildet eine *notwendige und hinreichende* Bedingung für die *Konvergenz* der Reihe $\Sigma a_\nu$.

Auf Grund der Definition für den *Grenzwert einer zweifach unendlichen Zahlenfolge*[1]) kann nämlich der Inhalt der Aussage (4) folgendermaßen formuliert werden:

Zu jedem $\varepsilon' > 0$ gibt es zwei natürliche Zahlen $K$ und $N$, derart daß:

(5) $$|S_{kn} - S_n| < \varepsilon', \text{ wenn } k \geqq K,\ n \geqq N.$$

Man bemerke, daß diese Bedingung noch etwas *weniger* verlangt, als die Bedingung (2), insofern hier die Existenz der betreffenden Ungleichung *nicht für alle k*, sondern nur für $k \geqq K$ gefordert wird. Die Bedingung (5) bezw. die damit äquivalente (4) ist also *a fortiori* eine für die Konvergenz der Reihe $\Sigma a_\nu$ *notwendige*. Andererseits ist aber für *jedes beliebige* $k = 2, 3\ 4, \ldots$

$$|S_{kn} - S_n| \equiv |S_{kn} - S_{Kkn} + S_{Kkn} - S_n|$$
$$\leqq |S_{K(kn)} - S_n| + |S_{(Kk)n} - S_n|$$

und daher, in Übereinstimmung mit der bereits als *hinreichend* erkannten Konvergenzbedingung (2):

$$|S_{kn} - S_n| \leqq 2\varepsilon' \quad \text{für: } k = 2, 3, \ldots,\quad n \geqq N,$$

sofern nur die Bedingung (5) erfüllt ist. Die letztere bezw. das Kriterium (4) erweist sich somit auch als *hinreichend* für die *Konvergenz* der Reihe $\Sigma a_\nu$.

Bezüglich der Anwendung des nunmehr *verbesserten* Eulerschen Kriteriums zum Beweise der *Konvergenz* von $\sum \frac{1}{\nu^\alpha}$ für $\alpha > 1$ oder der *Divergenz* von $\sum \frac{1}{\nu \cdot \lg \nu}$ möge noch erwähnt werden, daß man mit der von Euler benützten Abschätzungsmethode:

$$\sum_{n+1}^{kn} \frac{1}{\nu^\alpha} < \frac{(k-1)n}{n^\alpha} = \frac{k-1}{n^{\alpha-1}},$$

bezw. der ihr nachgebildeten:

$$\sum_{n+1}^{kn} \frac{1}{\nu \cdot \lg \nu} > \frac{(k-1)n}{kn \cdot \lg kn} = \frac{k-1}{k \cdot \lg kn}$$

nicht auskommt, sondern daß man schärfere Abschätzungsformeln, etwa die bekannten Mac Laurin-Cauchyschen[2]) Integralbeziehungen zu Hilfe nehmen muß.

1) Vgl. Sitzungber. der Akad. der Wissensch. in München **27** (1897), p. 103; Mathem. Ann. **53** (1899), p. 290.

2) Vgl. *Encyklopädie der mathem. Wissensch.* **1**, p. 82, Fußnote 169.

Man findet auf diese Weise:

$$\sum_{n+1}^{kn} \frac{1}{\nu^a} < \int_n^{kn} \frac{dx}{x^a} = \frac{1}{a-1}\left(\frac{1}{n^a} - \frac{1}{(kn)^a}\right)$$

$$< \frac{1}{a-1} \cdot \frac{1}{n^a}$$

und erkennt unmittelbar, daß der Wert des fraglichen Ausdruckes durch Wahl einer unteren Schranke für $n$ *unabhängig von $k$ beliebig klein* wird, bezw. daß sein Grenzwert *verschwindet*, wenn $k$ gleichzeitig mit $n$ *in beliebiger Weise* unendlich wird

Andererseits ergibt sich:

$$\sum_{n+1}^{kn} \frac{1}{\nu \cdot \lg \nu} > \int_{n+1}^{kn} \frac{dx}{x \lg x} = \lg \frac{\lg (kn)}{\lg (n+1)} = \lg \frac{\lg k + \lg n}{\lg (n+1)}$$

ein Ausdruck, dessen Wert, *wie groß* man auch $n$ annehmen mag, durch geeignete *Vergrößerung* von $k$, immer wieder *beliebig groß* gemacht werden, bezw. für welchen ein bestimmter Grenzwert bei $k = \infty$, $n = \infty$, überhaupt *nicht existiert.*

Die vorstehende Betrachtung gibt noch zu folgender Bemerkung Anlaß. Bekanntlich hat Cauchy die *notwendige und hinreichende* Bedingung für die Reihen-Konvergenz gelegentlich[1]) in einer Form ausgesprochen, welche mit Anwendung der hier benutzten Bezeichnungen folgendermaßen lauten würde:

$$\lim_{n=\infty} (S_{n+p} - S_n) = 0 \,. \tag{6}$$

Auch diese Bedingung erweist sich als *nicht hinreichend,* wenn sie lediglich für *jedes einzelne* $p = 1, 2, 3, \ldots.$ erfüllt ist, und es gewinnt daher zunächst den Anschein, als ob hier Cauchy den ganz analogen Fehler, wie Euler, begangen habe. In der Tat haben auch verschiedene Autoren, insbesondere Catalan,[2]) jene Cauchysche Konvergenz-Bedingung schlechthin für *falsch* erklärt. Der Fehler liegt aber in Wahrheit *nicht* bei Cauchy, sondern bei jenen Autoren, welche die betreffende Cauchysche Abhandlung nicht mit der nötigen Aufmerksamkeit studiert haben. Denn aus der Art und Weise, wie Cauchy die Anwendung der fraglichen Bedingung durch Beispiele erläutert,[3]) geht mit *unzweideutiger Sicherheit* hervor, daß er unter der in Gleichung (6) mit $p$ bezeichneten Zahl nicht nur jede

1) *Exercices de mathématiques* 2 (1827), p. 221; „Sur la convergence des séries".
2) *Traité élémentaire des séries*, Paris 1860, p. 4.
3) A. a. O. p. 224, 225, 227, 228, 230.

beliebige *bestimmte*, sondern auch jede gleichzeitig mit $n$ *beliebig ins Unendliche wachsende* Zahl verstanden wissen will. Es handelt sich also in dem fraglichen Zusammenhange bei Cauchy *nicht*, wie bei Euler, um einen wirklichen logischen Fehler, sondern lediglich um eine vorübergehende Unvollständigkeit des Ausdruckes, welche durch die weiteren Ausführungen ihre vollkommene Ergänzung findet.[1])

---

Anknüpfend an die von Herrn G. Eneström in Fußnote 1 des zitierten Aufsatzes gemachte Bemerkung, er habe die von mir in der *Encyklopädie* 1, p. 146, Fußnote zu p. 79, erwähnte Fouriersche Definition der Reihenkonvergenz auf der von mir bezeichneten Seite nicht aufgefunden, möchte ich noch hinzufügen, daß in der Tat a. a. O. infolge eines mir nicht recht erklärlichen Schreib- oder Druckfehlers fälschlich die Seitenzahl 326 statt 315 (der Pariser Mémoires 4, 1819—1820) angegeben ist. An letzterer Stelle findet sich tatsächlich folgendes: „Cela[2]) ne résulte pas seulement de ce que les valeurs des termes diminuent continuellement, car cette condition ne suffit pas pour établir la convergence d'une série; il est nécessaire que les valeurs auxquelles on parvient, en augmentant continuellement le nombre des termes, s'approchent de plus en plus d'une limite fixe, et ne s'en écartent que d'une quantité qui peut devenir moindre que toute grandeur donnée". Das ist aber genau dieselbe Definition, wie sie Cauchy auf p. 124, 125 seiner *Analyse algébrique* (1821) gegeben hat.[3])

1) Vgl. im übrigen meine Bemerkungen: Sitzungsber. der Akad. der Wissenschaften in München 27 (1897), p. 327—334. (Auf p. 328, Zeile 13 steht dort aus Versehen: *„unendlich groß"* statt: *„von Null verschieden"*; desgl. Zeile 17: *„unendlich* ausfällt" statt: *„von Null verschieden* ausfällt".)

2) Savoir la convergence de certaines séries.

3) Die Fouriersche Arbeit (*Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides*) ist, wie eine Fußnote a. a. O. p. 185 ausdrücklich besagt, wörtlich so abgedruckt, wie sie im Jahre 1811 bei der Akademie eingereicht wurde.

# L'œuvre de Paul Tannery comme historien des mathématiques.

Par H. G. Zeuthen à Köbenhavn.[1])

Paul Tannery naquit à Mantes le 20 décembre 1843. Après des études aux lycées du Mans et de Caen, il entra en 1861 à l'Ecole polytechnique de Paris, et il en sortit dans le corps des ingénieurs des tabacs, où il poursuivit régulièrement sa carrière. Il fut successivement élève ingénieur à l'école d'application des tabacs en 1863, sous-ingénieur de la manufacture des tabacs de Lille en 1865, sous-chef du bureau des manufactures (ministère des finances) en 1867, directeur des travaux de la construction des magasins de tabacs en feuilles de Bergerac en 1871, directeur des travaux de la transformation mécanique de la manufacture des tabacs de Bordeaux en 1874, ingénieur de la manufacture du Havre en 1877, ingénieur du service de l'expertise à Paris en 1883, directeur des tabacs du Lot et Garonne (Tonneins) en 1886, et de la Gironde (Bordeaux) en 1887, chef du bureau au ministère des finances en 1890, et enfin directeur de la manufacture des tabacs de Pantin en 1894. Il est mort à Pantin le 27 novembre 1904.

Pendant le siège de Paris en 1870, Paul Tannery commandait, comme capitaine, la seconde batterie à pied du corps franc d'artillerie. Il fut capitaine commandant la 18ᵉ batterie du 3ᵉ régiment d'artillerie territoriale en 1877, chef d'escadron d'artillerie territoriale en 1890, et en 1894 il fut nommé lieutenant colonel d'artillerie.

A côté de ses fonctions professionnelles, Paul Tannery s'est dédié très tôt à des études scientifiques embrassant différents domaines: les mathé-

1) La notice biographique p. 257—260 a été rédigée par moi pour tenir lieu d'une notice plus détaillée, qui m'avait été promise par un des amis de Paul Tannery, mais qui n'a pu être achevée assez tôt pour trouver place cette année dans la Bibliotheca Mathematica. De plus amples renseignements sur la vie de Paul Tannery ont été donnés par son frère, M. Jules Tannery, dans les Comptes rendus du IIme congrès international de philosophie 1904 (Genève 1905), p. 775—797.
G. Eneström.

matiques, la philosophie, l'archéologie et la philologie classique, et avant tout l'histoire des sciences. Il a publié dans ces domaines, depuis 1876, plusieurs centaines de travaux. Il commença en 1884 à la Sorbonne un cours libre sur l'histoire des mathématiques. Voici comment il exposait lui-même le dessein qu'il avait formé relativement à ce cours[1]): „Dans le cours que j'ai l'intention d'ouvrir en France, à la faculté des sciences de Paris, à partir du 15 mars 1884, je me propose moins de traiter ex professo l'histoire des mathématiques, que d'approfondir certaines questions pour familiariser les auditeurs avec les problèmes que soulève cette histoire et pour essayer de former des travailleurs. Je crois en effet qu'un très grand nombre d'études de détail seront encore nécessaires avant que l'on puisse enseigner réellement l'histoire des mathématiques. Je ne consacrerai à ce cours qu'une leçon d'une heure environ par semaine. Après un exposé général et succint des principales périodes dans lesquelles on peut diviser l'histoire des mathématiques, j'aborderai la numération parlée, écrite, pour les nombres entiers, pour les nombres fractionnaires, les opérations de l'arithmétique, les solutions des problèmes du premier et du second degré, les débuts de l'algèbre et de la théorie des nombres, en essayant de traiter, d'après les sources, successivement chaque question depuis son origine jusqu'à nos jours, et sans parler de la géométrie qu'autant qu'il le faudra en raison des rapports intimes qu'a eues avec elle l'arithmétique chez les Grecs. Mon programme est particulièrement cette année de faire successivement l'étude complète du papyrus Rhind, en suivant l'histoire des connaissances déjà acquises dans ce document, sauf pour la géométrie. Si mon cours a quelque succès, je ferai l'année prochaine sur un plan analogue l'histoire de la géométrie, et l'année suivante celle de l'astronomie.“

Il continua son cours d'histoire des mathématiques en 1885, mais il lui fallut ensuite y renoncer, en raison de son changement de demeure.

De 1892 à 1897 Paul Tannery professa au Collège de France des cours sur la philosophie grecque et latine traitant des sujets suivants: les huit livres de la physique d'Aristote; l'interprétation panthéistique de Platon; les travaux les plus récents sur la philosophie anté-socratique; les théories de l'antiquité sur la matière; la philosophie de Socrate; le traité du ciel d'Aristote; la composition des commentaires de Simplicius; l'histoire des doctrines atomistiques; l'étude des fragments des poësies orphiques.

Paul Tannery présidait en 1900 le congrès d'histoire des sciences qui s'est tenu à Paris et en 1904 le congrès d'histoire des sciences tenu à Genève. En 1903 il fut nommé président d'un comité permanent pour l'organisation de congrès internationaux de l'histoire de sciences, et

1) Lettre de Paul Tannery à G. Eneström du 31 janvier 1884.

en 1904 il fut élu président de la société pour l'encouragement des études grecques en France.

Les titres de PAUL TANNERY rapportés ci-dessus font voir que son intelligence était tout à fait exceptionnelle. Il appartenait, dès sa jeunesse, à la petite foule de ceux qui ont le goût de faire autre chose que ce qu'ils sont obligés de faire, et, pendant toute sa vie, il a gardé le désir d'acquérir des connaissances dans les domaines les plus variés; sa mémoire extraordinaire lui permettait de conserver ensuite fidèlement ces connaissances. Quand un tel homme se dédie à l'histoire des sciences, il doit être particulièrement apte à s'en occuper non seulement comme écrivain mais aussi comme professeur. Il y a deux ans, il semblait qu'il dût avoir l'occasion d'utiliser pour l'enseignement de l'histoire des mathématiques les qualités éminentes qu'il possédait. On a déjà sommairement raconté dans ce journal[1]) comment il en fut empêché, mais il est bon de le rappeler ici encore une fois. A cet effet, nous nous permettons de reproduire ci-après quelques passages d'une notice biographique sur PAUL TANNERY par M. P. DUHEM[2]).

„En 1892, un enseignement d'histoire générale des sciences fut ouvert au Collège de France. Le ministre de l'instruction publique — c'était alors M. BOURGEOIS — usant de la prérogative que la loi lui confère en cas de création d'une chaire, choisit le titulaire sans présentation d'aucune sorte. Son choix fut vivement critiqué; il fit, au Sénat, l'objet d'une interpellation. A l'interpellateur, le ministre répondit, qu'il avait nommé celui que la voix unanime du monde savant lui désignait, et il eut gain de cause. Un auditeur non prévenu eût sans doute pensé que M. BOURGEOIS avait voulu désigner PAUL TANNERY; non, ce n'était pas sur lui que le choix du ministre s'était porté, il avait installé dans la chaire du Collège de France le pieux héritier, le religieux conservateur de la pensée d'AUGUSTE COMTE, celui qu'on nommait plaisamment le pape du positivisme, l'excellent PIERRE LAFFITTE! Pendant de longues années, la chaire d'histoire générale des sciences au Collège de France, détournée de son objet, servit à commenter le dogme de l'église positiviste.“

„A la mort de PIERRE LAFFITTE, on put croire un moment que le Collège de France allait enfin donner l'enseignement de l'histoire générale des sciences, dont la nécessité était, chaque jour, plus vivement sentie. En effet, le corps des professeurs du Collège de France, consulté à propos des candidats de la chaire vacante, plaçait PAUL TANNERY en tête de sa

1) G. ENESTRÖM, *Die Geschichte der Mathematik und der Universitätsunterricht;* Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, p. 65—66.

2) P. DUHEM, *PAUL TANNERY 1843—1904;* Revue de philosophie 1905, p 13—15 du tirage à part.

liste de présentation; le 7 décembre 1903, à l'énorme majorité de 40 suffrages sur 47 votants, l'académie des sciences apportait à ce choix la sanction de la plus haute compétence qui se puisse trouver. Un usage qui n'avait jamais subi de dérogation voulait que le pouvoir exécutif sanctionnât cette double présentation et mit la Force dont il dispose au service du décret que la Science avait porté. Il n'en fut rien ... Dominant la rumeur de surprise d'indignation qui accueillit la décision du ministre — c'était alors M. Chaumié —, il semblait que résonnât encore le rire de Figaro, ce rire que rendent amer les larmes refoulées; il semblait que l'on entendît de nouveau, à peine modifiée, retentir l'immortelle boutade: „Il fallait un historien, ce fut un cristallographe qui l'obtint!"

„Une injustice produit parfois des conséquences bien graves et bien éloignées; celui qui a commis l'injustice aura à répondre de ses résultats les plus lointains. Songent-ils, parfois, à ce principe de morale, ceux qui mettent au service des sectes et des partis la puissance dont ils ont reçu le dépôt en vue du bien public?"

Comme homme, Paul Tannery sut se faire apprécier par tous ceux avec lesquels il a eu des relations; sa courtoisie, son aménité et ses qualités de cœur lui procuraient partout des amis. La mort l'a frappée en pleine possession de ses facultés intellectuelles, après une courte maladie.

* * *

Dans une lettre du 10 janvier 1904, après avoir parlé de l'origine de la chaire d'histoire générale des sciences au Collège de France et et après m'avoir expliqué comment lui-même il avait été conduit à étudier cette histoire, Paul Tannery continue ainsi: „A une époque où la tendance est plutôt déclarée pour l'étude isolée de l'histoire de chaque science en particulier, je crois être le seul en Europe qui sois capable de reprendre sérieusement le point de vue général du fondateur du positivisme, et en même temps de montrer qu'à côté des histoires spéciales, une histoire générale garde son intérêt même au point de vue pratique du progrès historique".

Cela n'était point de sa part une vaine prétention, c'était la simple vérité. Peut-être quelqu'un de ceux qui cultivent l'histoire d'une science spéciale, connaissant les difficultés que présentent déjà les études plus restreintes, sera-t-il disposé à mettre en doute la possibilité de cultiver tout en général l'histoire des sciences et à craindre que la généralité ne soit obtenue qu'aux dépens de l'exactitude du détail; mais pour eux la véritable preuve de la possibilité de cette tâche et de son utilité „même au point de vue pratique du progrès historique", c'est: Paul Tannery.

Nous, en particulier, qui nous adonnons à l'histoire des mathématiques, nous avons eu lieu de voir combien ses vues générales, élargies par l'étude de l'origine et du développement simultané des autres sciences et de la philosophie, contribuaient à faire ressortir les différents progrès de notre science spéciale et les formes que revêtaient ces progrès. De son point élevé, il était en état d'apercevoir et d'expliquer des faits importants qui auraient échappé à l'attention des historiens dont les vues n'embrassent qu'un champ plus restreint. En même temps il était des plus rigoureux pour bien examiner l'exactitude des résultats qu'il avait entrevus. A cet effet ses connaissances philologiques lui fournissaient des moyens qui ne sont pas à la disposition de la plupart des autres historiens des sciences exactes.

D'autre part, PAUL TANNERY était assez profond et fin géomètre pour rendre sa pensée indépendante des formes actuelles des mathématiques et pour l'adapter si bien aux formes anciennes qu'il pût juger par sa propre expérience la valeur des moyens et la portée des procédés dont on disposait dans les temps passés. Il savait donc aussi s'émanciper de toute classification *a priori* empruntée aux mathématiques modernes, il savait trouver par exemple dans l'ancienne *géométrie* les fondements d'une *algèbre* immédiatement applicable à des questions numériques.

Cela est conforme au point de départ de ses recherches sur l'histoire générale des sciences et aux idées qui les ont dirigées telles qu'il les a exposées dans „le discours sur AUGUSTE COMTE et l'histoire des sciences" [240][1]), qui aurait dû servir d'introduction à ses propres cours sur l'histoire générale des sciences. Il y parle de la classification des sciences de COMTE, qui procède du plus simple et du plus général au plus complexe et au particulier: Mathématique, Astronomie, Physique, Chimie, Biologie, Sociologie. Tout en reconnaissant la valeur qu'a cette classification *a priori* et pour la science actuelle, TANNERY ne veut nullement l'imposer à l'histoire. Au contraire, la classification devient ici à ses yeux une question historique: pour se rendre compte de l'état de l'esprit scientifique à une époque donnée, il faut classer les matières sous les rubriques dont on les affectait alors et dans l'ordre effectif de leur enseignement. De cette manière une histoire générale des sciences doit mettre en relief le grand rôle qu'y ont joué les médecins pendant les temps passés, et la médecine ne rentre même pas dans la classification de COMTE.

Dans son discours, TANNERY parle avant tout de la „loi des trois états" qui doit selon COMTE présider à l'histoire des sciences: l'état théologique, l'état métaphysique et l'état positif. Tout en montrant la relativité

1) Les n^os en chrochets [ ] renvoient à la liste des travaux de PAUL TANNERY à la fin de cet article. Cette liste est due à M. ENESTRÖM

et la variabilité de ces categories (la loi de gravitation de Newton, le plus éminent exemple de l'état positif, n'est dans les yeux des naturalistes modernes nullement exempt des caractères de l'état métaphysique), Tannery en reconnaît les avantages pour bien évaluer les différents progrès, et il dit qu'il doit à cette formule la reconnaissance de l'avoir incité à approfondir l'histoire des sciences afin de l'éprouver et d'en déterminer la portée et le degré de justesse. Le résultat que Tannery a tiré de cette épreuve a été de regarder maintenant et pour long temps de pareilles tentatives comme des anticipations prématurées; mais le résultat a été en même temps de la part de P. Tannery lui-même un enrichissement extraordinaire de nos connaissances et de notre intelligence du développement de la science dans le temps.

Afin de faire bien paraître la généralité des recherches de Paul Tannery, ainsi que l'avantage d'un point de vue d'où l'on embrasse à la fois le développement de toutes les sciences, nous commencerons notre analyse de ses travaux relatifs à l'histoire des mathématiques en parlant du volume intitulé: *Pour l'histoire de la science Hellène* [89]. Il n'a paru qu'en 1887; mais il y avait alors dix ans que l'auteur avait commencé de le publier dans des articles dans la Revue philosophique; en même temps, il consacrait de plus en plus ses loisirs à des recherches spéciales touchant l'histoire des mathématiques, qu'il publiait successivement dans les Mémoires de la société des sciences de Bordeaux et dans le Bulletin des sciences mathématiques. Une suite particulière de ces publications a été réunie ensuite dans le volume sur la géométrie Grecque [96], publié, lui aussi, en 1887. Paul Tannery s'occupe dans son livre sur la Scieuce Hellène de la première des quatre périodes, à peu prés égales, qu'il distingue dans l'intervalle depuis 600 avant J.-Chr. jusqu'à 600 après J.-Chr., l'époque hellène, la période alexandrine, la période gréco-romaine et l'âge de décadence ou des commentateurs. Les penseurs de l'âge hellène avaient été, de par la tradition, considérés comme philosophes, et leurs opinions avaient été étudiées surtout par les philosophes. Ceux-ci cherchent, tout d'abord, à dégager des renseignements partiels que les auteurs anciens fournissent sur lesdits penseurs l'idée métaphysique la plus importante; mais ils négligent ou citent seulement, à titre de curiosité, les thèses spéciales d'un caractère purement scientifique. L'histoire philosophique devait donc être complétée par l'histoire scientifique, et celle-ci, loin de s'appuyer sur la première, devait être établie directement et par une méthode entièrement opposée. En effet, jusqu'à Platon, les penseurs hellènes ont été, non pas des philosophes dans le sens actuel de ce nom, mais des

physiologues, comme on disait, c'est à dire des savants, malgré toutes ces erreurs et hypothèses inconsistantes par où commence le chemin de l'ignorance à la vérité. Le noyau des systèmes des anciens physiologues n'a jamais été une idée métaphysique; c'est seulement de leurs conceptions concrètes qu'ils ont pu s'élever aux abstractions, encore insolites alors, qui sont devenues depuis le domaine propre de la philosophie.

Ce sont ces conceptions concrètes que PAUL TANNERY cherche à reconstituer en faisant passer en première ligne les opinions spéciales sur les divers points de la physique. En réalisant ce plan pour les fragments laissés sur chacun de ces penseurs antiques, qu'il considère en ordre chronologique, non seulement il a donné un complément à l'histoire des origines de la philosophie, mais il a tiré au jour le véritable commencement de la science générale des Grecs, et par conséquent de la science qui en est sortie. Afin de s'acquitter le mieux possible de cette tâche et de rendre les textes accessibles à ceux qui s'en intéresseront d'un point de vue scientifique, PAUL TANNERY est devenu philologue — et, bien entendu, philologue très respecté par ceux qui le sont originairement par profession.

On comprend bien que ce commencement de l'histoire générale des sciences doit souvent offrir l'occasion de découvrir les germes de ce qui s'est développé plus tard dans les mathématiques grecques, l'occasion de marquer les degrés des conceptions mathématiques qu'implique chacune des hypothèses physiques qui sont passées en revue dans le livre. PAUL TANNERY en a profité dans ses autres recherches sur l'histoire des mathématiques et, dans le volume qui nous occupe, il les signale avec un intérêt particulier.

De telles occasions se sont présentées en particulier pour les différentes hypothèses cosmologiques. Citons par exemple les remarques que fait l'auteur p. 208—209 à propos de la cosmologie d'ALCMÉON et où il croit pouvoir revendiquer pour PYTHAGORE et la distinction entre le mouvement propre des planètes d'occident en orient et leur mouvement diurne d'orient en occident, et la sphéricité de la terre ainsi que la détermination des zones tempérées, connaissances attribuées ordinairement à PARMÉNIDE. Les connaissances géométriques que suppose la dernière théorie, „quoique déjà passablement complexes, ne dépassent point le niveau auquel on doit croire que PYTHAGORE s'était élevé".

Aux questions cosmologiques s'attachent immédiatement celle sur l'infini (ἄπειρον), sur l'étendue infinie du monde et sur la continuité de l'espace ou plutôt, pour commencer, de la matière qui le remplit. L'auteur dirige l'attention sur ce point partout où il en trouve l'occasion. Avant tout, il met en pleine lumière la position prise par ZÉNON d'Élée par

rapport aux questions sur la multiplicité ou la continuité, qui était jusqu'alors jugée très au-dessous de sa valeur réelle, et éclaire ainsi les méprises des pythagoriciens combattues par Zénon et les efforts positifs auxquels ces méprises s'étaient attachées.

Pour les pythagoriciens, le point était l'unité ayant une position. Il s'ensuit immédiatement que le corps géométrique est une pluralité, somme de points, de même que le nombre est une pluralité, somme d'unités. Cette supposition est conforme à la formule pythagoricienne: „Les choses sont nombres“ dont Philolaos donna seulement plus tard une explication plus symbolique. Le sens immédiat était retenu malgré la découverte, faite par les pythagoriciens eux mêmes, des quantités incommensurables, ce scandale logique si contraire à la formule précédente. Ils n'en continuaient pas moins leurs spéculations arithmétiques sur les nombres triangles, polygones, pyramides, etc., spéculations qui reposent en fait sur l'idée qu'il est possible de constituer des figures géométriques avec des arrangements de points en nombres déterminés.

C'est la formule pythagoricienne, prise dans ce sens, que combat Zénon en l'exprimant en termes à très peu près identiques: Les êtres sont une pluralité. Expliqués dans ce sens, ses arguments apparaissent comme nets, pressants, irréfutables, même ceux où l'on ne voit d'ordinaire que de simples paralogismes. Les arguments de Zénon se réduisent ainsi en fait à établir par l'absurde qu'un corps n'est pas une somme de points; que le temps n'est pas une somme d'instants, que le mouvement n'est pas une somme de simples passages de point à point.

Selon cette explication, dont Tannery démontre en détail la justesse, Zénon a préparé du côté négatif la véritable intelligence mathématique de l'infiniment petit, en rejetant ce que, dans les temps modernes, on a appelé le pseudo-infini. Les arguments victorieux de Zénon avaient pour conséquence de bannir de la terminologie mathématique le mot *ἄπειρον*, qui avait été attaché à cette notion vague; mais, en même temps, il a contribué à effacer les rapports qui ont pu avoir lieu entre les faibles commencements pythagoriciens que P. Tannery fait entrevoir et les démonstrations exactes des théorèmes infinitésimaux que nous trouvons dans les livres d'Euclide et d'Archimède.

Je ne sais pas si tous les historiens adopteront les explications de Paul Tannery référées ici; son livre contient en tout cas tous les renseignements qui doivent faire le point de départ d'une étude complète des recherches infinitésimales des Grecs; et, selon nous, on ne saurait mieux, que ne le fait Tannery en parlant de Zénon, expliquer les formes singulières que les Grecs ont données ensuite à ces recherches.

Si TANNERY n'a pas continué, dans ses brochures et ses livres, l'étude particulière des recherches infinitésimales des Grecs, il a successivement illustré et discuté de tous les côtés possibles, historiquement, philologiquement et mathématiquement, tout ce qui existe dans la littérature grecque sur le calcul, l'arithmétique et l'algèbre, et, plus qu'aucun autre, il a contribué à découvrir qu'à côté de la géométrie, les Grecs possédaient en vérité et de bonne heure des connaissances notables de ces sciences.

Qu'il y eût à cet égard besoin d'une découverte, on le voit en considérant que, selon une tradition, encore assez commune hors du cercle des historiens des mathématiques, l'algèbre serait, comme son nom, d'origine arabe et attachée au calcul provenant des Hindous. C'était seulement NESSELMANN qui remarquait que DIOPHANTE savait résoudre les équations numériques du second degré, MORITZ CANTOR qui a découvert que déjà HÉRON était en possession du même savoir. On voyait bien que certaines opérations géométriques d'EUCLIDE équivalent à une solution géométrique des mêmes équations, mais on hésitait encore à lui attribuer la faculté d'appliquer les mêmes procédés à la solution d'équations numériques. NESSELMANN considère encore des pseudomathématiciens, tels que NICOMAQUE ou THÉON de Smyrne, comme des auteurs originaux, ce qui donne une mauvaise idée de l'état de l'arithmétique avant eux. Même après le livre de NESSELMANN, où l'auteur rend soigneusement compte de tout ce qui se présente immédiatement comme arithmétique et algèbre dans les livres grecs qui nous sont conservés, et où en particulier il étudie les méthodes de DIOPHANTE, HANKEL croyait encore nécessaire d'avoir recours à une influence très directe du côté des Hindous pour expliquer l'apparition de l'œuvre de DIOPHANTE, dont les problèmes et les procédés seraient absolument différents de tout ce qui se trouvait avant lui dans les mathématiques grecques. Après les recherches de P. TANNERY, personne ne doute plus que l'arithmétique de DIOPHANTE est grecque comme fond et comme forme.

PAUL TANNERY a cherché l'arithmétique et l'algèbre grecque partout où elle était à trouver et il l'a trouvée. Il a éprouvé minutieusement toutes les traditions pythagoriciennes sur l'usage mystique des nombres et sur la musique; il a cherché l'arithmétique dans les livres géométriques où l'on donnait aux théorèmes pour lesquels on en éprouvait le besoin la seule forme de démonstration qu'on regardât comme exacte; dans les introductions arithmétiques aux systèmes philosophiques, et dans les commentaires des œuvres classiques; dans DIOPHANTE, dont on lui doit une édition magistrale, et dans tous les débris de la logistique grecque, qui ne nous est pas conservée comme un entier, parce qu'on la regardait comme inférieure à la science géométrique, débris épars conservés dans l'ancienne

littérature ou propagés plus tard aux Byzantins. Tout en particulier il a éprouvé tous les véritables calculs qui nous sont conservés avant tout par Héron ou sous le nom de Héron. Il a jugé des procédés de calcul d'après la forme des résultats et les approximations obtenues; il a éprouvé ensuite les mêmes procédés à de nouveaux exemples, et il s'est rendu un compte exact de la portée de tous les procédés retrouvés.

Malheureusement Tannery n'a jamais consigné dans un seul travail l'ensemble des résultats aussi importants qu'étendus de ces différentes recherches. Nous essaierons d'en donner une idée en parlant ici des plus notables des mémoires où il s'occupe directement de ces questions, mais en remarquant en même temps que, pour trouver tous ses résultats et leurs démonstrations, il faut consulter aussi ses mémoires philologiques et philosophiques et bon nombre de courtes notices éparses ou insérées à ses intéressantes analyses de livres d'autres auteurs.

Commençons par le mémoire sur l'arithmétique pythagoricienne [59] qu'il a inséré ensuite avec quelques modifications à la fin du livre dont nous venons de parler. Antérieurement, il avait publié à part une partie des études dont ledit mémoire est le fruit mûr: sa démonstration de la place qu'il faut donner à Thymaridas au nombre des pythagoriciens [18] et son fragment de Speusippe, élève de Platon [41]. L'importance de la première démonstration historique résulte de ce qu'on doit à Thymaridas un intéressant problème dépendant d'un système d'équations indéterminées du premier degré qu'il résout assez élegamment d'une manière analogue à celle que Diophante applique à des problèmes semblables. Quant au fragment de Speusippe, il contient une énumération des propriétés mystiques ou symboliques des dix premiers nombres qui ont occupé plus tard les néopythagoriciens. Par elle même, elle est peu intéressante au point de vue mathématique; mais les notations dont elle fait usage et les notions arithmétiques qu'elle suppose permettent d'attribuer aux pythagoriciens toutes les connaissances arithmétiques que plus tard notamment Nicomaque a communiquées à l'usage de la jeunesse philosophique, en particulier celle des nombres figurés. Néanmoins, après avoir fait la critique de tous les renvois de Nicomaque, de Théon de Smyrne et de Jamblique à l'arithmétique pythagoricienne, Tannery juge moins favorablement qu'on ne le fait d'habitude le rôle des pythagoriciens dans l'histoire des sciences et pour l'organisation scientifique. Il excepte seulement la théorie de la musique qui restera l'immortel honneur de l'école. Du reste il leur reproche d'avoir exclu de la science la partie de l'arithmétique qui n'a pu entrer dans le système géométrique et qu'Euclide nous a conservée, bien entendu dans une état plus développé. Pour cette raison, après l'âge hellène, les développements que reçut l'arithmétique sont insignifiants ou ne devinrent

pas classiques et se perdirent par suite — comme les travaux arithmétiques d'ARCHIMÈDE. Les seuls progrès qui se réalisassent se rapportent aux équations indéterminées du second degré à la DIOPHANTE; mais bien qu'elles eussent pour point de départ la construction du triangle rectangle en nombres, elles ne comptaient que pour la logistique.

TANNERY fait encore observer que tout le développement de l'arithmétique de l'âge hellène avait eu lieu avant l'invention du système alphabétique de numération, dont l'origine est alexandrine. A cet égard il se range à l'avis de M. GOW [71]. Aussi les procédés de calcul des Grecs ont-ils été plus anciens que ce système, ce qui explique que malgré lui on ne cessait pas de faire attention aux nombres des différentes unités décimales, ce que TANNERY a montré, non seulement pour APOLLONIUS ([13], voir dans ce qui suit) mais même pour les écoliers qui apprenaient des procédés semblables à la preuve par neuf [30].

Avant de quitter les pythagoriciens nous dirons quelques mots d'un des derniers mémoires de TANNERY [202], parce qu'il se rapporte à leur théorie de la musique et à son influence sur la mathématique pure. Il y explique la terminologie euclidienne de la théorie des proportions, où la composition des rapports, le rapport doublé ou triplé désignent respectivement une multiplication, le carré ou le cube du rapport, par l'application des rapports aux intervalles de la musique. En effet, l'addition des intervalles correspond — comme pour les logarithmes — à la multiplication des rapports. Il signale encore l'analogie qui a lieu entre la manière dont ARCHYTAS intercale deux tons entre deux tons donnés et le procédé général que les Grecs possédaient pour l'extraction des racines carrés. Ce procédé, TANNERY l'avait alors depuis longtemps déduit, dans ses traits généraux, d'exemples numériques conservés — ce que nous allons voir —; il en avait trouvé la confirmation dans un extrait des Métriques de HÉRON [133], confirmation que compléta plus tard l'édition de cette œuvre: il sert à déduire d'une approximation $a$ de $\sqrt{A}$ une suite d'approximations ultérieures. $\frac{A}{a}$ sera une approximation du même degré, mais dans l'autre sens. Les moyens arithmétiques $a_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right)$ et harmonique $\frac{A}{a_1}$ en seront de nouvelles du second degré, qui conduiront de la même manière à des approximations du 3ᵉ degré, etc. TANNERY voit dans l'application du même procédé à la division des intervalles musicaux l'origine du nom „moyen harmonique".

Remarquons encore ici que, si $A = a^2 + r$, on aura

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right) = a + \frac{r}{2a},$$

ce qui est la forme sous laquelle Tannery avait précédemment exprimé la même approximation, et dont nous parlerons dans ce qui suit.

En écrivant son mémoire sur l'arithmétique pythagoricienne, Tannery avait déjà fait de profondes études du développement postérieur de l'arithmétique, lié intimement à la logistique. En 1880 il a su [13] tirer d'importants renseignements des notices arithmétiques de Pappus, moins complètes et beaucaup moins complétement conservées que ses notices sur la géométrie grecque:

1⁰ Une partie des lemmes de Pappus, réstitués par P. Tannery, ont égard à la multiplication de multiples de myriades etc. et se sont attachés au problème suivant que se pose Apollonius comme exemple de son extension du système numérique: trouver le produit obtenu en multipliant ensemble toutes les lettres d'un vers grec, prises pour leur valeur numérique.

2⁰ Pappus fait connaître une solution approximative par la règle et le compas du problème des deux moyennes proportionnales. Paul Tannery, qui entrevoyait déjà à cette époque que de telles opérations géométriques devaient exprimer de véritables procédés de calcul numérique, examine la valeur de l'approximation numérique qu'on obtient par le procédé préscrit. Elle n'est pas du reste très grande.

3⁰ P. Tannery rattache encore aux notices de Pappus une discussion complète de toutes les *médiétés* mentionnées par les anciens. Elles sont formées de l'ensemble de trois nombres tels que deux de leurs différences soient dans le même rapport que deux de ces nombres. Les plus simples, qui forment encore les liens de trois termes consécutifs de nos progressions, l'arithmétique, la géométrique et l'harmonique, ainsi que leurs „sous-contraires" remontent aux pythagoriciens, quatre autres sont probablement plus anciennes que l'ère chrétienne.

Pappus nous fait connaître non seulement la détermination du terme moyen de toutes ces diverses médiétés, mais aussi des procédés qui servent à exprimer tous les termes rationnellement au moyen de deux paramètres. Comme le remarque Tannery, les premières déterminations sont des solutions d'équations générales du second degré posées différemment sous formes de proportions; il ajoute cette observation que les exemples numériques conservés font voir que les anciens ne se contentaient pas toujours d'une seule solution de ces équations. Les solutions conservées des derniers problèmes sont même des solutions assez élégantes d'équations indéterminées du second degré. La méthode appliquée consiste à transformer, „permutando, dividendo, convertendo", etc. la proportion qui définit la médiété en une médiété géométrique, dont ensuite les trois

termes $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ peuvent être arbitrairement formés en nombres entiers par la composition connue

$$\alpha = kp^2,\ \beta = kpq,\ \gamma = kq^2.$$

Les communications de PAPPUS, ainsi que celles de NICOMAQUE sur la même matière, renvoient à la meilleure époque de la mathématique grecque. TANNERY a donc revendiqué pour celle-ci des applications de transformations de proportions qui équivalent aux opérations algébriques dont nous ferions usage pour les mêmes problèmes — en effet la réduction à une médiété géométrique correspond à la réduction algébrique à une équation quadratique pure —; et il a montré, en dehors de DIOPHANTE, des solutions d'équations indéterminées du second degré.

Un tel problème indéterminé est aussi celui qu'on a appelé le problème des boeufs d'ARCHIMÈDE, dont TANNERY s'est occupé en 1881 [20], mais auquel nous reviendrons avec lui en parlant de son mémoire sur la mesure du cercle d'ARCHIMÈDE [24]. Il en a tiré deux autres des collections attribuées à HÉRON [23], savoir ceux qui, respectivement pour $a = b$ et pour $a = 1$, seraient exprimés au moyen de nos symboles algébriques par les deux équations

$$a\ (x + y) = u + v \qquad xy = b\,uv.$$

La solution est donnée sous forme synthétique, et en nombres entiers, mais cette dernière circonstance n'est que fortuite.

Le mémoire dont nous avons cité ici un résultat particulier appartient à une suite d'études Héroniennes qui parurent sous des titres différents en 1882—1884 ([23], [29], [39], [40], [56]). A leur égard, il faut premièrement se rappeler qu'elles datent d'une époque où TANNERY se tenait encore à l'hypothèse qui fait vivre HÉRON environ un siècle avant Jésus-Christ. Plus tard (1893) dans son analyse du „Codex Leidensis" publié par MM. BESTHORN et HEIBERG [130] il fut des premiers à se joindre à l'opinion de DIELS, qui place cet auteur grec un ou plusieurs siècles après Jésus Christ, et à la fortifier par de nouveaux arguments. Pour cette raison, il devait abandonner les arguments qu'il avait avancés dans [96] contre l'attribution à HÉRON des définitions qui portent son nom. Une autre circonstance, à savoir la découverte du véritable texte des Métriques de HÉRON, a rendu superflue une grande partie des études par lesquelles il essaie de restituer la partie Héronienne des écrits qui lui sont attribués et de retrouver, grâce aux exemples numériques conservés, les véritables formes des théorèmes qu'on ne trouvait que sous des formes immédiatement impossibles, études qui sont exécutées avec un soin très pénible et avec une extrême finesse mathématique. Cependant la découverte en question a contribué beaucoup à confirmer les vues générales de TANNERY, notamment

en prouvant que, malgré le défaut complet d'exemples numériques, les théorèmes géométriques et généraux d'Euclide et d'Archimède étaient destinés à être appliqués à de véritables calculs numériques. Paul Tannery a aussi [221] signalé cette découverte comme le plus important document pour l'histoire de la Mathématique grecque qui ait été publié depuis plus de deux siècles. Pour conserver, surtout des études qui se rapportent à la géométrie et à la stéréométrie Héronienne, ce qui garde sa valeur indépendamment de la découverte en question, notamment ce qui explique les différentes additions qu'on a faites plus tard à Heron, il serait souhaitable que quelqu'un se chargeât d'une révision des recherches de Tannery, en en séparant ce qui a trouvé ainsi sa décision finale et, de l'autre côté, en se servant de l'édition des véritables Métriques de Héron pour profiter le mieux possible du reste.

Quant aux recherches de Tannery sur l'arithmétique et le calcul dans les ouvrages attribués à Héron, elles gardent presque toute leur valeur. Peu importe si tel calcul appartient à Héron ou à quelqu'un qui a voulu vulgariser un résultat en lui donnant la forme traditionnelle de la logistique enseignée oralement; c'est celle-ci qu'il s'agit de connaître, et elle était aussi à la disposition des grands géomètres.

Il s'agit avant tout des procédés dont on se servait pour l'extraction des racines carrées. Les résultats auxquels Tannery s'est tenu, après diverses discussions avec d'autres savants, se trouvent dans le mémoire [56]. Il y commence par parler de la manière égyptienne d'exprimer les fractions au moyen de quantièmes (fractions au numérateur 1), illustrée par M. M. Cantor et Hultsch. Cette manière s'est conservée dans la logistique grecque même après l'introduction de fractions ordinaires dans les livres mathématiques, toutefois avec quelques modifications, rendues possibles par la multiplicité des manières dont se peut réaliser ladite représentation des fractions. Les Grecs en font usage aussi pour une représentation approximative.

Tannery fait ressortir ensuite la différence qui existe entre sa propre explication des racines carrées Héroniennes exprimées par des quantièmes et celle de Radicke, que M. Günther a illustrée ultérieurement. Selon tous les deux — et conformément à la methode générale dont nous avons déjà parlé (p. 267) — on a déduit de l'approximation $a$ à la racine carrée $\sqrt{A}$, que nous exprimerons avec lui par $\sqrt{A} \sim a$, une approximation ultérieure, en posant

$$A = a^2 + r,$$

où notre $r$ est positif ou négatif suivant que l'approximation $a$ est par défaut ou par excès, et ensuite

$$\sqrt{A} \sim a + \frac{r}{2a}.$$

La divergence des deux interprètes ne se rapporte qu'à la formation du quantième à substituer à $\frac{r}{2a}$. Si $a = \frac{x}{y}$, $r$ aura la forme $\frac{R}{y^2}$ et $\frac{r}{2a} = \frac{R}{2xy}$. Alors TANNERY prend pour dénominateur du quantième $\frac{1}{d}$ un nombre $d \sim \frac{2xy}{R}$, tandis que RADICKE lui donne a priori le facteur $y$ de manière que $d = y \cdot z$ où $z \sim \frac{2x}{R}$.

Les exemples numériques donnés ne permettent pas de décider avec sureté entre ces deux procédés, qui peuvent avoir été appliqués tous les deux. D'autres modifications peuvent être provenues de ce que $\frac{r}{2a}$ peut avoir été remplacé immédiatement par plusieurs quantièmes, ou du choix entre approximations par défaut et par excès. A ce dernier égard TANNERY adopte une modification proposée par M. HUNRATH.

Quoiqu'il en soit de ces modifications d'une méthode qui n'a probablement jamais été donnée sous forme de règles absolument fixes, on a expliqué complètement la possibilité de trouver ces racines carrées et de les trouver dans les formes conservées.

TANNERY a aussi essayé [24] d'appliquer les mêmes procédés aux valeurs approchées des racines carrées d'ARCHIMÈDE, dont l'explication devient plus difficile par la circonstance qu'ARCHIMÈDE possédait personnellement la faculté de modifier les méthodes de manière à obtenir précisément l'exactitude dont il y avait besoin.[1]) Ce qui intéresse tout particulièrement dans ce mémoire de TANNERY, c'est une étude qu'il y ajoute des relations mathématiques qui ont lieu entre cette équation que, par un tissu de méprises, on a appelée l'équation de PELL, et l'extraction de racines carrées telle qu'elle se forme tout naturellement, lorsqu'on ne l'attache, ni comme nous, au système décimal ni, comme les astronomes grecs, au système sexagésimal. Ainsi que le remarque l'auteur, ces formes out pu se présenter assez immédiatement soit aux Hindous soit aux Grecs pour que leur ressemblance ne témoigne d'aucune dépendance.

Pour bien comprendre le but de cette étude mathématique, dont nous allons parler, il faut se rappeler que TANNERY n'attribue nullement ni aux Hindous ni aux Grecs une théorie spéciale indispensable pour une solution complète du problème de PELL. En distinguant bien cette théorie d'une pratique des calculs, il veut seulement exposer une voie probable d'invention de méthodes de calcul. D'ailleurs il suit jusqu'au bout les idées où il est entré „sans s'inquiéter, sans plus de discuter si

1) Néanmoins M. HULTSCH a su indiquer des règles conduisant immédiatement aux différentes approximations d'ARCHIMÈDE.

les Grecs ont réellement franchi tel ou tel degré. Ce qui ne sera pas valable pour ARCHIMÈDE peut l'être pour les Hindous, peut l'être pour FERMAT ou pour quelque autre inventeur".

Malgré ses restrictions modestes sur la portée historique de son étude, celle-ci résout deux grandes énigmes historiques. Elle explique comment les Hindous, qui étaient habiles calculateurs, mais médiocres théoriciens, ont pu entrer en possession pratique de la solution de l'équation de PELL, et — à côté des autres recherches de TANNERY — elle explique l'origine grecque des problèmes de DIOPHANTE.

Reportons-nous d'abord à l'approximation déjà mentionnée

$$\sqrt{A} \sim \frac{x}{y} + \frac{R}{2xy} = \frac{x_1}{y_1}$$

déduite de l'approximation $\sqrt{A} \sim \frac{x}{y}$, et où $Ay^2 - x^2 = R$.

Cette approximation est particulièrement bonne dans le cas où $R = \pm 1$, ou $\pm 2$. Non seulement la fraction à ajouter sera alors un quantième, ce qui était un avantage aux yeux des Grecs; mais, ce qui est plus essentiel, c'est qu'en substituant la valeur approchée $\frac{x_1}{y_1}$ à $\frac{x}{y}$, on aura $R_1 = -1$, fait qu'il est facile de démontrer algébriquement, mais qui se présente immédiatement au calculateur dans chaque cas particulier. On aura ainsi pour exprimer $\sqrt{A}$ une suite illimitée de quantièmes (même sans chercher cette forme, et une série de solutions croissantes de l'équation de PELL $x^2 = Ay^2 + 1$. Or la première extraction de $\sqrt{2}$ que nous connaissions, celle que nous trouvons dans les *Sulbasutras* des Hindous

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{3.4.34}$$

en a offert l'exemple, si seulement on a commencé par $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$.[1] La simplicité de ce calcul, qu'on peut continuer indéfiniment, devait provoquer des efforts pour calculer aussi simplement d'autres racines carrées, efforts identiques à ceux de trouver des solutions entières de l'équation de PELL, et TANNERY a montré comment ces efforts ont pu conduire, par des voies simples et par des expériences que les calculateurs out pu faire successivement, sans aucune théorie arithmétique, à toutes les règles que nous connaissons de BHASCARA.

Quant aux Grecs, TANNERY renvoie avant tout à l'extraction de $\sqrt{2}$ que nous a conservée THÉON de Smyrne, mais dont il avait lui-même démontré l'usage aux temps de PLATON, et dont ou trouve du reste la dé-

1) M. RODET avait déjà expliqué de la même manière cette expression de $\sqrt{2}$.

monstration géométrique dans EUCLIDE, livre II. Elle consiste, en effet, dans une déduction successive, différente de celles des Hindous, de nombres entiers de plus en plus grands satisfaisant aux équations

$$p^2 - 2q^2 = \pm 1.$$

De même les approximations $\frac{p}{q}$ d'ARCHIMÈDE à $\sqrt{3}$ sont des solutions des équations

$$p^2 - 3q^2 = 1$$
$$p^2 - 3q^2 = -2,$$

et il est facile de former successivement, d'une manière semblable, des solutions de plus en plus grandes de ces équations. TANNERY cite encore le problème qu'on a appelé le problème des boeufs d'ARCHIMÈDE, dont il s'était occupé déjà dans [20]. On sait que ce problème conduit précisément à une équation de PELL, qui devient matériellement impraticable à cause de la grandeur énorme du nombre constant et des nombres cherchés. Selon la coutume d'ARCHIMÈDE, connue par sa préface aux spirales, cette dernière circonstance ne l'aurait pas empêché de le proposer aux savants d'Alexandrie.

Enfin PAUL TANNERY voit dans une partie des problèmes indéterminés de DIOPHANTE des traces d'étapes intermédiaires d'efforts ayant la direction que nous avons signalée. A cet égard, il rappelle particulièrement le lemme 16 du 6e livre contenant un procédé servant à déduire d'une solution $(p, q)$ de l'équation $p^2 - aq^2 = 1$ une nouvelle solution. Cela se fait en posant $p_1 = mx - p$, $q_1 = x + q$, où $m$ est un nombre au choix, $x$ un nombre qu'il faut déterminer ensuite. TANNERY remarque que le choix de $m$ permettra de trouver des valeurs entières de $p_1$ et $q_1$; mais cela ne semble pas avoir été essentiel pour DIOPHANTE. Aussi des valeurs fractionnaires seraient utiles pour l'extraction de $\sqrt{a}$.

Précisément dans leur qualité de traditionnels, les procédés de calcul des Grecs devaient se conserver chez les Byzantins. TANNERY a donc recherché avec sa sagacité ordinaire les traces qui en sont restées, et avec sa fine critique il a su en discerner tout ce qui pouvait avoir une autre origine. Notamment il a profité de deux lettres de NICOLAS RHABDAS sur lesquelles il a écrit en 1884 [53] et qu'il a éditées en 1886 [85]. L'introduction de cette édition contient un résumé de tout ce qu'on sait de la logistique grecque et de ses rapports avec l'arithmétique et la géométrie jusqu'au moment où, dans l'arithmétique de DIOPHANTE, une partie de cette logistique allait être absorbée par l'arithmétique. Elle est ultérieurement illustrée par les lettres de RHABDAS. On y apprend comme provenant de traditions grecques:

1° La figuration grecque des nombres snr les doigts.
2° Une notation spéciale des myriades, qui n'est pas pourtant bien ancienne.
3° Une espèce de tables pour faciliter les opérations d'addition et et de multiplication, ainsi que les opérations inverses. Attribuées au „très sage Palamède", c'est à dire probablement à l'antique tradition, ces tables semblent être très anciennes.
4° Un calcul approché d'une racine carrée incommensurable, le seul de la tradition grecque qui soit exprimé en fractions ordinaires.
5° Calcul aux fractions exprimées avec des suites de quantièmes; on y procède, conformément à l'ancienne tradition grecque, en réduisant au dénominateur commun.
6° Règle de trois.
7° 18 problèmes en forme d'historiettes.

Après la commémoration de ces études de l'arithmétique grecque, s'appuyant en grande partie snr les communications relatives à leur logistiqne, nous passons à un travail, publié déjà en 1882, qui a contribué essentiellement à faire comprendre l'algèbre grecque,[1]) en rendant compte de la solution géométrique des problèmes du second degré avant Euclide [25].

Dans la première partie de ce mémoire, Tannery s'occupe du détail de la solution. Les problèmes, tels qu'on les trouve dans les Eléments d'Euclide, livres I et II et plus étendus dans le VI[e] livre, ont plutôt pour objet la détermination de deux grandeurs par leur produit (rectangle) et leur somme ou différence. Cette forme se présente directement dans les „Données", où Euclide s'occupe encore d'autres problèmes tels que celui que nous exprimerions par les deux équations

$$xy = A,$$
$$x^2 = my^2 + B.$$

Tannery se sert de ce dernier exemple pour montrer les difficultés qn'on avait à surmonter parce que les inconnues devaient être des segments de droites. Il discute encore le X[e] livre des Eléments, qui „n'est rien moins que le détail complet de la solution géométrique de l'équation bicarrée et le commencement de celle de l'équation tricarrée, avec l'invention d'une nomenclature destinée à suppléer au défaut de notations".

La 2[e] section du mémoire contient des recherches historiques. Dans les démonstrations des 4 premiers livres des Eléments, qui sont probable-

1) L'auteur de ces lignes cite ce mémoire avec une gratitude toute particulière: il contient le point de départ d'une grande partie de mes explications des méthodes dont Apollonius fait usage dans son traité des coniques. (Voir les citations de la 1[re] section de: *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum.*)

ments plus anciennes qu'EUDOXE, on devait, à cause de la découverte de quantités incommensurables, éviter tout usage de proportions. Ces démonstrations, formées après coup, ne nous permettent donc en aucune façon de connaître la méthode d'invention ni du théorème de PYTHAGORE ni des propositions du livre II des Eléments.

C'est des expressions techniques qu'on trouve dans PLATON, ARISTOTE, et des communications d'EUDÈME conservées par PROCLUS que TANNERY tire les preuves qui permettent en réalité d'attribuer à l'école pythagoricienne la solution des problèmes dont il s'agit. Il renvoie encore à une construction d'HIPPOCRATE de Chio identique à la solution géométrique de l'équation $3x^2 + 3ax = 2a^2$.

Quant à la solution arithmétique, dont TANNERY s'occupe dans la dernière section, il résulte déjà des deux premières sections que les solutions géométriques devaient en même temps servir d'expressions de solutions numériques. On le voit d'après le 10e livre d'EUCLIDE et l'usage conservé jusqu'à PROCLUS et DIOPHANTE de l'expression „faire la parabole par" dans le sens de „diviser par" un nombre. TANNERY avait du reste dans [13], dont nous avons déjà parlé, trouvé de véritables solutions arithmétiques des mêmes problèmes représentés par des médiétés, et ces problèmes doivent remonter à l'âge hellène.

Des énoncés formels d'équations numériques du second degré ne se trouvent que dans l'arithmétique de DIOPHANTE. Pour les solutions il renvoie à ses „porismes". TANNERY pense que ce mot a ici le sens de corollaires, et qu'il s'est agi de corollaires aux problèmes 30 et 33: trouver deux nombres dont on connaît la somme ou la différence et le produit. Le mode d'exposition peut être „transmis, sans grand changement, par les traités de logistique perdus depuis l'époque des pythagoriciens".

Les différentes études sur l'ensemble de la logistique, l'arithmétique et l'algèbre des Grecs, mentionnées ici, ont déjà permis à l'éditeur futur de DIOPHANTE de ne regarder cet auteur ni comme un élève des Hindous ni comme un génie créateur, mais — de même que PAPPUS pour la géométrie — comme un compilateur studieux de problèmes arithmétiques et de leurs solutions existant depuis longtemps dans la logistique. A ces études plus générales, TANNERY joignait depuis longtemps des études se rapportant particulièrement audit auteur. Nous allons voir qu'elles ont conduit au même resultat.

En 1879 il conclut des prix de vin dans le seul problème énoncé en nombres concrets par DIOPHANTE que cet arithméticien grec vivait environ 250 après J.-Chr. [11]. Plus tard il a pu constater cette date par un extrait de PSELLUS [122].

En 1884 TANNERY s'occupe de la perte de sept livres de DIOPHANTE

[52] et parvient à des résultats très différents de ceux auxquels Nesselmann s'est tenu. La divergence concerne premièrement la place des lacunes quant à laquelle Tannery s'appuie sur une étude approfondie des manuscrits. Avant tout elle se rapporte à l'importance de cette perte. Il a semblé à Nesselmann que, dans la partie conservée de l'œuvre en question, l'auteur est arrivé aussi loin que le permettaient les moyens à sa disposition, et pour cette raison il ne fait pas grand cas de la perte; mais cet argument ne vaut plus du moment qu'on regarde Diophante comme un compilateur. Qu'il le soit, voilà ce que décèle, selon P. Tannery, son œuvre elle-même par son inégalité. Des problèmes puerils y sont conservés à côté de ceux qui nous intéressent encore au plus haut degré. Dans ces circonstances, il est très bien possible que ceux qui ont résolu les problèmes des livres perdus aient franchi les bornes dont témoignent les solutions de certains problèmes conservés. Et précisément les études générales qu'avait faites Tannery de l'arithmétique grecque lui permettent de signaler des domaines où les travaux des Grecs ont laissé assez de traces pour faire supposer des recherches plus étendues, que Diophante aurait pu compiler dans les livres perdus. Il renvoie au problème des bœufs et à des travaux arabes ou hindous s'attachant à des recherches commencées par les Grecs.

La diversité des problèmes de Diophante à laquelle on vient de faire allusion ressort de la classification complète que Tannery en a faite dans [91]. Une équation du 3ème degré qui se trouve au nombre des problèmes déterminés et dont Diophante connaît la seule racine réelle — qui est bien entendu un nombre entier — lui donne lieu d'essayer une explicatiou du fait que les Grecs se sont arrêtés devant la résolution algébrique de ces équations. Avant tout, il s'occupe des problèmes indéterminés, et il fait un commentaire complet de la partie de l'œuvre de Diophante qui traite de ces importantes questions.

Il en fixe le but général que voici: Etant donné une ou plusieurs équations de degré supérieur au premier, exprimer les inconnues en fractions rationelles d'inconnues auxiliaires (voir p. 268 en bas). En introduisant ces inconnues on posséda des procédés d'élimination entre équations de degré supérieur. Ce but essentiel, qui n'était sans doute pas recherché avec une pleine conscieuce, fut donc facilement perdu de vue, et souvent on devait se contenter de solutions partielles. La singularité de certaines de ces solutions et la difficulté des questions, loin d'arrêter les chercheurs, ne fit qu'exciter leur ardeur et multiplier les tentatives, et c'est ainsi que dut se constituer l'ensemble des solutions recueillies par Diophante.

Tannery y rattache une division des problèmes indéterminés de Diophante en deux genres. A l'analyse algébrique appartiennent ceux où le but posé se réalise d'une manière générale, et à l'analyse numérique

ceux où, pour y parvenir, on doit faire usage des propriétés des nombres. Tandis que les solutions de ces derniers problèmes — qui ont été suggestifs plus tard pour FERMAT — peuvent dépendre d'observations plus ou moins fortuites, TANNERY donne ensuite un aperçu général des procédés de l'analyse algébrique et l'illustre par les différentes solutions de DIOPHANTE.

L'édition de DIOPHANTE [127], [143] parut en 1893—95. Nous avons vu déjà la grande étendue de la préparation historique et mathématique de cette édition, et il est bien connu qu'elle a satisfait également aux philologues. Rappelons encore à son égard le grand soin avec lequel TANNERY a su fixer les véritables formes des symboles algébriques de DIOPHANTE et citons en particulier sa fixation du symbole des fractions, dont il rend compte dans la préface.

En faisant usage, dans la traduction en latin, de symboles modernes, il sait rendre l'œuvre de DIOPHANTE facilement accessible aux mathématiciens sans leur céler rien de ce qui est essentiel dans la forme de l'ancien auteur. Même sans savoir lire le grec ils pourront du reste trouver, tout à côté de la traduction, dans le texte original les formes authentiques des symboles. Le „conspectus" à la fin du second volume leur donnera un aperçu complet et facile sur tous les problèmes de DIOPHANTE.

---

Tandis que, pour l'arithmétique, nous avons dû montrer comment l'ensemble de toutes les recherches de détail donne en réalité une image complète de tout ce que — grâce en très grande partie à ces recherches — on sait à présent sur cette matière, TANNERY a réuni lui-même en volumes une partie de ses recherches sur la géométrie des Grecs et les resultats de ses recherches sur leur astronomie. Pour la géométrie, nous devons toutefois rendre compte à part de brochures qui n'y ont pas trouvé place.

Dès 1878 [7] TANNERY avait commencé de s'occuper du plus ancien document qui nous soit conservé de la géométrie grecque, à savoir du fragment où EUDÈME nous rend compte de la quadrature des lunules par HIPPOCRATE de Chio. Il en fait une analyse sur le texte publié par BRETSCHNEIDER dans l'ouvrage *Die Geometrie und die Geometer vor EUKLEIDES*, et soutient, avec les autres auteurs mathématiciens qui s'en sont occupés, l'impossibilité d'attribuer à l'auteur d'un tel travail géométrique le paralogisme que lui attribue ARISTOTE, et à cause duquel les commentateurs d'ARISTOTE nous ont conservé le fragment; mais il conteste d'autres résultats énoncés par BRETSCHNEIDER et adoptés ensuite par HANKEL. BRETSCHNEIDER avait en effet cru, dans certains endroits, reconnaître le texte même d'HIPPOCRATE, alors que celui d'EUDÈME n'était aucunement assuré et réclamait avant tout une critique approfondie. Il s'agissait de

restituer le texte même d'Eudème; mais préalablement l'imperfection du texte grec imprimé ne laissait aucun espoir d'arriver, dans le détail, à un résultat satisfaisant. D'un tel résultat s'est on rapproché néanmoins plus tard grâce aux efforts unis des mathématiciens Allman et P. Tannery, tous deux versés aussi dans les principes de la critique philologique, et des philologues Diels et Usener: après de profondes discussions, ces savants ont fini par un accord qui s'étend du moins aux traits les plus essentiels du fragment d'Eudème et qui nous fait connaître ainsi indirectement le morceau de géométrie dû à Hippocrate.

En 1882 [26] Tannery énonce les conclusions suivantes sur la tradition du fragment d'Eudème: il nous est parvenu successivement par l'intermédiaire de Porphyre ou de Geminus, ensuite par un Sporos de Nicée et enfin par le texte de Simplicius. Après avoir rendu compte des principes qu'il faut suivre pour en séparer les additions des différents compilateurs, Tannery nous donne 1883 [37] ce qu'il faut selon lui regarder comme le veritable texte d'Eudème, et il y ajoute une traduction en français. Enfin il rend compte des différentes connaissances géométriques dont témoignent les constructions d'Hippocrate et des conclusions qu'on en peut tirer sur l'état de la géométrie à son époque. Il va du reste sans dire que, malgré les importants résultats positifs pour lesquels il existe déjà un plein accord, des questions de cette nature ne sont pas finalement tranchées par les restitutions de Diels et de Tannery et la traduction du dernier auteur. M. Heiberg y a apporté quelques critiques, et M. Rudio a essayé une nouvelle restitution allemande. Celle-ci donna lieu à une polémique avec Tannery [204].

Nous avons déjà dit que Tannery renvoie au fragment d'Eudème dans son mémoire [25] sur la solution géométrique des équations du second degré, travail qui appartient à la fois à la géométrie et à l'algèbre. On peut dire la même chose sur les solutions du problème de Délos, qui est la manière grecque de traiter un certain problème du 3e degré. Tannery s'en est déjà occupé en 1878 [8]. Il y fait, sur les *καμπύλαι γραμμαί*, dont Eudoxe s'est servi pour résoudre le problème en question, une hypothèse, qui est assez hardie parce qu'on ne possède que de minces données historiques sur son objet, mais qui correspond très bien à celles-ci. Il suppose qu' Eudoxe, connaissant la solution du problème de Délos due à son maître Archyte, a essayé de faire usage de la projection d'une des courbes gauches dont se sert ce savant, et il s'arrête à une qui serait bien apte à son but. Dans un système de coordonnées mixte cette courbe est représentée par l'équation $\frac{r}{a} = \frac{x^2}{b^2}$. Tannery montre soigneusement que la propriété de cette courbe ressort immédiatement de la construction

d'ARCHYTE et que sa construction planimétrique et l'application de son intersection avec le cercle $y^2 = a x - x^2$ à la solution du problème en question peut se faire sous des formes bien connues d'EUDOXE.

Dans [35] TANNERY discute (1883) des critiques anciennes, conservées par PAPPUS, de quelques démonstrations particulières d'ARCHIMÈDE et d'APOLLONIUS, qui auraient fait usage de constructions solides (au moyen de coniques) en des cas où des constructions planes (par la droite et le cercle) auraient suffi. Tout en reconnaissant la légitimité des raisonnements des deux grands géomètres, TANNERY montre comment ARCHIMÈDE aurait pu se contenter au même effet d'une construction plane.[1])

Presque en même temps TANNERY a [44] rendu compte d'une manière très complète des nombreuses courbes et surfaces d'ordre supérieur qui sont mentionnées dans les écrits conservés de l'antiquité. Il y attache des discussions soigneuses et critiques des traditions qui en ont conservé la mémoire, des renseignements sur les personnes auxquelles ces courbes et surfaces sont attribuées et des explications de leur nature et de leurs propriétés. Et là où les informations positives font défaut, il ne redoute pas, aussi peu qu' ailleurs, de les suppléer par des hypothèses, toujours avouées bien entendu. Ces hypothèses, qui s'appuient sur une connaissance unique de la mathématique ancienne, contribuent toujours à en faire part aux lecteurs. Elles ne seront donc pas perdues même dans les cas où on les regarderait comme trop hardies à cause des minces renseignements que nous possédons sur leur objet immédiat. Le mémoire dont nous parlons ici en offre un bon exemple. Pour soutenir qu'une courbe que selon PAPPUS on a appelé la ligne paradoxos de MENELAOS puisse avoir été la courbe sphérique de VIVIANI, il fait observer que celle-ci peut être regardée comme un cas particulier des spirales sphériques dont PAPPUS vient de faire connaître la quadrature avant le passage en question. Cette fine observation géométrique sert bien à illustrer la portée des antiques quadratures, et elle nous explique que VIVIANI, élève des anciens, a pu inventer un problème qui ne fut ensuite résolu par LEIBNIZ qu' au moyen d'une analyse nouvelle et inconnue à VIVIANI.

Nous passons ici des travaux aussi érudits que savants ([19], [27], [28], [43], [54], [55]) sur différents auteurs auxquels nous devons plus ou moins directement des renseignements historiques, sur leur époque, le milieu où ils vivaient et la tradition qui leur était accessible, pour

1) Le mémoire en question a été, à beaucoup d'égards, très suggestif à l'auteur de cette analyse, quand même, notamment pour APOLLONIUS, il ne s'est pas tenu aux conclusions qu'on y trouve. Le profit que j'ai pu tirer pour mes études des „coniques dans l'antiquité" du mémoire dont je vais parler ensuite [44] est évident.

nous arrêter au seul volume paru de *La géométrie grecque, comment son histoire nous est parvenu et ce que nous en savons, essai critique.* (Première Partie, Paris 1887 [96].) Dans cette première partie qu'elle devait être, l'auteur traite de l'histoire générale de la géométrie. L'auteur y a donc l'occasion de résumer les résultats de plusieurs mémoires déjà mentionnés sur la géométrie grecque tels que [7], [37] et d'autres dont nous n'avons pas parlé [51], et de rappeler une partie de ses résultats relatifs à l'arithmétique grecque et à ses rapports avec la géométrie. Les différents chapitres avaient du reste paru depuis le mois d'avril 1885 sous forme de mémoires dans le Bulletin des sciences mathématiques.

Le livre paru reprend en quelque sorte le but des travaux précédents de Bretschneider et d'Allman sur la géométrie avant Euclide. C'est en 1870 que le premier de ces auteurs a recueilli soigneusement les documents relatifs à la période préeuclidienne si mal traitée dans Montucla. Cette publication a été assez suggestive pour Paul Tannery comme pour beaucoup d'antres savants; mais en même temps sa critique a été éveillée par la manière trop immédiate dont ces documents y ont été traités par l'auteur, suivi à cet égard par Hankel. Allman, qui avait repris depuis 1877 la tâche de Bretschneider dans une série de mémoires — réunis plus tard en 1889 dans un volume, que Tannery mentionne avec une approbation sincère dans son analyse [111] — discute plus complètement et plus judicieusement la valeur de chacun de ces documents. Mais l'examen critique avait porté plutôt sur les documents considerés en eux-mêmes, dans leur probabilité intrinsèque, que sur leur origine et sur leur filiation. C'est cette origine et cette filiation que Tannery cherche à rétablir dans son livre en tirant au jour tous les renseignements dans la littérature conservée de l'antiquité qui peuvent servir à les illustrer, et en y appliquant tous les critères historiques, philologiques et mathématiques pour en distinguer les différentes sources et pour déterminer l'âge et la valeur de chacune de celles-ci, mais en même temps en ne negligeant pas d'essayer de combler les lacunes de la filiation établie par les hypothèses qui lui semblent les plus conformes à tous les faits connus.

Après une introduction aussi instructive que spirituelle il se met à étudier les sources où Proclus, dans son commentaire d'Euclide, a pu puiser ses précieux renseignements sur la géométrie préeuclidienne. Il s'y agissait avant tout de connaître la voie par laquelle les fragments de l'historien péripathétique Eudème lui sont parvenus. Tannery établit qu'il les doit soit à Geminus soit à Porphyre-Pappus, et que ses autres citations d'auteurs anciens proviennent des mêmes sources. Il sait distinguer entre elles ces deux sources, illustrées aussi par l'usage qu'en ont fait d'autres auteurs à la fin de l'antiquité et en particulier de la plus ancienne

GEMINUS. TANNERY établit que ce philosophe a écrit son „Introduction aux phénomènes“ dans le cours du premier siècle avant l'ère chrétienne, et s'occupe ensuite du classement grec des mathématiques tel que les extraits dus à GEMINUS nous le font connaître. Cela, non seulement lui sert à fixer les hornes de la géométrie grecque, objet de ses études immédiates, mais fait aussi le point de départ pour des explications sur l'arithmétique, la logistique et les mathématiques appliquées, sur leur rôle dans l'antiquité et leurs rapports avec la géométrie.

Après avoir montré que le fragment historique de PROCLUS est emprunté à GEMINUS, qui l'a tiré des quatre livres d'EUDÈME, TANNERY doit s'occuper des sources où cet historien des mathématiques a pu puiser ses renseignements sur les mathématiciens qui vivaient longtemps avant lui. Tandis que les propositions théoriques dont EUDÈME attribue la connaissance à THALÈS, s'expliquent très bien comme celles qui, dans le système géométrique de l'époque d'EUDÈME, seraient nécessaires pour les opérations pratiques que selon la tradition il savait exécuter, TANNERY signale des faits dont il conclut l'existence, à l'époque d'EUDÈME, d'un ouvrage portant le titre: *Tradition touchant PYTHAGORE.* Cette hypothèse n'a pas été généralement adoptée; mais même sans l'appui qu'offrirait l'existence d'un tel ouvrage, les renseignements d'EUDÈME sur les pythagoriciens concordent mathématiquement si hien entre eux et avec d'autres qui en sont indépendants et qui s'attachent à des propositions différentes, que les traits généraux de la mathématique pythagoricienne que nous donne TANNERY sont probablement justes et appartiennent en tout cas à l'époque hellène de la mathématique grecque. Ils sont confirmés par le fragment d'HIPPOCRATE sur lequel TANNERY revient dans son livre. Il peut donc montrer quel peut avoir été à peu près le fond des Éléments avant EUCLIDE. TANNERY montre qu'ils ont compris essentiellement les mêmes théories que ceux d'EUCLIDE à l'exception de ce qu'on doit à EUDOXE et à THÉÉTÈTE. Le premier a créé le lemme qui fait la base à la fois de la théorie exacte des proportions qu'on trouve au 5ᵉ livre et aux recherches infinitésimales dans le 12ᵉ livre et chez ARCHIMÈDE, qui le cite. Et il semhle que THÉÉTÈTE ait eu une influence notahle sur les théories du 10ᵉ et du 13ᵉ livre.

Aprés avoir discuté les contributions attribuées à DÉMOCRITE et à ARCHYTAS, TANNERY s'occupe des géomètres de l'Académie, dont il montre la dépendance de l'école d'EUDOXE à Cyzique. Des rapports sur les discussions qui ont eu lieu entre ces deux écoles, il tire des conclusions relatives à leurs respectives influences sur la forme que les Grecs donnaient aux propositions géométriques, et il y joint de nouvelles études de la forme singulière des propositions qu'on a appelées des porismes. Ensuite il rend compte de la technologie des éléments d'EUCLIDE qui s'est ainsi développée.

Plus tard il est revenu sur la même matière en parlant au Congrès d'histoire à Rome 1903 [224] de l'histoire des mots analyse et synthèse en mathématique.

Avec un soin semblable, Tannery a ensuite réuni et comparé dans son livre tous les documents sur les continuateurs d'Euclide. Il profite par exemple d'un opuscule d'Hypsiclès, qu'il place vers le commencement du 2e siècle avant J.-C., pour y constater le premier exemple de la division du cercle en $360^0$ et en fractions sexagésimales, minutes, secondes et tierces, et pour y reconnaître une interpolation qui suppose que, si les longitudes croissent en progression arithmétique, il en sera de même pour les *différences* des ascensions.

Enfin il s'occupe de la question suivante: A partir de quel moment les Eléments sont-ils devenus classiques pour l'enseignement de la géométrie dans l'antiquité. Il parvient à fixer ce terme à la fin de la période alexandrine. Après elle la géométrie élémentaire, regardée comme parfaite, reste absolument stationnaire. Dans cette recherche Tannery sait déjà profiter des renseignements sur un commentaire de Héron que fournit le „Codex leidensis" publié en 1893 et analysé ensuite par lui-même [130].

Malheurensement Paul Tannery n'a jamais continué l'œuvre dont nous venons ici de mentionner la première partie. Il avait pourtant, comme il le dit dans la préface, réuni les matériaux nécessaires pour cette continuation; mais pour les coniques et la géométrie supérieure il dit être dévancé par l'ouvrage de M. Zeuthen sur la même matière. Certainement cet auteur a raison d'apprécier beaucoup l'adhésion de Tannery à ses idées et à ses résultats, qui est aussi exprimée dans son analyse dudit ouvrage [88]. Il l'a d'autant plus que, dans ses propres études des grands auteurs et des sources historiques les plus accessibles, il était loin de posséder les connaissances complètes qui permettaient à Tannery d'avoir égard à tout ce qui avait des rapports avec la matière en question et à la valeur des différentes sources. Mais précisément pour ces raisons il est à regretter que les matériaux réunis par Tannery n'aient jamais paru. Tannery aurait par exemple fixé autant que possible les époques et les personnes auxquelles on doit les différentes parties des collections de Pappus comme il l'avait fait pour Proclus. Ne serait-il donc pas possible de publier ces matériaux qu'il a réunis? ou faut-il se contenter des contributions à l'histoire de la géométrie supérieure des Grecs dont nous avons déjà rendu compte ou qu'il a déposées dans plusieurs de ses analyses de livres parus, surtout dans [111] et [119], où il discute la différence qui doit avoir eu lieu entre le but des lieux solides d'Aristée et celui des éléments des coniques d'Euclide et d'Apollonius?

Nous devons parler plus brièvement des contributions de TANNERY à l'histoire de l'astronomie et, y comprises, à celle de la géométrie sphérique des Grecs et de l'origine de la trigonométrie, et nous le pouvons parce qu'il en a consigué les résultats principaux dans un livre [129] aussi riche de nouvelles vues que de nouvelles preuves de celles qui avaient été adoptées généralement avant lui. Pour en assurer les résultats positifs et pour éprouver les valeurs des hypothèses, il a ici un nouveau critère à côté de ceux dont il se sert ailleurs, à savoir le critère astronomique qui consiste à calculer les résultats provenant de toute méthode dont il est question et à en comparer l'exactitude avec celle qu'on a obtenue réellement.

Dans les mémoires sur l'histoire de l'astronomie qui précèdent cet ouvrage ([1], [36], [38], [58], [100]), et qui remontent jusqu'à 1876, il s'occupe d'EUDOXE et des astronomes qui ont adopté son système astronomique. Quant à ce système, TANNERY accepte entièrement la restitution due à SCHIAPARELLI. Il y emploie le calcul trigonométrique afin de faire juger par là de sa valeur réelle et du degré d'accord qu'il pouvait donner entre les théories et les observations. Le résultat de cette épreuve a été très favorable pour l'exactitude de cette solution graphique. TANNERY montre encore que la méthode d'observation employée dans le traité d'ARISTARQUE de Samos [38] pour déterminer le rapport des distances du Soleil et de la Lune avait déjà été employée par EUDOXE. Néaumoins il donne à ce traité la sérieuse attention qu'il mérite. Avant tout il y signale la première détermination trigonométrique, exprimant qu'avec les notations moderues $\frac{1}{18} > \sin 3^0 > \frac{1}{20}$.

Après la restitution du système d'EUDOXE, due à SCHIAPARELLI, et ses propres mémoires TANNERY n'a pas besoin de s'occuper de nouveau dans son livre: *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne* [129], de ce commencement de l'application de la mathématique à l'astronomie, de même que son livre *Pour l'histoire de la science hellène* l'exempte de revenir aux premiers essais d'explications cosmographiques des Hellènes. Dons son livre sur l'histoire de l'astronomie, il s'est proposé en premier lieu de donner de l'*Almageste* une analyse plus complète et plus exacte que celles qui existaient déjà. Il le fait en profitant de tous les renseignements que sa connaissance étendue de la culture ancienne mettait à sa disposition, et avec sa critique aussi fine au point de vue mathématique qu'au point de vue historique. En second lieu, il s'est proposé, à propos de chacune des théories exposées par PTOLÉMÉE, de remonter aux antécédents, en tant qu'on peut les connaître par les témoignages de l'antiquité, et d'esquisser ainsi les traits successifs du progrès de la doctrine. A cet égard il s'agissait premièremeut de la distinction qui doit être faite, dans

l'*Almageste*, entre ce qui est propre à Ptolémée et ce qu'il a emprunté à Hipparque, et Tannery parvient à cet égard à des résultats aussi précis qu'on peut les exiger en histoire.

Toutefois, en éclaircissant les détails des emprunts de Ptolémée, il ne fait en résumé que confirmer l'opinion la plus généralement adoptée; mais, pour Hipparque, il est amené à une conclusion qui s'accorde moins avec les idées courantes. Tout en reconnaissant les grands services rendus à la science par cet éminent astronome, il donne à ses mérites un caractère plus humain, en montrant que le savoir et les méthodes, qu'il élevait à leur apogée et qu'il savait employer d'une manière qui faisait oublier ses prédécesseurs, n'étaient pas des résultats de son invention personnelle, mais d'un développement commencé depuis Eudoxe et continué avant tout par les astronomes alexandrins. L'hypothèse des épicycles, destinée à remplacer le système d'Eudoxe, et dont Tannery montre les avantages trop souvent oubliés, appartient — abstraction faite d'essais qui remontent au temps de Platon — à Apollonius de Perge. L'utilisation des anciennes éclipses rémonte à Conon de Samos. Le calcul des cordes a été commencé par Archimède et Apollonius. Selon Tannery l'utilisation trigonométrique de ce calcul ne peut appartenir à Hipparque mais doit être attribuée à un génie géométrique comme Apollonius, de même que la découverte des propriétés de la projection stéréographique et son utilisation dans l'astrolabe etc. Il est vrai que, pour bien illustrer le détail de ce développement, Tannery a recours à des hypothèses souvent assez hardies, et attribue peut-être au grand géomètre Apollonius un rôle trop éminent dans l'histoire de l'astronomie; mais en tout cas l'existence du développement antérieur à Hipparque est bien constatée, et même son illustration par quelque trait hypothétique sert à contre-balancer l'exagération du rôle attribué autrefois au grand astronome.

Nous devons passer sous silence les intéressants et souvent très importants détails qu'on trouve partout dans le livre, et nous nous contenterons d'en tirer quelques traits du développement des idées cosmographiques. On sait que déjà Aristarque de Samos avait émis l'idée du système de Copernicus; mais cette idée était venue trop tôt pour réussir. Les connaissances astronomiques n'étaient pas encore assez grandes pour demander une explication si hardie, et les préjugés qui s'y opposaient ne le cédaient pas à ceux qu'a rencontrés Galilée. Plus tard les progrès astronomiques semblaient devoir nécessiter soit le retour à cette explication soit l'invention de celle de Tycho Brahe qui lui équivaut quant aux mouvements relatifs. Et en réalité Apollonius était sur le point de réaliser la dernière hypothèse au moyen des épicycles et des excentriques. Elle attribue immédiatement un mouvement épicycloidal aux planètes inférieures, le centre

des épicycles étant supposé suivre le mouvement du soleil. Pour les planètes supérieures, APOLLONIUS donne une autre explication, géométriquement identique à celle des épicycles, dont elle résulte par l'interversion des deux termes d'une somme géométrique, c'est celle d'un excentrique mobile, dont le centre est supposé décrire un cercle concentrique à la terre avec une vitesse égale au mouvement du soleil — ce qui est aussi conforme à l'hypothèse de TYCHO BRAHE. Au lieu de développer cette hypothèse pour la rendre plus conforme aux observations, HIPPARQUE, qui soutenait l'hypothèse des épicycles contrairement à celle des excentriques, attachait ses tables plus exactes à des complications des épicycles, ce qui marque un retour brusque à la thèse purement géocentrique, et à ces égards il a été suivi par PTOLÉMÉE. — Nous devons ajouter toutefois que SCHIAPARELLI, qui est revenu plus tard sur la même question, attribue déjà à HÉRACLIDE DE PONT l'hypothèse de TYCHO BRAHE, non seulement, comme aussi PAUL TANNERY l'avait fait, pour les planètes inférieures, mais aussi pour les planètes supérieures, et que, dans son analyse [173] TANNERY reconnaît la solidité de l'argumentation de l'astronome italien, qui l'a convaincu quant au thème général. Au contraire il n'adopte pas l'interprétation d'un texte grâce à laquelle SCHIAPARELLI croit pouvoir ramener à HÉRACLIDE l'hypothèse de COPERNICUS soutenue ensuite par ARISTARQUE (voir aussi [177]).

Entre les différentes additions contenues dans un appendice à l'Histoire de l'Astronomie, il faut signaler un résumé aussi court que précis des opérations trigonométriques qu'on trouve dans la Syntaxe de PTOLÉMÉE.

---

Nous avons appliqué la plus grande part de l'espace et du temps, mis à notre disposition pour rendre compte de l'œuvre mathématico-historique de PAUL TANNERY, à une analyse de ceux de ses travaux qui se rapportent à l'antiquité grecque. Toutefois s'il y a là un défaut de proportionnalité à l'étendue et à l'importance des différentes parties de son œuvre, il sera peut être justifié par la circonstance que sa profonde connaissance de toute la culture antique était la sûre base de son intelligence du développement ultérieur des sciences. Elle l'était pour les temps dont presque tout le savoir mathématique consistait en des emprunts, souvent fort mal conservés, aux anciens. Et elle n'était pas moins nécessaire pour bien saisir les idées des savants plus originaux de la Renaissance, qui avaient les auteurs anciens pour maîtres et guides, qui y puisaient les suggestions de leurs propres inventions et trouvaient là le point de départ commun pour leurs mutuelles conférences scientifiques. Preparé par la façon dont il avait pénétré au fond des pensées de ces mêmes auteurs antiques, et au moyen d'études aussi étendues et profondes des auteurs modernes,

grâce enfin à son admirable mémoire des faits, des idées et des personnes, il s'est rendu également maître de la science de la Renaissance et tout particulièrement de celle du 17ᵉ siècle. Cette maîtrise apparaît avant tout dans les éditions des œuvres de Fermat et Descartes.

Avant d'y venir, nous aurons à dire quelques mots de travaux qui se rapportent au temps écoulé depuis l'antiquité grecque et qui finissent par préparer ces éditions. Que Tannery n'a pas negligé le temps sombre qui s'étend pour la science européenne jusqu'aux premiers présages de la Renaissance, voilà ce qu'on voit dans les éditions ([85], [158], [164], [184]) et par les preuves qu'il y donne, comme ailleurs, d'érudition et d'attention à tout détail décelant des faits historiques. Nous avons déjà parlé de la première de ces éditions à cause de la lumière qu'elle jette sur la Logistique grecque. Pour profiter des travaux des agrimenseurs romains [158] Tannery était bien préparé par ses études de tout ce qui porte le nom de Héron et qui est puisé aux mêmes sources dont profitaient aussi les prototypes romains.

De l'autre côté ces travaux romains sont les sources qui ont été utilisées pour deux compilations dont le rôle a été considérable dans l'enseignement pendant une longue période du moyen âge, à savoir les deux Géométries attribuées l'une à Boèce, l'autre à Gerbert. De la correspondance du 11ᵉ siècle qu'il a publiée en collaboration avec M. l'abbé Clerval [184] Tannery tire des renseignements concernant la date et la composition de ces compilations et l'usage qu'on savait en faire à différentes époques. En même temps cette correspondance lui fait faire d'autres découvertes par exemple celles du moment où l'on commençait de remplacer dans l'Europe occidentale les fractions formées avec les mesures romaines par les fractions ordinaires, et du témoignage authentique le plus ancien qui montre l'astrolabe introduit dans l'Occident latin.

C'est d'un autre instrument astronomique et géodésique que Tannery s'occupe dans l'introduction du *Traité du quadrant de maître Robert Anglès (13ᵉ siècle)* [164]. À la savante description de cet instrument et des usages qu'on en a faits, et aux recherches érudites contribuant à résoudre le problème de son introduction en Occident, il joint beaucoup d'intéressantes observations. Nous en citerons une qui a égard à un fait constant dans l'histoire de la technique: „Le progrès ne s'y accomplit que par une lutte contre une fausse idée de commodité. Avant de multiplier les instruments pour adapter chacun d'eux à un but déterminé et le perfectionner d'après les exigences relatives à ce but, l'homme cherche un appareil pouvant servir au plus grand nombre d'usages possibles, il adopte à cet effet des dispositions compliquées aux dépens de la facilité de construction, et sacrifie l'exactitude de chaque opération spéciale à la possibilité d'en effectuer plus d'une."

Passons ensuite à un travail qui a indiqué TANNERY pour être coéditeur des œuvres de FERMAT. Dans sa recherche sur la date des principales découvertes de FERMAT [42], il parvient au résultat que celles-ci doivent être rapportées à son âge entre trente-cinq et quarante ans. En particulier il a documenté cette thèse: 1° pour la proposition sur la composition multiplicative des nombres figurés (coefficients du binôme), proposition que PASCAL a retrouvée dix-huit ans après, sans aucun soupçon de la très grande antériorité de la découverte de FERMAT; 2° pour la méthode de maximis et minimis et ses principales applications; 3° pour le théorème sur la composition d'un nombre entier en polygones d'un nombre de côtés donné, théorème que FERMAT indique lui-même comme le couronnement de ses découvertes sur les nombres entiers. La dernière découverte avait été précédée par des efforts de démontrer l'impossibilité de solutions entières de $x^n + y^n = z^n$ pour $n > 2$.

Aussi bien qu'à ce résultat, l'intérêt du mémoire cité s'attache à l'étude soigneuse de tous les documents et à la profonde intelligence de la connexion des idées de FERMAT qui a amené à cette conclusion. Celle-ci diffère du reste essentiellement de celle à laquelle son futur collaborateur à l'édition de FERMAT, M. CHARLES HENRY, avait cru parvenir. Cette différence pour commencer ne fait qu'augmenter le crédit de l'édition dont ils se sont ensuite accordés.

La nouvelle édition des œuvres de FERMAT [114], [131], [152] avait déjà été résolue en 1882; mais la publication a été retardée par l'espérance, qui se montra illusoire, de trouver des matériaux importants dans certains manuscrits d'une collection anglaise qu'il fallait acquérir (fonds Libri de la collection Ashburnham). Le tome I, contenant des œuvres mathématiques diverses de FERMAT et les observations sur DIOPHANTE, écrites par FERMAT dans son exemplaire de l'édition de BACHET, a paru en 1891, le tome II, contenant la correspondance de FERMAT, en 1894, enfin le tome III, contenant des traductions en français de ce qui avait été écrit en latin, en 1896. PAUL TANNERY s'était chargé pour le tome I de l'établissement du texte et de la rédaction des notes, pour le tome II de l'édition de la correspondance depuis 1636 jusqu'à 1645, et il était le seul éditeur du tome III.

Pour ceux qui lisent ou qui ont à faire usage de cette édition, les éditeurs se sont effacés le mieux possible. On y trouve les paroles, les expressions et les désignations de FERMAT aussi exactes qu'il a été possible de les reproduire, et les notes, souvent assez rares, se bornent aux éclaircissements positifs et très complets sur des faits bien constatés sans aucun essai de suggérer au lecteur l'opinion de l'éditeur sur les questions qui restent encore ouvertes. Elles se multiplient là où il s'agit de rendre compte

des propositions de DIOPHANTE auxquelles s'attachent les annotations de FERMAT, et nous savons déjà que PAUL TANNERY est à cet égard le meilleur guide.

Cependant le lecteur attentif saura découvrir et apprécier derrière cette discrétion des éditeurs la grandeur des difficultés qu'ils ont surmontées si excellement. Il le fera en apprenant par l'avertissement au commencement du 1er tome l'état des écrits et des documents qui étaient à leur disposition. Quant à l'établissement du texte, qui était l'affaire de TANNERY, on y voit que „l'édition des *Varia* [publiés aprés la mort de FERMAT par son fils] est d'une singulière incorrection, les originaux font défaut, à une seule exception près, qui permet d'ailleurs de constater que FERMAT les écrivait assez précipitamment pour ne pas éviter certains lapsus calami; enfin les copies laissent également plus ou moins à désirer". Naturellement le texte établi sous ces conditions est accompagné de variantes indiquées aux fins des tomes.

La grandeur des difficultés que TANNERY a surmontées se fait voir par l'embarras que causent à présent les documents qu'il avait déjà réunis et classés dans son esprit pour en former un quatrième volume des œuvres de FERMAT contenant de nombreuses pièces inédites, extrèmement intéressantes pour l'histoire des idées à cette époque.[1]) Personne ne sait profiter de ces documents comme lui. Malgré cela il est à espérer qu'on ne les soustraira pas long temps à la publicité.

Les traductions du tome III rendent les écrits latins de FERMAT fort accessibles aux mathématiciens sans s'éloigner trop de la forme originaire.

Si les manuscrits du „fonds Libri" de la „collection Ashburnham" ont apporté peu de choses utiles pour l'édition de FERMAT, on y a trouvé de fort interessantes lettres originales et inédites de DESCARTES à MERSENNE. TANNERY les a publiées dans l'Archiv für Geschichte der Philosophie [116] en les faisant suivre d'autres lettres également inédites. Plus tard, dans une série d'articles dans le Bulletin des sciences mathématiques qui ont été ensuite réunis en un volume [128], il a étudié ces lettres au point de vue de l'histoire des mathématiques en y ajoutant d'autres lettres relatives à DESCARTES, et il en a tiré des renseignements fort importants. On voit dans ces lettres de DESCARTES un essai, qui doit remonter avant 1619, d'expliquer la chute dans l'espace vide. Il prend pour point de départ le principe de l'inertie, auquel se joint une explication également juste de la variation de la vitesse d'une pendule; il y applique aussi, avant CAVALIERI, des considérations infinitésimales; mais l'essai a

1) JULES TANNERY: *Paul Tannery;* Comptes rendus du congrès de philosophie en Genève 1904, p. 788.

échoué parce que, comme le dit TANNERY, DESCARTES n'a pas observé sa propre règle, de n'accepter que des notions parfaitement claires et distinctes. Cet essai explique du reste des jugements assez superficiels, énoncés plus tard par DESCARTES, sur la théorie de GALILÉE, qu'il confond avec la sienne, sans l'éprouver de plus près.

TANNERY disculpe ROBERVAL d'être l'auteur de trois pamphlets contre DESCARTES, qui avaient circulé sous forme de lettres, et qu'on lui a attribués. Par de fines observations, il montre que l'auteur doit être BEAUGRAND qui chercha ainsi une vengeance du mépris avec lequel DESCARTES avait parlé de sa Géostatique. Plus tard on a trouvé et inséré dans la nouvelle édition de la Correspondance de DESCARTES (t. V, p. 503) une lettre de BEAUGRAND qui avait précédé ces lettres, et qui a, comme le montrent les éditeurs (TANNERY), une plus grande valeur réelle. Ailleurs [112] TANNERY a montré que c'est de même un jugement de la Géostatique qui a amené de la part de BEAUGRAND cette mention défavorable du *Brouillon projet* de son ancien ami DESARGUES qui a décélé à PONCELET la grande importance de l'œuvre de DESARGUES sur les coniques.

TANNERY démêle ensuite, au moyen des documents retrouvés, les causes et les incidents de la seconde et plus acharnée dispute entre DESCARTES et ROBERVAL. Selon lui, ce que DESCARTES — qui fut loin d'avoir raison au fond, et qui, comme forme mit la plupart du temps les torts de son côté — poursuit en ROBERVAL, ce n'est ni l'homme ni le géomètre; c'est le professeur en vue qui n'a pas adopté ses méthodes. Quant à ROBERVAL, TANNERY se réserve du reste, dans son avant-propos, de reprendre de même, plus tard, en s'appuyant aussi sur des pièces inédites ou peu connues, l'histoire de la célèbre dispute entre lui et TORRICELLI et de montrer que, dans ce cas encore, le premier fut loin d'avoir tous les torts. Partiellement, du moins, TANNERY a dégagé cette promesse dans l'édition des *Œuvres* de DESCARTES (t. V p. 428), où la priorité de ROBERVAL est démontrée pour la quadrature de la cycloide.

Dans une addition à son ouvrage, TANNERY rectifie quelques méprises dans l'histoire des précurseurs de l'Académie des sciences.

A la fin de son avant-propos TANNERY rappelle que le 31 mars 1896 serait le troisième centenaire de la naissance de DESCARTES, et propose à cette occasion une nouvelle édition de ses Œuvres complètes, entreprise qui, pour satisfaire aux besoins qui s'en étaient montrés et aux exigences de notre temps, demandait et la collaboration de plusieurs et une longue série de travaux préparatoires. Pour cette raison TANNERY n'espérait pas voir s'élever ce monument à son grand compatriote. En vérité il ne l'a pas vu achevé; mais grâce à lui-même et à son excellent collaborateur il en a vu six volumes parus, deux autres étaient sur le point de paraître,

et par ses travaux préparatoires, il aura beaucoup contribué à ceux qui restent encore. Il aura donc une part très essentielle à cette édition ([161], [170], [174], [190], [201], [211]), digne de Descartes, digne de la France, et qui en même temps, grâce aux renseignements réunis par les éditeurs, est devenue — à côté de la nouvelle édition de la correspondance d'Huygens — une magnifique source de la connaissance de l'histoire scientifique du 17e siècle.

En effet, l'idée de célébrer l'anniversaire de cette manière avait été adoptée par les premières autorités à cet égard en France, un comité était constitué sous les auspices du ministère de l'instruction publique, et à l'anniversaire même, la grande entreprise était assurée et pouvait être proclamée. Les soins de la publication étaient confiés à Paul Tannery surtout pour la partie proprement scientifique et à M. Ch. Adam surtout pour la partie philosophique. Du reste ces différentes parties ne se distinguent pas dans le siècle polyhistorique de Descartes. Aussi les études générales de Tannery avaient-elles embrassé le développement de toute la science jusqu'à cette époque, et il y avait d'excellentes conditions pour une collaboration intime. Pour cette raison, il est le plus souvent impossible de distinguer les contributions des deux collaborateurs, et le très petit nombre de notes où un *A* et un *T* indiquent une différence de leurs opinions sur le destinataire d'une lettre, ne fait que souligner leur unanimité ordinaire.

Cependant, il est sans doute permis d'attribuer à Tannery, non seulement l'intéressante note sur le problème de Pappus (VI p. 721) qui porte son nom, et les notes mathématiques marquées d'un T., mais aussi les autres notes donnant des explications mathématiques ou signalant les renseignements pour l'histoire des mathématiques qu'on peut tirer de la Correspondance.

Des progrès immédiats de nos connaissances de l'histoire des mathématiques sont dus aux lettres retrouvées et ajoutées à celles des éditions précédentes. Nous venons de parler de celles dont Tannery s'occupe dans son opuscule de 1893 [128]; plus tard et seulement d'assez bonne heure pour en faire une addition à la Correspondance (V p. 503 et suiv.) on a trouvé — à côté d'une lettre déjà mentionnée de Beaugrand — une série de lettres de Debeaune, comme il faut écrire son nom, qui jettent une lumière toute nouvelle sur ce mathématicien. Tannery en a rendu compte brièvement dans ses notes; mais il y est revenu plus tard au Congrès de Heidelberg [236], peu de mois avant sa mort. Dans les lettres retrouvées Debeaune se montre un habile algébriste, qui ne le cède pas à Roberval par exemple; mais, avant tout, Tannery a su conclure de ces lettres que celui des problèmes de Debeaune qui a excité de la part de Descartes une étude

méthodique d'nn problème inverse des tangentes n'était pas dû à un hazard ou à une spéculation géométrique sur la méthode directe des tangentes de DESCARTES, mais qu'il était le fruit d'efforts pour résoudre des problèmes physiques en les ramenant à des problémes inverses (équations différentielles). Cet essai, suggéré par la lecture des *Nuove scienze* de GALILÉE, était prématuré; mais l'étude qu'en fait TANNERY est, à côté de son commentaire (Correspondance de DESCARTES II, p. 520—523) de la solution connue que DESCARTES a donnée dudit problème, une contribution très notable à l'histoire de l'origine des équations différentielles.

Tandis que la communication à Heidelberg est relative aux volumes déjà publiés des Œuvres de DESCARTES, une notice sur les *Excerpta ex Mss. R. Descartes* [176] se réfère aux volumes encore en préparation. Elle nous assure avant tout que TANNERY à pris une part très effective à la préparation de l'édition difficile de ces papiers laissés, et elle nous fait espérer qu'il aura développé dans des notes plus étendues les nombreuses remarques intéressantes qu'il a déjà su tirer de ces papiers. Nous en citons en particulier celles qui sont relatives à nn usage infinitésimal de la composition des mouvements que DESCARTES a fait dans ses recherches personnelles.

---

Que nous soyons bien éloigné d'avoir rendu complètement compte de toutes les contributions à l'histoire des mathématiques qu'on doit à PAUL TANNERY, voilà ce qu'on découvre en revoyant la liste de ses travaux.

Ce qui manque à notre analyse apparaitra pourtant plutôt au lecteur attentif des travaux que nous avons analysés; car nous avons dû saisir, au milieu de la richesse des idées, des faits bien constatés ou des ingenieuses hypothèses qu'ils contiennent, ce qui nous a paru le plus important ou le plus intéressant, et d'autres lecteurs s'arrêteraient peut-être plutôt à d'autres côtés des mêmes mémoires.

M. ENESTRÖM a fait allusion à la même richesse des travaux de TANNERY en disant[1]) que les nombreuses hypothèses, dont il reconnaît du reste la grande valeur, fatiguent le lecteur. Il n'a pas tort; mais les hypothèses, qui ne sont données, comme le concède aussi M. ENESTRÖM, que pour des hypothèses, ne sont pas seules à demander la grande attention du lecteur. TANNERY puise largement dans la richesse de ses idées et de son savoir; il en produit tout ce qui lui semble utile pour parvenir au résultat et à une explication aussi complète que le permettent les faits connus. C'est parfois une longue voie pour arriver à ces résultats; mais dans cette voie on apprend à connaître des faits et des idées qui

1) Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, p. 8.

donnent plus de valeur à la possession des résultats, et qui seront souvent utiles aussi pour achever d'autres recherches.

Pour cette raison, la lecture attentive des travaux de Paul Tannery est fort suggestive. À côté de leurs fruits directs, ils ont certainement porté déjà beaucoup de fruits indirects par leur influence sur d'autres écrivains, et ils en porteront de nouveaux si les futurs historiens les lisent attentivement et ne se bornent pas à y chercher les résultats qui sautent le plus aux yeux.

Cette richesse dont nous parlons ici, se présente tout particulièrement dans ses analyses de livres parus. Ces analyses deviennent ainsi souvent de véritables additions à ces livres, soit qu'il discute ultérieurement les idées émises par l'auteur, soit qu'il corrige et supplée les faits qui y sont mentionnés. Et bien entendu ces additions sont données d'une manière si modeste et naturelle et avec un sens si ouvert pour tous les mérites du livre, qu'elles n'ont jamais rien de blessant pour l'auteur.

Il faut donc recommander à tous ceux qui ont besoin d'étudier un de ces livres de ne pas negliger de consulter aussi les analyses de Tannery.

Ceux au contraire qui ne cherchent que des résumés précis sur des résultats bien constatés de la science peuvent être renvoyés à ses articles dans la *Grande encyclopédie* [87] ou à sa collaboration à l'*Histoire générale* de M. M. Lavisse et Rambaud [140].

---

## Liste des travaux de Paul Tannery sur les mathématiques et sur l'historie et la philosophie des sciences mathématiques.[1])

### 1876.

1. *Note sur le système astronomique d'Eudoxe.* Mém. de la soc. d. sc. de Bordeaux $1_2$, 1876, 441—449. — Comparez 1883 (nº 36).

2. *Le nombre nuptial de Platon.* Revue philosophique 1, 1876, 170—188.

3. *L'hypothèse géométrique du Ménon de Platon.* Revue philosophique 2, 1876, 285—289.

4. *La géométrie imaginaire et la notion de l'espace.* Revue philosophiqne 2, 1876, 433—451; 3, 1877, 553—575.

1) J'ai lieu de croire que cette liste est à peu près complète et correcte pour ce qui concerne les écrits publiés séparément ou insérés dans des journaux mathématiques. Quant aux écrits sur l'histoire et la philosophie des mathématiques parus dans des journaux archéologiques, philologiques et philosophiques, ils m'ont été en grande partie inaccessibles, mais Mme M. Tannery a bien voulu mettre à ma disposition es renseignements qu'elle a réunis pour une bibliographie complète des travaux de son mari, et je les ai utilisés ici pour compléter ceux que j'avais recueillis moi-même.

1877.

5. *Note sur les forces attractives et répulsives et les actions de milieu.* Journ. de physique théorique et appliquée 6, 1877, 242—248. — Reproduction abrégée du nº 6 (1878).

Comparez 1876 (nº 4).

1878.

6. *Note sur la genèse des forces attractives et répulsives.* Mém. de la soc. d. sc. de Bordeaux $2_2$, 1878, 95—104.

7. *Hippocrate de Chio et la quadrature des lunules.* Mém. de la soc. d. sc. de Bordeaux $2_2$, 1878, 179—184.

8. *Sur les solutions du problème de Délos par Archytas et par Eudoxe.* Mém. de la soc. d. sc. de Bordeaux $2_2$, 1878, 277—283.

9. *Essais sur le syllogisme.* Revue philosophique 6, 1878, 68—75, 289—301.

10. [Analyses de travaux de S. Günther et A. Genocchi.] Bullet. d. sc. mathém. $2_2$, 1878, 145—146, 207—209.

1879.

11. *A quelle époque vivait Diophante?* Bullet. d. sc. mathém. $3_2$, 1879, 261—269.

12. *Une théorie de la connaissance mathématique.* Revue philosophique 7, 1879, 113—130; 8, 1879, 469—493.

1880.

13. *L'arithmétique des Grecs dans Pappus.* Mém. de la soc. d. sc. de Bordeaux $3_2$, 1880, 351—371.

14. *L'article de Suidas sur Hypatia.* Ann. de la fac. d. lettres de Bordeaux 2, 1880, 197—201. — A la fin (p. 200—201) la traduction d'un passage sur Adraste cité par Viète.

15. *Thalès et ses emprunts à l'Égypte.* Revue philosophique 9, 1880, 299—318.

16. *L'éducation platonicienne.* Revue philosophique 10, 1880, 517—530; 11, 1881, 283—299; 12, 1881, 149—168, 615—636. — Tableau des connaissances mathématiques au temps de Platon.

17. [Analyse du 1er tome des „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik" de M. Cantor.] Bullet. d. sc. mathém. $4_2$, 1880, 305—317.

1881.

18. *Sur l'âge du pythagoricien Thymaridas.* Ann. de la fac. d. lettres de Bordeaux 3, 1881, 101—104.

19. *L'article de Suidas sur le philosophe Isidore.* Ann. de la fac. d. lettres de Bordeaux 3, 1881, 204—208.

20. *Sur le problème des bœufs d'Archimède.* Bullet. d. sc. mathém. $5_2$, 1881, 25—30.

---

Du reste il est parfois presque impossible de décider, si une note philologique doit être mentionnée ou non dans une liste de travaux sur l'histoire des mathématiques.

Paul Tannery a publié un grand nombre d'analyses d'ouvrages d'histoire des mathématiques, dont plusieurs ont l'importance de travaux originaux. J'ai indiqué sommairement dans la liste celles parues dans des journaux mathématiques, mais les autres, p. ex. celles insérées dans la Revue de philologie et la Revue critique ont été omises. G. Eneström.

21. *Quelques fragments d'Apollonius de Perge.* Bullet. d. sc. mathém. $5_2$, 1881, 124—136.

22. *Les mesures des marbres et des divers bois de Didyme d'Alexandrie.* Revue archéologique $11_2$, 1881, 152—164.

Comparez 1880 (nº 16).

**1882.**

23. *L'arithmétique des Grecs dans Héron d'Alexandrie.* Mém. de la soc. d. sc. de Bordeaux $4_2$, 1882, 161—194.

24. *Sur la mesure du cercle d'Archimède.* Mém. de la soc. d. sc. de Bordeaux $4_2$, 1882, 313—337.

25. *De la solution géométrique des problèmes du second degré avant Euclide.* Mém. de la soc. d. sc. de Bordeaux $4_2$, 1882, 395—416 + 1 pl.

26. *Sur les fragments d'Eudème des Rhodes relatifs à l'histoire des mathématiques.* Ann. de la fac. d. lettres de Bordeaux 4, 1882, 70—76.

27. *Sur Sporos de Nicée.* Ann. de la fac. d. lettres de Bordeaux 4, 1882, 257—261.

28. *Un fragment d'Héraclite.* Ann. de la fac. d. lettres de Bordeaux 4, 1882, 331—333.

29. *Sur les fragments de Héron d'Alexandrie conservés par Proclus.* Bullet. d. sc. mathém. $6_2$, 1882, 99—108.

30. *Sur l'invention de la preuve par neuf.* Bullet. d. sc. mathém. $6_2$, 1882, 142—144.

31. *Anaximandre de Milet.* Revue philosophique 13, 1882, 500—529.

32. *Pour l'histoire du concept de l'infini au VI^e siècle avant J.-C.* Revue philosophique 14, 1882, 618—636.

33. *Hippocratea. In Simplicii de Antiphonte et Hippocrate excerpta.* Simplicii in Aristotelis physicorum libros quatuor priores, ed. H. Diels (Berlin 1882), XXVI—XXXI, 54—69.

34. [Analyse des „Literargeschichtliche Studien über Euklid" de J. L. Heiberg.] Bullet. d. sc. mathém. $6_2$, 1882, 145—152.

**1883.**[1]

35. *Sur une critique ancienne d'une démonstration d'Archimède.* Mém. de la soc. d. sc. de Bordeaux $5_2$, 1883, 49—61 + 1 pl.

36. *Seconde note sur le système astronomique d'Eudoxe.* Mém. de la soc. d. sc. de Bordeaux $5_2$, 1883, 129—147. — Comparez 1876 (nº 1).

37. *Le fragment d'Eudème sur la quadrature des lunules.* Mém. de la soc. d. sc. de Bordeaux $5_2$, 1883, 211—236 + 1 pl.

38. *Aristarque de Samos.* Mém. de la soc. d. sc. de Bordeaux $5_2$, 1883, 237—258.

39. *La stéreométrie de Héron d'Alexandrie.* Mém. de la soc. d. sc. de Bordeaux $5_2$, 1883, 305—326.

40. *Etudes héroniennes.* Mém. de la soc. d. sc. de Bordeaux $5_2$, 1883, 347—369.

41. *Un fragment de Speusippe.* Ann. de la fac. d. lettres de Bordeaux 5, 1883, 375—382.

[1]) En 1883 Paul Tannery a fait paraitre une *Notice sur les travaux publiés par M. Paul Tannery* (Paris, Gauthier-Villars, 28 p. in-4⁰).

42. *Sur la date des principales découvertes de Fermat.* Bullet. d. sc. mathém. $7_2$, 1883, 116—128.

43. *Serenus d'Antissa.* Bullet. d. sc. mathém. $7_2$, 1883, 237—244.

44. *Pour l'histoire des lignes et surfaces courbes dans l'antiquité.* Bullet. d. sc. mathém. $7_2$, 1883, 278—291; $8_2$, 1884, 19—30, 101—112.

45. *Albert Girard, de Saint-Mihiel.* Bullet. d. sc. mathém. $7_2$, 1883, 358—360.

46. *Sur le modius castrensis.* Revue archéologique $1_3$, 1883, 56—67.

47. *Anaximène et l'unité de substance.* Revue philosophique 15, 1883, 621—642.

1884.

48. *Note sur la théorie des ensembles.* Bullet. de la soc. mathém. de France 12, 1884, 90—96.

49. *Sur les manuscrits de Diophante à Paris.* Ann. de la fac. d. lettres de Bordeaux 6, 1884, 88—94.

50. *Sur la langue mathématique de Platon.* Ann. de la fac. d. lettres de Bordeaux 6, 1884, 95—105.

51. *Sur l'authenticité des axiomes d'Euclide.* Bullet. d. sc. mathém. $8_2$, 1884, 162—175.

52. *La perte de sept livres de Diophante.* Bullet. d. sc. mathém. $8_2$, 1884, 192—206.

53. *Manuel Moschopoulos et Nicolas Rhabdas.* Bullet. d. sc. mathém. $8_2$, 1884, 263—277.

54. *Domninos de Larissa.* Bullet. d. sc. mathém. $8_2$, 1884, 288—298.

55. *Eutocius et ses contemporains.* Bullet. d. sc. mathém. $8_2$, 1884, 315—329.

56. *Questions héroniennes.* Bullet. d. sc. mathém. $8_2$, 1884, 329—344, 359—376.

57. *Théorie de la connaissance mathématique.* Revue philosophique 17, 1884, 429—448.

Comparez 1883 (nº 44).

1885.

58. *Autolycus de Pitane.* Mém. de la soc. d. sc. de Bordeaux $2_3$, 1885, 173—199 + 1 pl.

59. *Sur l'arithmétique pythagoricienne.* Bullet. d. sc. mathém. $9_2$, 1885, 69—88.

60. *Le vrai problème de l'histoire des mathématiques anciennes.* Bullet. d. sc. mathém. $9_2$, 1885, 104—120.

61. *Proclus et Geminus.* Bullet. d. sc. mathém. $9_2$, 1885, 209—220.

62. *Le classement des mathématiques, d'après Geminus.* Bullet. d. sc. mathém. $9_2$, 1885, 261—276.

63. *Sur l'époque où vivait Geminus.* Bullet. d. sc. mathém. $9_2$, 1885, 283—292.

64. *Les applications de la géométrie dans l'antiquité.* Bullet. d. sc. mathém. $9_2$, 1885, 311—324.

65. *Scholie du moine Neophytos sur les chiffres hindous.* Revue archéologique $5_3$, 1885, 99—102.

66. *L'ουγκιασμός ὕδατος (école héronienne).* Revue archéologique $6_3$, 1885, 365—369.

67. *Notes critiques sur Domninos.* Revue de philologie $9_2$, 1885, 129—137.

68. *Le concept scientifique du continu.* Revue philosophique 20, 1885, 385—410.

69. *Notices de fragments d'onomatomancie arithmétique.* Notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque nationale 31 : 2, 1885, 231—260.

70. *Questions.* Biblioth. Mathem. 1885, 199—200.

71. [Analyse de la „Short history of Greek mathematics" de J. Gow.] Bullet. d. sc. mathém. $9_2$, 1885, 157—166.

1886.

72. *Sur un problème de Fermat.* Bullet. de la soc. mathém. de France 14, 1886, 41—45.

73. *L'ouvrage mathématique de George Pachymère.* Comptes rendus de l'acad. des inscriptions et belles-lettres [de Paris] $14_4$, 1886, 356.

74. *Tétrabiblos mathématique de George Pachymère.* Comptes rendus de l'acad. des inscriptions et belles-lettres [de Paris] $14_4$, 1886, 360.

75. *Sur la représentation des fractions chez les Grecs.* Biblioth. Mathem. 1886, 235—236.

76. *Le résumé historique de Proclus.* Bullet. d. sc. mathém. $10_2$, 1886, 49—64.

77. *La tradition touchant Pythagore, Oenopide et Thalès.* Bullet. d. sc. mathém. $10_2$, 1886, 115—128.

78. *La constitution des éléments.* Bullet. d. sc. mathém. $10_2$, 1886, 183—194.

79. *Hippocrate de Chios.* Bullet. d. sc. mathém. $10_2$, 1886, 213—226.

80. *Démocrite et Archytas.* Bullet. d. sc. mathém. $10_2$, 1886, 295—303.

81. *Les géomètres de l'académie.* Bullet. d. sc. mathém. $10_2$, 1886, 303—314.

82. *La coudée astronomique et les anciennes divisions du cercle.* Revue archéologique $7_3$, 1886, 27—37.

83. *Les chiffres arabes dans les manuscrits grecs.* Revue archéologique $7_3$, 1886, 355—360.

84. *Aristote, Météorologie livre III, ch. V.* Revne de philologie $10_2$, 1886, 38—46.

85. *Notice sur les deux lettres arithmétiques de Nicolas Rhabdas (texte grec et traduction).* Notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque nationale 32 : 1, 1886, 121—252.

86. *Le traité de Manuel Moscopoulos sur les carrés magiques (texte grec et traduction).* Annuaire de l'association pour l'encouragement des études grecques 20, 1886, 88—118.

87. [Environ 120 articles sur les mathématiques ou notices biographiques sur mathématiciens insérées dans „La grande encyclopédie" (tome 1—31, Paris 1886—1902).]

88. [Analyses de travaux de C. Ravaisson-Mollien, T. L. Heath, F. Hultsch, H. G. Zeuthen, Allégret.] Bullet. d. sc. mathém. $10_2$, 1886, 13—18, 148—157, 195—205, 259—278.

1887.

89. *Pour l'histoire de la science hellène, de Thalès à Empédocle.* Paris, Alcan 1887. 8°, VII + 396 p. — Cet ouvrage est un remaniement d'une suite d'articles publiés dans la Revue philosophique.

90. *L'extraction des racines carrées d'après Nicolas Chuquet.* Biblioth. Mathem. 1887, 17—21.

91. *Etudes sur Diophante.* 1—IV. Biblioth. Mathem. 1887, 37—43, 81—88, 103—108; 1888, 3—6.

92. *La technologie des éléments d'Euclide.* Bullet. d. sc. mathém. $11_2$, 1887, 17—28.

93. *Les continuateurs d'Euclide.* Bullet. d. sc. mathém. $11_2$, 1887, 86—96.

94. *Héron sur Euclide.* Bullet. d. sc. mathém. $11_2$, 1887, 97—108

95. *Les „Définitions" du Pseudo-Héron.* Bullet. d. sc. mathém. $11_2$, 1887, 189—193.

96. *La géométrie grecque, comment son histoire nous est parvenue et ce que nous en savons. Essai critique.* Première partie: Histoire générale de la géométrie élémentaire. Paris, Gauthier-Villars 1887. 8°, VI + 188 p. — Réimpression des nos 60—64, 76—81, 92—95.

97. *Traité sur le grand et le petit, par Théodore Prodrome.* Annuaire de l'association pour l'encouragement des études grecques 21, 1887, 104—119.

98. *Scholies sur Aristarque de Samos.* Revue de philologie $11_2$, 1887, 33—41.

99. [Analyse du „Carteggio inedito di G. A. Magini" de A. Favaro.] Bullet. d. sc. mathém. $11_2$, 1887, 12—16.
Comparez 1886 (no 87).

**1888.**

100. *La grande année d'Aristarque de Samos.* Mém. de la soc. d. sc. de Bordeaux $4_3$, 1888, 79—96.

101. *Notes critiques sur le traité de l'astrolabe de Philopon.* Revue de philologie $12_2$, 1888, 60—73.

102. *Question de philosophie mathématique.* Revue philosophique 24, 1888, 592—595.

103. *Rapport sur une mission en Italie du 24 janvier au 24 février 1886.* Archives des missions scientifiques $14_3$, 1888, 409—455.

104. [Analyse de l'ouvrage „Gerbert" de H. Weissenborn.] Bullet. d. sc. mathém. $12_2$, 1888, 283—288.
Comparez 1886 (no 87), 1887 (no 91).

**1889.**

105. *Pascal et Lalouvère.* Mém. de la soc. d. sc. de Bordeaux $5_3$, 1889, 55—84. — Comparez 1894 (no 132).

106. *Sur les tentatives d'explication de la gravitation universelle.* Mém. de la soc. d. sc. de Bordeaux $5_3$, 1889, 101—110.

107. *Les manuscrits de Fermat.* Ann. de la fac. d. lettres de Bordeaux 10, 1889, 297—323.

108. *Scholia in elementorum l. IX Procli in I Eucl. elem. lib. commentarii.* Revue de philologie $13_2$, 1889, 72—73.

109. *L'art d'Eudoxe.* Revue de philologie $13_2$, 1889, 143—150.

110. *L'hypothèse géométrique du Ménon de Platon.* Archiv für Gesch. d. Philosophie 2, 1889, 509—514.

111. [Analyse de la „Greek geometry" de G. J. Allman.] Bullet. d. sc. mathém. $13_2$, 1889, 272—278.
Comparez 1886 (no 87).

**1890.**

112. *Sur un opuscule de Desargues.* Bullet. d. sc. mathém. $14_2$, 1890, 248—250.

113. [Analyse de l'écrit: „Per la edizione nazionale delle opere di Galilei" de A. Favaro.] Bullet. d. sc. mathém. $14_2$, 1890, 123—125.
Comparez 1886 (no 87).

**1891.**

114. *Oeuvres de Fermat publiées par les soins de P. Tannery et Ch. Henry sous les auspices du ministère de l'instruction publique.* **Tome premier. Oeuvres divers mathématiques. — Observations sur Diophante.** Paris, Gauthier-Villars 1891, 4⁰, XXXVII + 440 p. + portrait. — Comparez 1894 (nº 131), 1896 (nº 152).

115. *Les autographes de Descartes à la bibliothèque nationale.* Bullet. d. sc. mathém. 15₂, 1891, 69—75, 111—120, 202—212, 228—236, 260—274, 281—296 301—308; 16₂, 1892, 32—40.

116. *Lettres inédites de Descartes à Mersenne.* Archiv für Gesch. d. Philosophie 4, 1891, 442—449, 529—556; 5, 1892, 217—222, 469—477.

117. *Les manuscrits de Diophante à l'Escorial.* Nouvelles archives des missions scientifiques 1, 1891, 383—393.

118. *Sur une épigramme attribuée à Diophante.* Revue des études grecques 4, 1891, 377—382.

119. [Analyse de l'édition des œuvres d'Apollonius par J. L. Heiberg.] Bullet. d sc. mathém. 15₂, 1891, 221—226.

Comparez 1886 (nº 87).

**1892.**

120. *Sur les lettres inédites de Descartes à la bibliothèque de l'Institut.* Bullet. d. sc. mathém. 16₂, 1892, 229—232.

121. *A propos de la correspondance de Huygens.* Bullet. d. sc. mathém. 16₂, 1892, 247—255.

122. *Psellus sur Diophante.* Zeitschr. für Mathem. 37, 1892; Hist. Abt. 41—45.

123. *Sur l'origine de nos chiffres.* Revue archéologique 20₃, 1892, 54—65.

124. *Psellus sur la grande année.* Revue des études grecques 5, 1892, 204—211.

125. *Psellus sur les nombres.* Revue des études grecques 5, 1892, 343—348.

126. [Analyses de travaux de G. Galilei, Nasireddin, E. Lucas, M. Cantor.] Bullet. d. sc. mathém. 16₂, 1892, 147—158, 161—165, 209—223, 257—263.

Comparez 1886 (nº 87), 1891 (nºs 115, 116).

**1893.**

127. *Diophanti Alexandrini Opera omnia cum graecis commentariis. Edidit et interpretatus est P. Tannery.* Volumen I. Diophanti quae exstant omnia continens. Leipzig, Teubner 1893. 8⁰, IX + 481 p. — Comparez 1895 (nº 143).

128. *La correspondance de Descartes dans les inédits du fonds Libri étudiée pour l'histoire des mathématiques.* Paris, Gauthier-Villars 1893. 8⁰, VII + 94 + (1) p. — Réimpression des nºs 115 et 121.

129. *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne.* Mém. de la soc. d. sc. de Bordeaux 1₄, 1893. VIII + 370 p.

130. [Analyses de travaux de H. Weissenborn, M. Cantor, F. Müller, G. Loria, J. Dupuis, E. Lucas, R. Besthorn et J. L. Heiberg.] Bullet. d. sc. mathém. 17₂, 1893, 47—50, 57—66, 108—110, 237—240, 282—288, 315—318.

Comparez 1886 (nº 87).

**1894.**

131. *Oeuvres de Fermat. Publiées par les soins de P. Tannery et Ch. Henry sous les auspices du ministère de l'instruction publique.* Deuxième tome. Correspondance. Paris, Gauthier-Villars 1894. 4⁰, XII + 514 p. — Comparez 1891 (nº 114).

132. *Pascal et Lalouvère.* Seconde note. Mém. de la soc. d. sc. de Bordeaux $4_4$, 1894, 251—259. — Comparez 1889 (nº 105).

133. *Sur un fragment inédit des Métriques de Héron d'Alexandrie.* Bullet. d. sc. mathém. $18_2$, 1894, 18—22.

134. *Un fragment des Métriques de Héron.* Zeitschr. für Mathem. 39, 1894; Hist. Abt. 13—15.

135. *Sur l'étymologie du mot chiffre.* Revue archéologique $23_3$, 1894, 48—53.

136. *Sur le concept de transfini.* Revue de métaphysique et de morale 2, 1894, 465—472.

137. *Sur Théon de Smyrne.* Revue des philologie $18_2$, 1894, 145—152.

138. *Sur les épigrammes arithmétiques de l'Anthologie palatine.* Revue des études grecques 7, 1894, 59—62.

139. *Le calcul des parties proportionnelles chez les Byzantins.* Revue des études grecques 7, 1894, 204—208.

140. [L'histoire des sciences en Europe depuis le 14e siècle jusqu'à 1900.] Histoire générale du 4e siècle à nos jours publiée sous la direction de E. Lavisse et A. Rambaud, tome 3—12 (Paris 1894—1901); 3, 244—262, 4, 306—324, 5, 450—490, 6, 394—429, 7, 726—762, 9, 361—392, 10, 733—767, 11, 940—966, 12, 557—580.

141. *Questions. Réponses.* L'interméd. d. mathém. 1, 1894, 21—22, 44, 151, 186, 207, 211—212, 220, 254.

142. [Analyses de travaux de G. Loria, W. W. R. Ball, G. Galilei, M. Cantor, C. de Vaux, Firmicus Maternus, G. Vivanti, G. Arnoux.] Bullet. d. sc. mathém. $18_2$, 1894, 5—12, 97—107, 206—213, 227—233, 277—280.

Comparez 1886 (nº 87).

## 1895.

143. *Diophanti Alexandrini Opera omnia cum graecis commentariis. Edidit P. Tannery.* Volumen II. Continens pseudepigraphica, testimonia veterum, Pachymerae Paraphrasin, Planudis Commentarium, Scholia vetera, omnia fere adhuc inedita, cum prolegomenis et indicibus. Leipzig, Teubner 1895. 8⁰, XLVII + 297 + (1) p. — Comparez 1893 (nº 127).

144. *Sur l'inscription astronomique de Keskinto.* Comptes rendus de l'acad. d. sc. [de Paris] 120, 1895, 363—365. — Comparez nºs 145, 149.

145. *Une inscription grecque astronomique.* Bullet. astronom. 12, 1895, 317—328. — Comparez nºs 144, 149.

146. *Sur le mathématicien français Chauveau.* Bullet. d. sc. mathém. $19_2$, 1895, 34—37.

147. *Les subdivisions de l'heure dans l'antiquité.* Revue archéologique $25_3$, 1895, 359—366.

148. *Sur un passage de Théon de Smyrne.* Revue de philologie $19_2$, 1895, 67—69.

149. *L'inscription astronomique de Keskinto.* Revue des études grecques 8, 1895, 48—58. — Comparez nºs 144, 145.

150. *Questions. Réponses.* L'interméd. d. mathém. 2, 1895, 29, 55—56, 60, 82—84. 93, 102—103, 104, 116—117, 134, 146, 163, 173, 175, 181, 189, 203, 214, 241—242, 270, 274, 279, 297—298, 301, 303, 308—309, 310, 317, 359, 364, 369, 371, 376—377, 414.

151. [Analyses de travaux de G. Milhaud, P. Riccardi, G. Loria.] Bullet. d. sc. mathém. $19_2$, 1895, 5—7, 176—178, 265—271.

Comparez 1886 (nº 87), 1894 (nº 140).

## 1896.

152. *Oeuvres de Fermat publiées par les soins de P. Tannery et Ch. Henry sous les auspices du ministère de l'instruction publique.* Tome troisième. Traduction par P. Tannery: 1° Des écrits et fragments latins de Fermat; 2° de l'Inventum novum de Jacques de Billy; 3° du Commercium epistolicum de Wallis. Paris, Gauthier-Villars 1896. 4°, XV + 610 + (1) p. — Comparez 1891 (n° 114). — Un 4e volume était préparé par Paul Tannery pour paraître en 1905.

153. *Sur un opuscule latin écrit à Monpellier au XIIIe siècle et traduit plus tard en grec.* Comptes rendus de l'acad. des inscriptions et belles-lettres [de Paris] $24_4$, 1896, 180.

154. *Sur la réligion des derniers mathématiciens de l'antiquité.* Annales de la philosophie chrétienne $34_2$, 1896, 26—36.

155. *Descartes physicien.* Revue de métaphysique et de morale 4, 1896, 478—488.

156. *Vitruvius Rufus § 39.* Revue de philologie $20_2$, 1896, 175—177.

157. *Athénée sur Ctesibios et l'hydraulis.* Revue des études grecques 9, 1896, 23—27.

158. *Introduction* à „Un nouveau texte des traités d'arpentage et de géométrie d'Epaphroditus et de Vitruvius Rufus“ par M. V. Mortet. Notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque nationale 35:2, 1896, 511—519.

159. *Questions. Réponses.* L'interméd. d. mathém. 3, 1896, 19, 38, 47, 49, 57—58, 69—70, 74, 78—79, 85, 98—99, 104, 130, 140, 143, 146, 149, 170—171, 185—186, 188—189, 199, 207—208, 213, 220, 227.

160. [Analyses de travaux de H.-G. Zeuthen, J. Neper, F. Ritter, A. Carli et A. Favaro.] Bullet. d. sc. mathém. $20_2$, 1896, 24—28, 81—85, 105—108, 204—211, 283—286.

Comparez 1886 (n° 87), 1894 (n° 140).

## 1897.

161. *Oeuvres de Descartes, publiées par Ch. Adam et P. Tannery sous les auspices du ministère de l'instruction publique.* Correspondance. I. Avril 1622 — Février 1638. Paris, Cerf 1897. 8°, CV + 589 p. — Comparez 1898 (n° 170), 1899 (n° 174), 1901 (n° 190), 1902 (n° 201), 1903 (n° 211).

162. *Une correspondance d'écolâtres au XIe siècle.* Comptes rendus de l'acad. des inscriptions et belles-lettres [de Paris] $25_4$, 1897, 214—221.

163. *Magister Robertus Anglicus in Montepessulano.* Biblioth. Mathem. 1897, 3—6.

164. *Le traité du quadrant de maître Robert Anglès (Montpellier, XIIIe siècle). Texte latin et ancienne traduction grecque.* Notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque nationale 35:2, 1897, 561—640.

165. *Sur la locution ἐξ ἴσου.* Revue des études grecques 10, 1897, 14—18.

166. *Frontin et Vitruve.* Revue de philologie $21_2$, 1897, 118—127.

167. *La géométrie au XIe siècle.* Revue générale internationale, scientifique, littéraire et artistique (Paris) 2, 1897, 343—356.

168. *Questions. Réponses.* L'interméd. des mathém. 4, 1897, 3, 88, 125—126, 141, 162—163, 165—166, 204—205, 234—235, 253—254, 258, 263, 279, 286.

169. [Analyses de travaux de F. Cajori, M. Curtze.] Bullet. d. sc. mathém. $21_2$, 1897, 119—120, 277—279.

Comparez 1886 (n° 87), 1894 (n° 140).

### 1898.

170. *Oeuvres de Descartes publiées par Ch. Adam et P. Tannery sous les auspices du ministère de l'instruction publique.* Correspondance. II. Mars 1638 — Décembre 1639. Paris, Cerf 1898. 4°, XXIII + 653 p. — Comparez 1897 (n° 161).

171. *Sur Carpos d'Antioche.* Revue de philologie $22_2$, 1898, 93—97.

172. *Questions. Réponses.* L'interméd. d. mathém. **5**, 1898, 5, 105, 128—129, 134, 154, 164—165, 166, 197, 202—203, 216, 220, 240, 280—282.

173. [Analyses de travaux de H. Brocard, M. Cantor, G. V. Schiaparelli.] Bullet. d. sc. mathém. $22_2$, 1898, 165—167, 197—200, 274—278.

Comparez 1886 (n° 87), 1894 (n° 140).

### 1899.

174. *Oeuvres de Descartes publiées par Ch. Adam et P. Tannery sous les auspices du ministère de l'instruction publique.* Correspondance. III. Janvier 1640 — Juin 1643. Paris, Cerf 1899. 4°, IV + 722 p. — Comparez 1897 (n° 161).

175. *Le cadran de Carthage.* Comptes rendus de l'acad. des inscriptions et belles-lettres [de Paris] $27_4$, 1899, 38—48.

176. *Les „Excerpta ex M.SS. R. Des-Cartes".* Abhandl. zur Gesch. der Mathem. **9**, 1899, 501—513.

177. *Sur Héraclide du Pont.* Revue des études grecques 12, 1899, 305—311.

178. *Questions. Réponses.* L'interméd. d. mathem. **6**, 1899, 15, 46—47, 48, 100, 129, 139—141, 144, 147—148, 158, 165, 181, 189, 191, 198—199, 222—223, 227, 236, 275.

179. [Analyses de travaux de J. L. Heiberg, W. F. Wislicenus, M. Curtze, P. Tannery, R. Besthorn et J. L. Heiberg.] Bullet. d. sc. mathém. $23_2$, 1899, 65—68, 140—150, 169—172.

Comparez 1886 (n° 87), 1894 (n° 140).

### 1900.

180. *Ouvrage mathématique de Dominicus de Clavasio.* Comptes rendus de l'acad. des inscriptions et belles-lettres [de Paris] 1900, 352.

181. *Traité de géométrie attribué à Hugues de St. Victor.* Comptes rendus de l'acad. des inscriptions et belles-lettres [de Paris] 1900, 353.

182. *Notes sur la Pseudo-Géométrie de Boèce.* Biblioth. Mathem. $1_3$, 1900, 39—50.

183. [Petites remarques sur les „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik" de M. Cantor.] Biblioth. Mathem. $1_3$, 1900, 265—269, 501—503, 507—511; $2_3$, 1901, 146—149; $3_3$, 1902, 238, 324.

184. *Une correspondance d'écolâtres du XI^e siècle.* Notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque nationale **36**, 1900, 487—543. — En collaboration avec l'abbé Clerval.

185. *Histoire des mathématiques* [revue générale]. Revue de synthèse historique **1**, 1900, 179—195.

186. *La droite infinie.* Revue philosophique **50**, 1900, 388—390.

187. *Questions. Réponses.* L'interméd. d. mathém. **7**, 1900, 31—32, 52, 83—84, 94—95, 106, 107, 160, 204, 210, 214, 247, 252—253, 255, 287, 319, 321, 323, 326—328, 340, 445, 352, 361—362, 383, 389—390, 401—402, 404—405, 413—414.

188. [Analyse des „Gerberti Opera mathematica" de N. Bubnow.] Biblioth. Mathem. $1_3$, 1900, 286—287.

189. [Analyses de travaux de C. I. Gerhardt, M. Curtze et S. Günther („Festschrift"), H. Brocard, E. Wohlwill, A. Bouché-Leclercq, J. Boyer.] Bullet. d. sc. mathém. $24_2$, 1900, 15—27, 33—41, 132—134.

Comparez 1886 (nº 87), 1894 (nº 140).

## 1901.

190. *Oeuvres de Descartes publiées par Ch. Adam et P. Tannery sous les auspices du ministère de l'instruction publique.* Correspondance. IV. Juillet 1643 — Avril 1647. Paris, Cerf 1901. 4⁰, VI + 708 + (1) p. — Comparez 1897 (nº 161).

191. Annales internationales d'histoire. Congrès de Paris 1900. 5e section. Histoire des sciences. Paris, Colin 1901. 8⁰, (7) + 318 p. + 4 pl. — Publiées par Paul Tannery. — Outre les deux communications mentionnées ci-dessous, ce volume contient de sa main: Traduction d'Anatolius, sur la décade et les nombres qu'elle comprend, avec Observations (p. 42—57); Observations sur la note de M. Saavedra sur l'histoire de la résolution des équations cubiques (p. 61—63); Observations sur la note de M. M. Gallian sur les problèmes mécaniques attribués à Aristote (p. 108—111).

192. *Notes sur les manuscrits français de Munich 247 et 252 et de Vienne 7049—7050.* Congrès de Paris 1900; histoire des sciences, 1901, 297—310. — Traités de mathématiques et lettres de mathématiciens du 17e siècle.

193. *Lettre inédites adressées au père Mersenne.* Congrès de Paris 1900; histoire des sciences, 1901, 311—343.

194. *Le philosophe Aganis est-il identique à Geminus?* Biblioth. Mathem. $2_3$, 1901, 9—11.

195. *Sur la „Practica geometriae Hugonis".* Biblioth. Mathem. $2_3$, 1901, 41—44.

196. *Sur le „Liber augmenti et diminutionis" compilé par Abraham.* Biblioth. Mathem. $2_3$, 1901, 45—47.

197. *Histoire de la géométrie* [revue générale]. Revue de synthèse historique 2, 1901, 283—299.

198. *Galilée et les principes de la dynamique.* Revue génér. d. sc. 12, 1901, 330—338.

199. *Questions. Réponses.* L'interméd. d. mathém. 8, 1901, 31, 127—128, 237, 244—245, 252—253, 263—265, 276, 288, 298—299, 303—304, 308, 316.

200. [Analyses de travaux de J. M. Hill, H. Suter, G. Loria.] Bullet. d. sc. mathém. $25_2$, 1901, 45, 55—56, 85—90.

Comparez 1886 (nº 87), 1894 (nº 140), 1900 (nº 183).

## 1902.

201. *Oeuvres de Descartes publiées par Ch. Adam et P. Tannery sous les auspices du ministère de l'instruction publique.* VI. Discours de la méthode et Essais. Paris, Cerf 1902. 4⁰, XIV + 725 p. — Comparez 1897 (nº 161).

202. *Du rôle de la musique grecque dans le développement de la mathématique pure.* Biblioth. Mathem. $3_3$, 1902, 161—175.

203. *Sur la sommation des cubes entiers dans l'antiquité.* Biblioth. Mathem. $3_3$, 1902, 257—258.

204. *Simplicius et la quadrature du cercle.* Biblioth. Mathem. $3_3$, 1902, 342—349.

205. *Sur un point d'histoire de la musique grecque.* Revue archéologique $39_3$, 1902, 49—54.

206. *Histoire de la mécanique* [revue générale]. Revne de synthèse historique 4, 1902, 191—204.

207. *Sur les intervalles de la musique grecque.* Revue des études grecques 15, 1902, 336—352.

208. *Question. Réponses.* L'interméd. d. mathém. 9, 1902, 5, 67, 76, 83, 85, 169—171, 283—284, 297, 300, 308—309, 323—324, 329.

209. [Annotations à la traduction française de l'histoire des mathématiques dans l'antiquité et le moyen âge par H. G. Zeuthen (Paris 1902), 10, 14, 23, 28, 74, 94 126, 193, 199, 208, 209, 248, 251, 255, 264, 277.]

210. [Analyses de travaux de P. Tannery, H. G. Zeuthen.] Bullet d. sc. mathém. $26_2$, 1902, 229—230, 313—319.

Comparez 1886 (nº 87), 1900 (nº 183).

1903.[1])

211. *Oeuvres de Descartes publiées par Ch. Adam et P. Tannery sous les auspices du ministère de l'instruction publique.* Correspondance. V. Mai 1647 — Février 1650. Paris, Cerf 1903. 4⁰, 661 p. — Comparez 1897 (nº 161). — A la mort de Paul Tannery les tomes VII et IX (contenant des écrits philosophiqnes) étaient terminés.

212. *Notions historiques* insérées dans l'onvrage de J. Tannery: „Notions de mathématiques" (Paris, Delagrave 1903), p. 324—348.

213. *La science et l'hypothèse, d'après M. H. Poincaré.* Annales de philosophie chrétienne $2_3$, 1903, 241—255.

214. *Un mot sur Descartes.* Archiv für Gesch. d. Philosophie 16, 1903, 301—306.

215. *Héron d'Alexandrie.* Journal des savants 1903, 147—157, 203—211.

216. *Y-a-t-il un nombre géométrique de Platon?* Revne des études grecques 16, 1903, 173—179.

217. *Histoire de l'astronomie* [revue générale]. Revue de synthèse historique 6, 1903, 301—316.

218. *Un voeu relatif à l'enseignement de l'histoire des sciences.* Revue de synthèse historiqne 7, 1903, 100—101.

219. *L'histoire des sciences au congrès de Rome 1903.* Revne internationale de l'enseignement 1903. 8 p.

220. *Questions. Réponses.* L'interméd. d. mathém. 10, 1903, 29—30, 96, 98—99, 121, 157, 159, 163, 168, 171, 172—173, 226, 249—250.

221. [Analyses de travaux de H. Konen, H. Schöne (œuvres de Héron).] Bullet. d. sc. mathém. $7_2$, 1903, 47—51, 87—92.

1904.

222. *Inauthenticité de la „Division du canon" attribuée à Euclide.* Comptes rendns de l'acad. des inscriptions et belles-lettres [de Paris] 1904, 439—445.

223. *Propositions ayant pour but d'activer le progrès de l'histoire des sciences.* Atti del congresso internazionale di scienze storiche (Roma) 12, 1904, 7—13.

224. *Sur l'histoire des mots analyse et synthèse en mathématiques.* Atti del congresso internazionale di scienze storiche (Roma) 12, 1904, 219—229.

225. *Sur le symbole de soustraction chez les Grecs.* Biblioth. Mathem $5_3$, 1904, 5—8.

1) En 1903 Paul Tannery a publié une brochure: *Titres scientifiques de M. Paul Tannery* (Paris, (2) + 9 p. in-8⁰).

226. *Sur l'auteur d'un texte algorithmique du 12e siècle publié par* Curtze. Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, 416.

227. *Sur une erreur mathématique de* Descartes. Arch. für Gesch. d. Philosophie 17, 1904, 334—340.

228. *Maximilien Curtze, historien des mathématiques.* Journal des savants 1904, 457—470.

229. *Notes critiques sur les Metrica de Héron.* Revue de philologie $28_2$, 1904, 181—188.

230. *A propos des fragments Philolaïques sur la musique.* Revue de philologie $28_2$, 1904, 233—249.

231. *De l'histoire générale des sciences.* Revue de synthèse historique 8, 1904, 1—16.

232. *Réponses.* L'interméd. d. mathém 11, 1904, 254—256.

233. *Mensura.* Dictionnaire des antiquités grecques et romaines de E. Saglio et C. Daremberg (Paris) 3, 1904, 1727—1731.

234. [Plusieurs notices historiques dans „l'Encyclopédie des sciences mathématiques" 1 : 1, Paris 1904.]

235. [Analyse des „Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Mittelalter und der Renaissance" de M. Curtze.] Bullet. d. sc. mathém. $28_2$, 1904, 164—172.

## 1905.

236. *Pour l'histoire du problème inverse des tangentes.* Verhandl. d. 3. internat. Mathem.-Kongr. 1904, 1905, 502—514.

237. *Sur la division du temps en instants au moyen âge.* Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 111.

238. *Un traité grec d'arithmétique antérieur à Euclide.* Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 225—229.

239. *Notes sur trois manuscrits grecs mathématiques de Turin.* Revue des études grecques 18, 1905, 207—210.

240. *Auguste Comte et l'histoire des sciences.* Revue génér. d. sc. 16, 1905, 410—417.

241. *Questions. Réponses.* L'interméd. d. mathém. 12, 1905, 40—42, 100, 122, 194, 220.

# Kleine Mitteilungen.

## Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik".

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen".
BM = Bibliotheca Mathematica.

**1 : 12**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 265. — **1 : 15**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 323. — **1 : 22, 29, 34**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 265—266. — **1 : 36, 64**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137. — **1 : 103**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1 : 135**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137. — **1 : 144, 155, 169, 171**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137—138. — **1 : 189—190**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 101. — **1 : 192, 193**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 101—102. — **1 : 195**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 56; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 102. — **1 : 196—197**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 102—103. — **1 : 198**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 103. — **1 : 202**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1 : 207**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 283. — **1 : 225, 234**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 138. — **1 : 255**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 238. — **1 : 272**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 396. — **1 : 283**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1 : 284, 321**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266—267.

---

**1 : 335.** In betreff der Frage, was Pappus in seinem IV. Buche die zweite, dritte und vierte Konchoide genannt haben mag, ist es vielleicht nicht ohne Interesse darauf hinzuweisen, daß Viète die zweite Konchoide mit der Kreiskonchoide identifiziert zu haben scheint. Am Anfange des *Supplementum geometriae* (siehe *Opera mathematica* ed. F. van Schooten, Leiden 1646, S. 240) nimmt er die folgende Konstruktion als ausführbar an: „A quovis puncto in area circuli ... signato, ad quamvis lineam rectam cum circulari concurrentem et indefinite continuatam, aliam insuper lineam rectam ducere, interceptam longitudine quacumque", und fügt hinzu: „et opus ... videtur absolvisse Nicomedes ... sua conchoide secunda". Aber die Konchoide, wodurch die fragliche Konstruktion ausgeführt wird, ist entweder die gewöhnliche oder die Kreiskonchoide. Freilich wird auf diese Weise nicht erklärt, was unter dritter und vierter Konchoide verstanden werden soll, und auf Viètes Mutmaßung ist also kein größeres Gewicht zu legen. G. Eneström.

---

**1 : 370**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 319. — **1 : 383**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1 : 386**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 407. — **1 : 395**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 323. — **1 : 400**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1 : 429**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 324. — **1 : 432**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1 : 434—435**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 396—397. — **1 : 436**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 138. — **1 : 437, 440**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1 : 457**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 238. — **1 : 463**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139, 324. — **1 : 466**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 397. — **1 : 467, 469**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1 : 475**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267—268; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139; $\mathbf{4}_3$,

1903, S. 283. — **1 : 476**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 268. — **1 : 508**, siehe BM $5_3$, 1904, S. 68. — **1 : 510**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 314. — **1 : 519—520**, siehe BM $3_3$, 1902, S. 239. — **1 : 537, 540, 542**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 268.

**1 : 618.** Die indische Formel

$$s = \frac{4\,d\,B\,(P - B)}{\frac{5}{4}\,P^2 - B\,(P - B)}$$

für die Länge $s$ der Sehne, welche die Peripherie $P$ des Kreises vom Durchmesser $d$ in die beiden Bögen $B$ und $P - B$ teilt, wird wahrscheinlich durch eine Art von Interpolation entstanden sein, oder — um mich nicht zu modern auszudrücken — besser gesagt, durch ein Herumtasten nach einer möglichst einfachen Formel, die für gewisse gegebene Werte des Argumentes bekannte Funktionenwerte ergibt. Ein flüchtiger Blick zeigt ja, daß $s$ ebenso wie $B\,(P - B)$ für $B = 0$ und $B = P$ verschwindet, für $B = \frac{P}{2}$ den größten Wert annimmt und unverändert bleibt, wenn $B$ mit $P - B$ vertauscht wird. Es mußte also nahe liegen $s$ und $B\,(P - B)$ zwischen $B = 0$ und $B = \frac{P}{2}$ einander proportional zu nehmen und so in erster Annäherung

$$s : d = B\,(P - B) : \frac{P^2}{4}$$

zu gewinnen. Es gibt aber die so erhaltene Formel

$$s = \frac{4\,d\,B\,(P - B)}{P^2}$$

für $B = \frac{P}{6}$ einen zu großen Wert. Die indischen Mathematiker werden nun versucht haben den Nenner so zu ändern, daß die Formel für $B = 0$, $\frac{P}{2}$, $P$ richtig bleibt und zugleich für $\frac{P}{6}$ den wahren Wert von $s$ ergibt. Nach einigen tieferen Überlegungen oder durch Zufall haben sie dann gefunden, daß eine Addition von

$$\frac{P^2}{4} - B\,(P - B)$$

zum Nenner dem Zwecke entspricht.

Die Inder scheinen auch in anderen Fällen interpoliert zu haben. Es führt mich zu dieser Vermutung die Abhandlung des Herrn H. Suter *Über die Vielecksformeln in Bhâskaras Lilavati* (Verhandl. des dritten internat. Mathematiker-Kongresses, Leipzig 1905, S. 556—558), wo neben der soeben besprochenen Formel, die Suter in anderer Weise herleitet, auch noch eine zweite den Indern zugeschriebene Formel erwähnt ist. Sie lautet in der Form, wie sie bei el-Karchi vorkommt:

$$d = \frac{s}{3}\sqrt{n\,(n - 1) + 6}$$

wo $s$ die Seite des in den Kreis vom Durchmesser $d$ eingeschriebenen regelmäßigen $n$-Eckes bedeutet. Schreibt man diese Formel in der Gestalt

$$\left(\frac{d}{s}\right)^2 = \frac{n\,(n - 1) + 6}{9}$$

so ist die rechte Seite vollständig dadurch charakterisiert, daß sie eine ganze Funktion zweiten Grades ist, die für $n = 3, 4, 6$ die richtigen Werte $\frac{4}{3}$, 2, 4, annimmt. Das spricht wohl dafür, daß auch diese Formel durch eine Art von Interpolation entstanden ist. Aber auch ohne schlagende Beweise bin ich geneigt einem Volke, das Gleichungen mit dem Verfahren der angenommenen Zahl („ishta karman") löst, ein Suchen durch Probieren zuzuschreiben, wenn auch das Herumtasten nach einer Formel schwieriger ist, als dasjenige nach einer Zahl.

Budapest. JOSEF KÜRSCHÁK.

---

**1 : 622,** siehe BM **2**₃, 1901, S. 143. — **1 : 641,** siehe BM **3**₃, 1902, S. 139. — **1 : 661,** siehe BM **1**₃, 1900, S. 499. — **1 : 662,** siehe BM **1**₃, 1900, S. 499; **3**₃, 1902, S. 139. — **1 : 663,** siehe BM **3**₃, 1902, S. 405. — **1 : 671,** siehe BM **1**₃, 1900, S. 499.

---

1 : 673. Die Worte „Die eigentliche Schwierigkeit der Subtraktion für Anfänger ... wird nicht mit einem Worte berührt" sollten gestrichen werden. *ALGORITMI de numero indorum* enthält nämlich (S. 8—9 der BONCOMPAGNIschen Ausgabe) die gewöhnliche Behandlung des Falles, daß eine Stelle des Subtrahenden durch eine höhere Zahl als die entsprechende Stelle des Minuenden erfüllt ist. Der betreffende Passus beginnt (S. 8): „Quod si non fuerit in superiori differentia tantus numerus, de quo possis minuere numerum inferioris differentie" und endet (S. 9): „postea a sequenti que eam succedit, quia utilius ac leuius erit opus, si Deus voluerit". Wahrscheinlich fand sich im Original auch ein Beispiel dieses Falles, denn in der lateinischen Übersetzung wird von „tres modi" gesprochen, obgleich nur zwei Beispiele angeführt werden, nämlich 6422—3211 und 1144—144 (vgl. FRIEDLEIN, *Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen*, Erlangen 1869, S. 129—130). G. ENESTRÖM.

---

**1 : 673, 675,** siehe BM **5**₃, 1904, S. 407—408. — **1 : 687—689,** siehe BM **2**₃, 1901, S. 143—144; **4**₃, 1903, S. 205—206. — **1 : 694,** siehe BM **1**₃, 1900, S. 499; **4**₃, 1903, S. 284; **6**₃, 1905, S. 103. — **1 : 704, 706, 708, 714,** siehe BM **1**₃, 1900, S. 499—500.

---

1 : 723. Es ist natürlich ganz richtig, daß ALKARCHI mitunter auch irgend eine gesuchte Größe durch „mâl" bezeichnet, aber diese Bezeichnung kommt schon bei ALKHWARIZMI vor (siehe z. B. die ROSENsche Ausgabe seiner Algebra, S. 39 des arabischen Textes). Aus diesem Grunde wird in der von LIBRI (*Histoire des sciences mathématiques en Italie* I, S. 253—289) herausgegebenen *Liber MAUMETI filii MOYSI ALCHOARISMI de algebra et almuchabala* das Wort „census" als Bezeichnung nicht nur für $x^2$ sondern mitunter auch für die gesuchte Größe selbst angewendet (siehe S. 276—277, 278—279); an den entsprechenden Stellen der von BONCOMPAGNI 1851 herausgegebenen *Liber qui secundum Arabes vocatur algebra et almucabala* steht dagegen nicht „census" sondern „multitudo". HANKEL (*Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter*, S. 260) gibt an, daß bei den Arabern das Wort „mâl" häufig die Unbekannte selbst bezeichnet, und in der Tat kommt diese Bezeichnung auch bei EL-HASSAR vor (siehe SUTER, *Das Rechenbuch des ABU ZAKARIJA EL-HASSAR*; Biblioth. Mathem. **2**₃, 1901, S. 29 Z. 4 v. u.). G. ENESTRÖM.

---

**1 : 735, 736, 744, 748,** siehe BM **1**₃, 1900, S. 500. — **1 : 749,** siehe BM **1**₃, 1900, S. 268. — **1 : 752,** siehe BM **6**₃, 1905, S. 104. — **1 : 753,** siehe BM **5**₃, 1904, S. 408—409. — **1 : 754,** siehe BM **5**₃, 1904, S. 409; **6**₃, 1905, S. 104.

---

**1:754.** Das in BM $6_3$, 1905, S. 104 besprochene Rechenrätsel aus der Schrift *Liber algorismi de pratica arismetrice* findet sich schon zum Teile wörtlich gleichlautend in einem von E. Dümmler (Zeitschr. f. deutsch. Altert. **23**, 1879, S. 261 f.) aus einer Veroneser Handschrift des 9. Jahrhunderts veröffentlichten Gedichte: „De puero interfecto a colubre", dessen Schlußstrophe lautet:

Si tantum vixisses, fili mi,
quantum vixisti, dulcissime,
iterum tantum et medium,
annumque unum expleveras,
centum annorum extiteras.

Ganz ähnlich lautet auch eine Aufgabe der „Propositiones ad acuendos sensus iuvenum" (Alcuini *Opera* ed. Frobenius II, 447, n. 44): De salutatione cuiusdam senis ad puerum. Quidam senior salutavit puerum, cui dixit: Vivas fili, vivas (inquit) quantum vixisti, et aliud tantum, et ter tantum, addatque tibi Deus unum de annis meis, et impleas annos centum. Solvat qui potest, quot annorum tunc tempore ipse puer erat. Ambros Sturm.

---

**1:756.** In der Bemerkung: „Dagegen kennen wir die Namen westarabischer Schriftsteller, welche vor dem Ende des XIII. S. — ob vor oder nach dem Aufenthalte Gerhards von Cremona in Toledo wissen wir nicht — lebten und welche ähnlich verfuhren" wäre es meines Erachtens angebracht, die (selbstverständlich an sich richtige) Einschaltung „ob vor oder nach dem Aufenthalte des Gerhards von Cremona in Toledo wissen wir nicht" zu streichen, weil der Leser dadurch angeregt wird, zwei Sachen zu verknüpfen, die kaum etwas miteinander zu tun haben. Die Namen, die in der Bemerkung angedeutet werden, sind, wie aus dem folgenden hervorgeht, Ibn Almuni'm und Alaḥdab, aber von diesen zwei Schriftstellern wissen wir nur, daß sie älter als Ibn Albanna waren, also vor dem Ende des 13. Jahrhunderts lebten. Wenn es auch richtig wäre, daß die zitierten Worte des Ibn Chaldun, die Herr Cantor selbst mit Recht als „dunkel" bezeichnet, auf Gedächtnisverse und algebraische Zeichen hinweisen, so hat man darum gar keinen besonderen Grund anzunehmen, daß die zwei Schriftsteller vor oder gleichzeitig mit Gherardo Cremonese lebten, denn die Vorlage des Gherardo (oder richtiger des Pseudo-Gherardo, denn, wie Herr A. A. Björnbo oben [S. 239—241] hervorgehoben hat, ist es wenig wahrscheinlich, daß Gherardo der wirkliche Übersetzer war) könnte sehr wohl aus einer ganz anderen Quelle geschöpft sein. Dies steht Herr Cantor auch selbst zu, denn am Ende der Seite 756 erklärt er, daß seine Annahme in betreff der Quelle der soeben erwähnten Vorlage des Gherardo nur dann stichhaltig ist, „wenn der Beweis erbracht werden könnte, daß diese Schriftsteller bis auf das XII. S. ... zurückgreifen". — Dann sollten auch Z. 8—9 v. u. die Worte: „in mindestens mittelbarer Abhängigkeit von Ibn Almuni'm und Alaḥdab" modifiziert werden, denn diese zwei Schriftsteller könnten sehr wohl, auch wenn sie vor Gherardo lebten, die genannte Vorlage oder eine andere ähnliche Schrift benutzt haben. — Nach einer Vermutung des Herrn Suter sollte Ibn Almuni'm mit einem etwa um 1150 lebenden sicilianischen Gelehrten identisch sein (siehe *Die Mathematiker und Astronomen der Araber*, Leipzig 1900, S. 217), aber dies ist lediglich eine Vermutung, und über Alaḥdab hat Herr Suter gar keine Aufschlüsse geben können. G. Eneström.

---

**1:756, 757, 767,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 500—501. — **1:794,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:804, 805, 807, 808, 812, 823, 852,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268—269. — **1:853,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501. — **1:854,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 324; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 206; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 104. — **1:855,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501.

---

1:856. Die Bemerkung: „Andere Algorithmiker aus der Zeit, welche wir hier besprechen, also bis etwa zum Jahre 1200, sind ... im Drucke nicht veröffentlicht worden" bezieht sich wohl auf den Zeitpunkt der Veröffentlichung der *ersten* Auflage des ersten Bandes der *Vorlesungen*. Später, aber jedenfalls vor Dezember 1893, hat A. Nagl in seiner Abhandlung: *Über eine Algorismus-Schrift des XII. Jahrhunderts und über die Verbreitung der indisch-arabischen Rechenkunst und Zahlzeichen im christlichen Abendlande;* Zeitschr. für Mathem. **34,** 1889, Hist. Abt. S. 129—146, 161—170 (vgl. Cantor, *Vorles. üb. Gesch. der Mathem.* II², S. 419) ein Bruchstück aus einer anonymen Algorismus-Schrift des 12. Jahrhunderts veröffentlicht. Nach dem Erscheinen der 2. Auflage des 1. Bandes der *Vorlesungen* hat M. Curtze diese Algorismus-Schrift vollständig herausgegeben (*Über eine Algorismus-Schrift des XII. Jahrhunderts;* Abhandl. zur Gesch. der Mathem. **8,** 1897, S. 1—27). Die Frage, wer diese Schrift verfaßt hat, ist noch nicht erledigt (vgl. Eneström, Biblioth. Mathem. $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 312; Tannery, Biblioth. Mathem. $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 416).

G. Eneström.

---

**2:7,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351.

---

2:8. Herr Cantor gibt die Worte: „de tractatu binomiorum et recisorum" durch: „von der Behandlung der mit ganzen Zahlen verbundenen Wurzelgrößen" wieder. Aber „binomium" und „recisum" bei Leonardo Pisano ist genau was Herr Cantor im 1. Bande der *Vorlesungen* (S. 255, 332) „Binomiale" und „Apotome" nennt, also Größen von der Form $a \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{b} - a$ oder $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$. Die Übersetzung „mit ganzen Zahlen" ist folglich nicht ganz genau, vielmehr sollte man „mit rationalen Zahlen oder mit anderen Wurzelgrößen (additiv oder subtraktiv)" sagen.

G. Eneström.

---

**2:8, 10,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501—502. — **2:14—15,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 200; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 208—209. — **2:20,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **2:25,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 274. — **2:30,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 105. — **2:31,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351—352; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239—240.

2:31. Im Vorübergehen wird erwähnt, daß der 14. Abschnitt des *Liber abbaci* Betrachtungen über Irrationalzahlen enthält, welche ziemlich genau den Gang von Euklids X. Buche verfolgen. Meines Erachtens haben diese Betrachtungen ein besonderes literarisches Interesse, denn ich halte es für wahrscheinlich, daß sie mit dem von Boncompagni (*Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano*, Roma 1854, S. 241, 248) erwähnten Kommentar zum 10. Buche der Elementa identisch sind. Daß Leonardo Pisano um das Jahr 1225 einen solchen Kommentar verfaßt hat, deutet er im Anfange seiner Schrift *Flos* an (siehe *Scritti*, ed. Boncompagni, II S. 228: „X^m librum glosare incepi"), und aus derselben Schrift bekommt man Aufschlüsse über den Inhalt des

Kommentars. Nun teilt Leonardo selbst in den ersten Zeilen des *Liber abbaci* mit, daß er bei der Bearbeitung der neuen Auflage von 1228 Zusätze gemacht hat, und, wie oben angegeben wurde, bin ich der Ansicht, daß sich gerade im 14. Abschnitt (S. 358—378 des 1. Bandes der *Scritti*) ein solcher Zusatz findet, der den einige Jahre früher verfaßten Kommentar zum 10. Buche der Elementa enthält. In der Tat stimmt der betreffende Teil des 14. Abschnittes inhaltlich sehr gut mit dem Referate im *Flos* überein. Beiläufig möchte ich hinsichtlich der Terminologie darauf hinweisen, daß einige griechische Lehnwörter, freilich mehr im Vorübergehen, im *Flos* gebraucht sind, die ich im *Liber abbaci* nicht wiedergefunden habe, nämlich „aloge", „paralilogrammum", „apothami", „tetragonum"; dagegen kommt „riti" (ῥητή) an beiden Stellen vor. Diese Lehnwörter können vielleicht einen Fingerzeig geben, welche Euklid-Übersetzung Leonardo zur Verfügung hatte. G. Eneström.

**2 : 32,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 105. — **2 : 34,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144.

2 : 34. Es wird angegeben, welcher Kunstausdrücke sich Leonardo Pisano für $x^2$, $x$ und die Gleichungskonstante (die übrigens von ihm auch *denarius* und *dragma* genannt wird) bedient, aber auf die Frage: „welche Terme hat Leonardo für die höheren Potenzen angewendet?" findet man in den *Vorlesungen* keine Antwort. Indessen ist diese Frage nicht ganz ohne Interesse, und sie ist leicht zu beantworten, wenn man die Seiten 445—459 der Boncompagnischen Ausgabe des *Liber abbaci* einsieht. Die betreffenden Kunstwörter sind: *cubus* für $x^3$ (siehe z. B. S. 446), *census census* für $x^4$ (siehe z. B. S. 446), *census census census* oder *cubus cubi* für $x^6$ (siehe z. B. S. 447) und *census census census census* für $x^8$. Die Angabe von Hankel (*Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter*, Leipzig 1874, S. 264), daß bei den „nach arabischen Quellen arbeitenden älteren italienischen Algebraikern" quadratocubus für $x^6$ und cubo-cubus für $x^9$ benutzt wird, ist also ungenau. Dagegen scheint Leonardo keine Kunstwörter für $x^5$ oder $x^7$ angewendet zu haben, und zwar aus dem Grunde, weil keine der von ihm gelösten Probleme zu Gleichungen führen, worin $x^5$ oder $x^7$ vorkommen.

Ich füge hinzu, daß bei Leonardo „census" nicht immer $x^2$, sondern zuweilen die gesuchte Größe selbst bedeutet (siehe z. B. a. a. O. S. 422) ganz wie das „mâl" der arabischen Mathematiker (vgl. oben S. 307 die Bemerkung zu **1** : 723). G. Eneström.

**2 : 37,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 105. — **2 : 38,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 39,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 209. — **2 : 41,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 51,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 106. — **2 : 53,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 201. — **2 : 57,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 59,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502.

2 : 59—60. Herr Cantor bemerkt ganz richtig, daß die Anfangsworte: „Numerorum sunt IX, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et est prima unitatis" der hier erwähnten Handschrift: *Algorismus Jordani* weder mit denen der Arithmetik des Jordanus noch mit denen des *Algorithmus demonstratus* übereinstimmen. Auf der anderen Seite stimmen diese Worte mit dem Anfang des von Curtze irrigerweise als eine Handschrift des *Algorithmus demonstratus* be-

zeichneten Cod. Dresd. Db. 86 (vgl. Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, S. 2, Fußnote 2) überein, wenn man vor „Numerorum" das Wort „Figurae", das nötig ist, um den Passus verständlich zu machen, hinzufügt. Die Annahme, daß gerade der Cod. Dresd. Db. 86 den echten Algorismus des JORDANUS enthält, würde durch den jetzt erwähnten Umstand an Wahrscheinlichkeit gewinnen, wenn es möglich wäre, die von mir a. a. O. der Biblioth. Mathem. angeführten Gegengründe zu entkräften. Für diesen Zweck ist indessen die Auffindung der von CHASLES benutzten Handschrift und eine nähere Untersuchung des von WAPPLER erwähnten Cod. Dresd. C. 80 nötig. G. ENESTRÖM.

---

**2 : 63,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 206. — **2 : 70,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 417. — **2 : 73, 82, 87, 88, 89, 90,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502—503. — **2 : 91—92,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 409—410. — **2 : 97,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2 : 98—99,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 269—270; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 106—107. — **2 : 100,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2 : 101,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325. — **2 : 104—105,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 397—398. — **2 : 111,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 116,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406.

---

2 : 117. Herr CANTOR schaltet hier eine Frage ein, ob das Wort „irrationalis" schon vor GHERARDO CREMONESE in mathematischem Zusammenhange irgendwo vorkommt. Hierauf kann geantwortet werden, daß das Wort „irrationalis" schon bei CASSIODORIUS in mathematischer Bedeutung angewendet wird, und zwar zunächst in bezug auf geometrische Größen. Die Definition des CASSIODORIUS lautet: „irrationales [magnitudines sunt] quarum mensurae quantitas cognita non habetur", während rationale Größen als solche „quarum mensuram scire possumus" bezeichnet werden (siehe V. MORTET, Revue de philologie $\mathbf{24}_2$, 1900, S. 280). G. ENESTRÖM.

---

**2 : 117—118,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 107. — **2 : 122,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503—504. — **2 : 126,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 210. — **2 : 127,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2 : 128,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2 : 132,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 515—516. — **2 : 143,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2 : 155,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 410—411. — **2 : 157, 158,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352.

---

2 : 160—162. Aus einer von LIBRI im Auszug veröffentlichten anonymen Schrift teilt Herr CANTOR hier einige Gleichungen nebst ihren Lösungen mit, nämlich

(1) $8x^3 = 5x + 16,$ Lösung $x = \frac{5}{16} + \sqrt{2\frac{25}{256}}$

(2) $8x^3 = 9x^2 + 12,$ „ $x = \frac{9}{16} + \sqrt{1\frac{209}{256}}$

(3) $8x^3 = 9x^2 + 4x + 12,$ „ $x = \frac{9}{16} + \sqrt{2\frac{81}{256}}$

(4) $x^3 + 60x^2 + 1200x = 4000,$ „ $x = \sqrt[3]{12\,000} - 20$

(5) $x^4 + 80x^3 + 2400x^2 + 32\,000x = 96\,000,$
Lösung $x = \sqrt[4]{256\,000} - \sqrt[4]{400}$

(6) $x^4 + 28x^2 + 720x = 20x^3 + 1800,$ „ $x = \sqrt{43} - \sqrt{18} + 5$

(7) $x^5 + 100\,x^4 + 4000\,x^3 + 80\,000\,x^2 + 800\,000\,x = 1\,953\,632,$

Lösung $x = \sqrt{5\,153\,632} - \sqrt{8000}.$

Herr Cantor weist nach, wie man die Lösung der Gleichung (6) aus dem betreffenden Probleme vermittels einer quadratischen Gleichung erhalten kann, und macht darauf aufmerksam, daß in betreff der Gleichungen (4), (5), (7) die angegebenen Wurzelwerte tatsächlich den Gleichungen genügen, obgleich die Regeln, wodurch sie erhalten wurden, offenbar falsch sind.

Ich erlaube mir zwei Bemerkungen hinzuzufügen, die nicht ganz ohne Interesse sein dürften.

1. Die Lösungen der Gleichungen (1), (2), (3) sind falsch, nicht nur in dem Sinne, daß die in der anonymen Schrift vorkommenden Regeln unrichtig sind, sondern auch so, daß die Wurzelwerte *nicht* den Gleichungen genügen. Setzt man

$$f_1(x) = 8\,x^3 - 5\,x - 16,\ f_2(x) = 8\,x^3 - 9\,x^2 - 12,$$
$$f_3(x) = 8\,x^3 - 9\,x^2 - 4\,x - 12,$$

so findet man leicht, daß

$$f_1(1) = -13,\ f_1\left(\frac{3}{2}\right) = +3\tfrac{1}{2},\ f_2(1) = -13,\ f_2\left(\frac{7}{4}\right) = +3\cdot 3,$$
$$f_3(1) = -17,\ f_3(2) = +8,$$

woraus folgt, daß wenn man die Wurzeln der Gleichungen (1), (2), (3) beziehungsweise $x_1$, $x_2$, $x_3$ nennt,

$$x_1 < 1\cdot 5,\ x_2 < 1\cdot 75,\ x_3 < 2,$$

während die angegebenen Wurzelwerte beziehungsweise $1\cdot 76$, $1\cdot 91$, $2\cdot 08$, also sämtlich zu groß, sind.

2. Die Gleichungen (4), (5), (7) beziehen sich auf Zinseszinsprobleme, die zu den Gleichungen

(A) $100\left(1 + \frac{x}{20}\right)^3 = 150,$ also $x = \sqrt[3]{12\,000} - 20$

(B) $100\left(1 + \frac{x}{20}\right)^4 = 160,$ „ $x = \sqrt[4]{256\,000} - 20$

(C) $100\left(1 + \frac{x}{20}\right)^5 = 161\,051,$ „ $x = \sqrt[5]{5\,153\,632} - 20$

führen. Da nun der anonyme Verfasser überall das erste Glied der Wurzel richtig angibt, so scheint es, als ob er zu seinen Lösungen dadurch gekommen war, daß er von den Gleichungen (A), (B), (C) ausging. Verfehlt ist dagegen auch hier sein Versuch, die Zahlen unter den Wurzelzeichen aus den Koeffizienten der Gleichungen herzuleiten, und noch mehr sein Verfahren, $\sqrt{400}$ oder $\sqrt[3]{8000}$ statt 20 zu setzen und dann 400 beziehungsweise 8000 durch die Koeffizienten der Gleichungen auszudrücken. G. Eneström.

**2 : 163,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504.

2 : 163. Der Passus: „Was soll man aus diesen tollen und doch die jedesmaligen Zahlenbeispiele befriedigenden Wurzelwerten machen?“ soll unter Bezugnahme auf die vorangehende Bemerkung modifiziert werden.

G. Eneström.

2 : 164. Es ist mir unbekannt, woher Herr Cantor die Angabe: „Paolo Dagomari hat zuerst unter den Nicht-Arabern . . . einen *Almanach* unter dem Titel *taccuino* veröffentlicht" entnommen hat; möglicherweise ist seine Quelle die von ihm zitierte Arbeit von B. Boncompagni, wo S. 353 und 392 Notizen von F. Villani („hic [= Dagomari] nostrorum temporum primus tacuinum composuit") und L. Ximenes („[Dagomari] fosse il primo a comporre Taccuino") abgedruckt sind. Aber diese Notizen sind unbestätigt; Libri sagt nur: „ce fut lui qui publia, le premier, *en Italie* un almanach qu'on appelait alors *Taccuino*", und bekanntlich hat Jakob ben Machir schon 1300 einen Almanach verfaßt (Paolo Dagomari war 1281 geboren und die Notiz von Ximenes scheint sich auf eine nicht lange Zeit vor 1366 verfaßte Schrift zu beziehen). — Bezieht sich dagegen „zuerst" auf die Worte „unter dem Titel *taccuino*", so erlaube ich mir auf die Biblioth. Mathem. $1_{32}$, 1899, S. 119 zu verweisen, woraus hervorzugehen scheint, daß das Wort „*taccuinum*" schon um das Jahr 1267 in Europa eine bekannte Benennung für Almanach war. G. Eneström.

**2 : 166,** siehe BM $1_3$, 1900, S. 504. — **2 : 175,** siehe BM $3_3$, 1902, S. 140.

2 : 206. Z. 1 scheint mir das Wort „Erfinder" nicht ganz angebracht zu sein, denn aus den in der Fußnote 1) angeführten Worte geht wohl nicht hervor, daß Prosdocimo de' Beldomandi die Proben durch entgegengesetzte Rechnungsverfahren als eine Erfindung des Sacrobosco betrachtete, sondern nur, daß er diese Proben aus dem *Algorismus de integris* des zitierten Verfassers entnommen hatte. In Wirklichkeit ist Sacrobosco natürlich gar nicht Erfinder dieser Proben. Herr Cantor macht selbst S. 65 darauf aufmerksam, daß im *Algorithmus demonstratus*, den er Jordanus Nemorarius zuschreibt, Multiplikation und Division sich gegenseitig als Probe dienen; in betreff der Division findet sich dieselbe Regel bei Leonardo Pisano (*Liber abbaci*, ed. Boncompagni, Roma 1857, S. 47, Z. 3—8), und in der sicherlich von Sacrobosco nicht beeinflußten Schrift: *Joannis Hispalensis Liber algorismi de pratica arismetrice* werden die Proben durch entgegengesetzte Rechnungsverfahren ausdrücklich bei Addition, Subtraktion, Verdoppelung, Halbierung, Multiplikation und Division gelehrt (siehe die Boncompagnische Ausgabe, Roma 1857, S. 32, 35, 36, 38, 41, 48). G. Eneström.

**2 : 210,** siehe BM $2_3$, 1901, S. 352—353. — **2 : 218,** siehe BM $4_3$, 1903, S. 284. — **2 : 219,** siehe BM $2_3$, 1901, S. 353. — **2 : 229, 242, 243,** siehe BM $1_3$, 1900, S. 504—505. — **2 : 253,** siehe BM $2_3$, 1901, S. 353. — **2 : 273,** siehe BM $1_3$, 1900, S. 505. — **2 : 274,** siehe BM $3_3$, 1902, S. 325. — **2 : 281,** siehe BM $5_3$, 1904, S. 411. — **2 : 282, 283,** siehe BM $1_3$, 1900, S. 506; $2_3$, 1901, S. 353—354. — **2 : 284, 286, 287, 289, 290, 291,** siehe BM $1_3$, 1900, S. 506—507. — **2 : 296,** siehe BM $2_3$, 1901, S. 354. — **2 : 313,** siehe BM $1_3$, 1900, S. 507. — **2 : 317,** siehe BM $5_3$, 1904, S. 69.

2 : 325. In betreff des von Luca Paciuolo gemachten Versuches, die Exponentialgleichung $x\,2^x = 30$ zu lösen, bemerkt Herr Cantor: „Nun schließt aber Paciuolo, man sieht nicht warum, der Gewinn der noch zu machenden $x$ Reisen müsse $x(24 + 8x)$ sein". Aber die Erklärung dieses Verfahrens liegt ja sehr nahe; der Gewinn ist genau $x(24 + 8x)$ für $x = 0$ und $x = 1$, und wir haben also hier mit einem einfachen Interpolationsverfahren zu tun

(vgl. Cossali, *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' algebra* I, Parma 1797, S. 277—278). Übrigens würde man ein noch besseres Resultat bekommen, wenn man $x(24+8x)$ mit $\frac{693}{1000}$ ($=\log_e 2$) multipliziert, wie man unmittelbar sieht, wenn man in die ursprüngliche Gleichung $3+x$ statt $x$ setzt und $2^x$ in eine Exponentialreihe entwickelt. G. Eneström.

---

**2 : 328**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140; **4**$_3$, 1903, S. 285. — **2 : 334**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2 : 353**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507; **4**$_3$, 1903, S. 87. — **2 : 358, 360**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 87.

---

2 : 371. Di un quesito del sig. Eneström su Filippo Frescobaldi (Biblioth. Mathem. 1895, pag. 120) io mi sono a più riprese occupato, senza però mai pervenire ad un risultato sodisfacente, siccbè disperando ormai di ottenerlo, mi limiterò a registrare qui quel pochissimo che mi fu dato di rinvenire.

Al tempo al quale si riferisce la indicazione di Estienne de la Roche si trovano due Filippo Frescobaldi. Di uno, cioè di Filippo di Piero Frescobaldi, si ba soltanto la notizia in una notificazione conservataci nel Codice Magliabecbiano della Biblioteca Nazionale di Firenze, segnato col n° 133 della Cl. XXVI contenente: „Zib. VIIII ex libris Gabellae contractuum Ferd. Leop. dl. Migliore" a pag. 252, intestata „$Q\frac{0}{2}$ Notif. 1533 e 34", ma cbe nulla contiene che possa recar luce al fine desiderato. — Il nome di „Filippo di Niccolajo Frescobaldi" si legge, con la data „XVIIII di Marzo MCCCCLXXI", come quello dello scrittore, alla fine del Cod. 2441 della Bibl. Riccardiana in Firenze, cbe contiene la „Pratica della mercatura scritta da Francesco Balducci Pegolotti" e pubblicata nel Tomo III dell' opera *Della decima e di varie altre gravezze imposte dal comune di Firenze, della moneta e della mercatura de' fiorentini fino al secolo XVI;* Lishona e Lucca (in Firenze per Giuseppe Bouchard) 1765—66. Della quale opera abbiamo voluto riprodurre in-extenso il titolo, per avere occasione di notare cbe vi si contengono preziosissimi materiali per la storia della aritmetica commerciale dal secolo XIII al XVI, e che probabilmente sono quelli ai quali si richiama il de la Roche. Questi in tal caso avrebbe preso il nome dell' amanuense per quello dell' autore. — Il Cod. A. 163 della Biblioteca Marucelliana in Firenze contiene alcune notizie genealogiche della famiglia Frescobaldi, messe insieme dal Salvini, ma cbe non vanno più in là del secolo XV. Antonio Favaro.

---

**2 : 381**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2 : 385**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 81; **4**$_3$, 1903, S. 207. — **2 : 386**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507; **5**$_3$, 1904, S. 306. — **2 : 395**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507—508. — **2 : 399**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 107—108. — **2 : 401, 405, 425**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507.

---

2 : 427. Hier wird angegeben, daß Rudolff für $x$ das Zeichen 𝔛 gebrauchte, also *genau* (siebe S. 242) das Zeichen für die Gleichungskonstante in der Dresdener deutscben Algebra, und daß er für $x^0$ (d. b. die Gleichungskonstante) ϑ, also *genau* das $x$ (siebe S. 242) der Dresdener deutscben Algebra, scbrieb. Es liegt darum sehr nahe zu fragen: „Hat Rudolff absicbtlicb oder unabsichtlich die Bedeutung der Zeichen der Dresdener deutscben Algebra ver-

ändert?" In betreff dieser Frage ist folgendes zu bemerken. Die Angaben über die Zeichen der Dresdener deutschen Algebra hat Herr Cantor korrekt aus der von ihm zitierten Wapplerschen Programmschrift entnommen, und man hat keinen Grund anzunehmen, daß Wappler die Zeichen der betreffenden Handschrift unrichtig wiedergegeben hat. Dagegen sehen bei Rudolff die Zeichen der Gleichungskonstanten und der Unbekannten nicht so aus, wie Herr Cantor angibt; in der S. 427 zitierten Auflage von 1553 ähnelt jenes einem griechischen $\varphi$ und dieses hat die Form ꝛe (vgl. die Tafel S. 191 der Tropfkeschen *Geschichte der Elementar-Mathematik* I, Leipzig 1902). Die Rudolffschen Zeichen stimmen also ziemlich gut mit denen der Dresdener *lateinischen* Algebra überein.

G. Eneström.

---

**2 : 429**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 201—202. — **2 : 430**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 145. — **2 : 440**, siehe BM $\mathbf{4}_3$. 1903, S. 285. — **2 : 442**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325. — **2 : 449**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2 : 454**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 242. — **2 : 474, 480**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140—141. — **2 : 481**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 508. — **2 : 482**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 508; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 240. — **2 : 484**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 486, 489, 490**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2 : 497**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87. — **2 : 509**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270, 509. — **2 : 510**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2 : 512**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 514, 516, 517**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2 : 530**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354—355; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 532, 535, 541, 548, 549**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509—510. — **2 : 550**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 355. — **2 : 554**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510. — **2 : 555, 565, 567, 568**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 285—286. — **2 : 569**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510. — **2 : 572—573**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 576**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 355—356. — **2 : 579**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 145. — **2 : 580—581**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 207. — **2 : 582**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510. — **2 : 583**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 356. — **2 : 585**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 69—70. — **2 : 592**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2 : 594**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270. — **2 : 597**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2 : 599—600**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2 : 602**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270. — **2 : 603—604**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270—271; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 108. — **2 : 611**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 356—357. — **2 : 612**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2 : 613**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 306. — **2 : 614**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 617, 619**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 108—109. — **2 : 620**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 621, 623**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146—147. — **2 : 632**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 109.

---

**2** : 634. Die Angabe, daß Viète „die Hypotenuse des ersten Dreiecks $A$, die des $n$-ten Dreiecks $A^n$ nannte" ist natürlich wörtlich genommen unrichtig, da bei Viète überhaupt keine Exponentenzeichen vorkommen. Aber abgesehen hiervon ist die Angabe dennoch ein wenig irreleitend, denn der Leser kann kaum umhin, daraus zu schließen, daß Viète wirklich irgend ein Zeichen für die Hypotenuse des $n$-ten Dreiecks benutzte. Dies ist indessen nicht der Fall; der *in Zeichensprache* übersetzte Satz des „Consectarium generale" bezieht sich nur auf den Spezialfall $n = 5$, so daß die Angabe des Herrn Cantor eigentlich lauten würde: „Viète nannte die Hypotenuse des ersten Dreiecks $A$, die des fünften $Aqc$". Dagegen ist es wahr, daß Viète *in Worten* den allgemeinen Satz angab, und zwar entspricht folgender Passus bei Viète der Cantorschen Angabe: „Si qua potestas componatur a binomia radice ... erit hypotenusa similis ipsi potestati".

G. Eneström.

---

**2 : 637.** Hier wäre es meines Erachtens angebracht zu erwähnen, daß Viète in der Abhandlung *De aequationum recognitione et emendatione* eine all-

gemeine Potenzbezeichnung angewendet hat. Eine beliebige Potenz von $A$ drückt er durch „A potestas" aus, und eine andere Potenz von $A$, die niedriger als die erste, aber sonst ganz beliebig ist, heißt bei ihm „A gradus". So z. B. kommt bei Viète (*Opera mathematica*, ed. F. van Schooten, S. 107) folgende Formel vor:

$$A \text{ potestas} + \frac{E \text{ potestate} - A \text{ potestate}}{E \text{ gradui} + A \text{ gradu}} \text{ in } A \text{ gradum, aequ. } Z \text{ homogeneo,}$$

die in moderner Zeichensprache lauten würde:

$$A^m + \frac{E^m - A^m}{E^n + A^n} A^n = Z.$$

Die Bezeichnung des Viète ist freilich sehr unbequem, um so mehr, weil er nur *zwei* gleichzeitig vorkommende allgemeine Potenzen durch einfache Zeichen ausdrücken kann. Auf der anderen Seite dürfte dies der erste Versuch sein, beliebige Potenzen zu bezeichnen, und dieser Versuch verdient darum besondere Aufmerksamkeit. G. Eneström.

---

**2:638**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 147. — **2:642, 643**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271. — **2:655**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901. S. 357. — **2:656**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 286. — **2:659, 660**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 147—148. — **2:665**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271. — **2:669**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 203. — **2:674**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88. — **2:683**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2:693**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 287. — **2:700, 701, 703, 704, 705**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271—273. — **2:715**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 412. — **2:719**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357. — **2:720**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 287. — **2:721**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2:742**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142. — **2:746**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2:747**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 173; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 225. — **2:749**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88. — **2:766**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142; $\mathbf{5}_3$. 1904, S. 412—413 — **2:767**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148, 357—358. — **2:770**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 208. — **2:772, 775**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 358—359. — **2:777**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 204. — **2:783**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88—89. — **2:784**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2:793**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307.

---

2 : 793. In betreff der Angabe, daß die zweite lateinische Ausgabe der Descartesschen Geometrie im Jahre 1659 in zwei Bänden erschien, ist eine kleine Ergänzung angebracht. Am Ende des 2. Bandes findet sich eine (von Herrn Cantor nicht erwähnte) Abhandlung mit dem Titel: „Francisci à Schooten, Leidensis, dum viveret in academia Lugduno-Batava matheseos professoris, Tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebraïco. In lucem editus à Petro à Schooten". Aber im Jahre 1659 lebte Franciscus van Schooten noch, und der zweite Band muß also später erschienen sein. In der Tat wurde dieser Band zuerst 1661 herausgegeben. G. Eneström.

---

2 : 793—794. Z. 8 v. u. ist ɀ statt ℛ zu lesen (siehe oben die Bemerkung zu 2 : 427). Die Annahme, daß Descartes das ɀ früherer deutscher Werke irrig als $x$ gelesen und durch diesen Buchstaben zu wiederholen gedacht hatte, habe ich immer als höchst unwahrscheinlich betrachtet (vgl. z. B. Biblioth. Mathem. 1899, S. 91); jetzt kann wohl diese Annahme als definitiv widerlegt angesehen werden, nachdem man weiß, daß Descartes selbst im Jahre 1619 nicht $x$ sondern genau das Zeichen ɀ der deutschen Cossisten gebraucht hat (siehe seinen Brief an Isaac Beeckman vom 26. März 1619 abgedruckt im

Nieuw archief voor wiskunde [Amsterdam] $7_2$, 1905, S. 81—83; im Abdruck ist aus typographischen Gründen das Zeichen ♃ angewendet). Dadurch dürfte auch die Behauptung, das Zeichen ꝛe „sei lange Zeit schon als $x$ gelesen worden, als DESCARTES der neuen Deutung volles Bürgerrecht verlieh" (siehe TROPFKE, *Geschichte der Elementar-Mathematik* I, S. 195) als unhistorisch erwiesen sein. Die einzige meines Erachtens natürliche Erklärung der Einführung des Zeichens $x$ habe ich schon in der Biblioth. Mathem. 1884 (Sp. 43) angegeben. Ich habe nämlich daselbst bemerkt, daß DESCARTES zuerst $z$, dann $y$ und in dritter Linie $x$ als Zeichen für die Unbekannte einführte, und daraus gefolgert, daß er absichtlich die *letzten* Buchstaben des Alphabets als Zeichen unbekannter Größen benutzt hat. Daß gerade $x$ und nicht $z$ vorherrschend geworden ist, kann möglicherweise auf typographischen Gründen beruhen — in der französischen und noch mehr in der lateinischen Sprache kommt ja z seltener als x vor, so daß der Vorrat von x-Typen größer als der Vorrat von z-Typen sein muß. G. ENESTRÖM.

---

2 : 795. Die hier ausgesprochene Vermutung: „DESCARTES dürfte [in betreff der Erwähnung nicht nur reeller sondern auch imaginärer Wurzeln] als Schüler von GIRARDS *Invention nouvelle en l'algèbre* sich verrathen" ist kaum richtig. GIRARDS Arbeit erschien bekanntlich 1629, aber schon am 8. Oktober 1628 hatte der niederländische Gelehrte ISAAK BEECKMAN in seinem Tagebuche einiges über den Inhalt der verschollenen DESCARTESschen *Algebra generalis* notiert, darunter auch folgendes (das Zitat entnehme ich einer freundlichen Mitteilung des Herrn C. DE WAARD): „Nominat [DESCARTES] quasdam radices veras, quasdam implicitas, id est minores quam nihil, quasdam imaginarias, id est omnino inexplicabiles".

---

2 : 797—798. Die Bemerkung (S. 797): „Wir haben schon (S. 795) darauf aufmerksam gemacht, daß DESCARTES die *Invention nouvelle en l'algèbre* zuverlässig kannte. Die gleiche Überzeugung gewinnt man aus einem Briefe, welchen DESCARTES unter dem 1. Februar 1640 an JACOB VAN WASSENAER richtete", sowie die damit zusammenhängende Bemerkung (S. 798): „Hat DESCARTES ihn vielleicht auch nicht bewußt von GIRARD entlehnt, so hält es doch schwer, nicht an ein unbewußtes Nachwirken des früher Gelesenen zu denken" möchte ich streichen. Es handelt sich nämlich um den Satz

$$\sqrt[3]{a + \sqrt{b}} = \alpha + \sqrt{\beta}, \quad \text{wo} \quad \sqrt[3]{a^2 - b} = \alpha^2 - \beta,$$

und man weiß jetzt, daß DESCARTES sich schon 1619 mit Ausziehen von Wurzeln aus irrationalen Polynomen beschäftigte (siehe seinen Brief an ISAAC BEECKMAN vom 26. März 1619; Nieuw archief voor wiskunde $7_2$, 1905, S. 81—82); noch dazu notierte ISAAC BEECKMAN am 8. Oktober 1628 in seinem Tagebuche (vgl. oben): „Irrationales numeros qui aliter explicari non possunt, explicat [DESCARTES] per parabolam" und die Worte „per parabolam" machen es wahrscheinlich, daß es sich hier um Ausziehung von Kubikwurzeln handelt (vgl. DESCARTES *Géométrie*, ed. Paris 1886, S. 75, 77). Aber weder 1619 noch 1628 konnte DESCARTES die 1629 erschienene GIRARDsche *Invention nouvelle en l'algèbre* benutzen. G. ENESTRÖM.

---

**2 : 798, 799,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307. — **2 : 802,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 208. — **2 : 812,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 37. — **2 : 820,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307. — **2 : 825,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2 : 832,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 203—204; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 211. — **2 : 840,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148—149. — **2 : 843,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 328. — **2 : 850,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 109—110. — **2 : 856, 865,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149. — **2 : 876, 878, 879,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511. — **2 : 891,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2 : 898,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 37, 208. — **2 : 901,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511. — **2 : 919,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 204. — **2 : VIII** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142. — **2 : IX, X** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511—512.

---

**3 : 9,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359. — **3 : 10,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 518; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 211. — **3 : 11,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3 : 12,** 17, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512. — **3 : 22,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3 : 24,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3 : 25,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209, 399. — **3 : 26,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359. — **3 : 45—48, 49, 50,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512—513. — **3 : 70,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 360. — **3 : 82,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 308. — **3 : 100,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149.

---

**3** : 102. Herr Cantor gibt das Todesjahr aber nicht das Geburtsjahr von Jean Prestet an. Nach Poggendorff war dieser etwa 1648 geboren (*Biographisch-literarisches Handwörterbuch* II, Sp. 522), und eine noch genauere Auskunft hierüber gibt Prestet selbst im Vorworte zum 1. Bande der *Nouveaux élémens des mathématiques* (Paris 1689). Er teilt nämlich mit, daß er seine *Elémens des mathématiques*, die 1675 erschienen, „à l'âge environ de vint-deux ou de vint-trois ans" veröffentlicht hatte; er muß also 1652 oder möglicherweise 1653 geboren sein. Der Umstand, daß die *Elémens des mathématiques* von einem so jungen Verfasser herrühren, dürften für die Beurteilung des Buches nicht ganz ohne Interesse sein.

Das Rekursionsverfahren, das Prestet für $S_m = \Sigma x^m$ angibt (*Elémens des mathématiques*, Paris 1675, S. 178; *Nouveaux élémens des mathématiques* 1, Paris 1689, S. 405), entspricht in moderner Zeichensprache genau der Formel

$$(m+1)S_m + \frac{(m+1)m}{1.2} S_{m-1} + \cdots + (m+1)S_1 + S_0 = (x+1)^{m+1} - 1.$$

In den *Elémens des mathématiques* (S. 181) schreibt Prestet die Erfindung des Rekursionsverfahrens Pascal zu („Monsieur Paschal à qui est deuë l'invention du Probleme et des Corollaires precedens"). G. Eneström.

---

**3 : 112,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209—210.

---

**3** : 112. Mit transcendenten Gleichungen hat sich Leibniz wohl zum ersten Male in seinem Briefe an Oldenburg vom 21. Juni 1677 beschäftigt (siehe z. B. *Commercium epistolicum*, éd. Biot et Lefort, S. 153, 154). Fünf Jahre später erwähnte er eine Gleichung dieser Art in seiner Abhandlung *De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus expressa* (Acta Eruditorum 1682; siehe *Leibnizens Mathematische Schriften*, herausg. von C. I. Gerhardt, V, S. 120), und zwar gerade die Gleichung $x^x + x = 30$, als deren Wurzel er 3 angibt. G. Eneström.

---

**3 : 116,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 117,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 518. — **3 : 123,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 399. — **3 : 124,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 407—408; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 400. — **3 : 126,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 288. — **3 : 131,** siehe

BM $4_3$, 1903, S. 210. — **3:151**, siehe BM $3_3$, 1902, S. 326. — **3:167**, 172—173, siehe BM $4_3$, 1903, S. 400. — **3:174**, siehe BM $2_3$, 1901, S. 149—150. — **3:183**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 432. — **3:188**, siehe BM $3_3$, 1902, S. 241. — **3:201**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 513. — **3:207**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 519. — **3:215**, siehe BM $2_3$, 1901, S. 150. — **3:218**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 513. — **3:220**, siehe BM $3_3$, 1902, S. 326. — **3:224**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 514. — **3:225**, 228, siehe BM $2_3$, 1901, S. 150. — **3:230**, siehe BM $6_3$, 1905, S. 211—212. — **3:232**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 514; $6_3$, 1905, S. 212. — **3:244—245**, siehe BM $5_3$, 1904, S. 205, 413. — **3:246**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 514; $2_3$, 1901, S. 151. — **3:250**, siehe BM $1_3$, 1900, S. 514. — **3:303**, siehe BM $2_3$, 1901, S. 155. — **3:330—331**, siehe BM $3_3$, 1902, S. 241—242. — **3:337**, siehe BM $5_3$, 1904, S. 206. — **3:370—371**, siehe BM $5_3$, 1904, S. 308. — **3:382**, siehe BM $6_3$, 1905, S. 213.

---

**3**:384. Die Bemerkung in der Fußnote 7) ist richtig, aber die Angabe des zitierten Schriftstückes der Bibliothèque anglaise, die *Methodus incrementorum* sei seit April 1713 im Besitze der „Royal society" gewesen, ist meiner Ansicht nach ebenso unrichtig wie die Behauptung desselben Schriftstückes, die *Methodus incrementorum* sei im Jahre 1714 erschienen. Taylor selbst gibt in den Philosophical transactions No. 360, 1719, S. 958 ausdrücklich an, daß die Arbeit seit April 1714 im Besitze der „Royal society" war, und vermutlich beruhen die beiden unrichtigen Jahreszahlen in der Bibliothèque anglaise auf einem Schreib- oder Gedächtnisfehler in betreff des Erscheinungsjahres der *Methodus incrementorum*. Es wird ja eigentlich behauptet, die Arbeit sei etwa ein Jahr vor dem Erscheinen im Besitze der „Royal society" gewesen, und *diese* Angabe stimmt mit der Taylorschen überein.

G. Eneström.

---

**3:408**, siehe BM $6_3$, 1905, S. 213. — **3:447**, 455, siehe BM $2_3$, 1901, S. 151. — **3:473**, siehe BM $2_3$, 1901, S. 154—155; $4_3$, 1903, S. 401. — **3:477**, 479, siehe BM $2_3$, 1901, S. 151—152. — **3:497**, 498, siehe BM $5_3$, 1904, S. 309. — **3:507**, siehe BM $5_3$, 1904, S. 71—72. — **3:521**, siehe BM $2_3$, 1901, S. 441. — **3:535**, siehe BM $4_3$, 1903, S. 401. — **3:536**, siehe BM $5_3$, 1904, S. 206.

---

**3**:560. In betreff der Einführung von Zeichen für arcsin und arctg verweist Herr Cantor auf zwei Abhandlungen von Euler, die beziehungsweise in den Comment. acad. sc. Petrop. **9**, 1737 (gedruckt 1744) und den Nova Acta Eruditorum 1744 erschienen. Aber schon acht Jahre früher hatte Euler eine Arbeit veröffentlicht, wo sich solche Zeichen finden, nämlich die *Mechanica sive motus scientia analytice exposita* (Petropoli 1736), und zwar im 1. Bande S. 184—186 und im 2. Bande S. 138, 303, 313. Diese Stellen sind von großem Interesse, weil sie zeigen, wie Euler stufenweise seine Bezeichnungen verbesserte. Zuerst brauchte er ein Zeichen für arctg, und dazu wählte er (B. 1, S. 184—186) ganz einfach den Buchstaben A, so daß er arctg $t$ durch $At$ bezeichnete („expressio $At$ nobis denotet arcum circuli, cuius tangens est $t$ existente radio $= 1$"). Später hatte er ein Zeichen für arcsin nötig, und dann benutzte er (B. 2, S. 138) ebenfalls den Buchstaben A („arcus cuius sinus est $\frac{x}{a}$ existente toto sinu $= 1$ notetur per A $\frac{x}{a}$"). Aber bald entdeckte er natürlich, daß es unzweckmäßig war, ein und dasselbe Zeichen für zwei Arkusfunktionen anzuwenden, und darum führte er (B. 2, S. 303) für arctg das Zeichen $At$ ein („$At.\frac{q}{B}$ est arcus circuli cuius tangens est $\frac{q}{B}$ existente sinu

toto $= 1^\circ$); dagegen enthält die *Mechanica*, so weit ich entdecken kann, keine entsprechende Bezeichnung für arcsin.

Auch in einer anderen Beziehung ist die *Mechanica* besonders lehrreich, denn sie zeigt deutlich, welch wesentlichen Einfluß auf die Form der Lösung einer Aufgabe die Ungewohnheit, Zeichen für Arkusfunktionen zu benutzen, haben kann. S. 360 des 1. Bandes hat Euler die Differentialgleichung

$$\frac{du}{u^2+m^2} + \frac{dx}{\sqrt{c^2-x^2}} = 0$$

zu integrieren, und obgleich er offenbar weiß, daß die zwei Glieder beziehungsweise Differentiale des $m^{\text{ten}}$ Teiles eines Arcustangens (vgl. S. 363) und eines Arcussinus (vgl. S. 353, 363) sind, benutzt er bei der Integration nur Logarithmen, so daß er zuletzt das Integral ($b$ ist die arbiträre Konstante)

$$u = \frac{b^{2m} + (\sqrt{c^2-x^2} - x\sqrt{-1})^{2m}\, m\sqrt{-1}}{b^{2m} - (\sqrt{c^2-x^2} - x\sqrt{-1})^{2m}}$$

bekommt. Erst in zweiter Linie gibt er etwas weiter unten (S. 363) als Lösung derselben Differentialgleichung:

$$\frac{1}{m}\int \frac{cc.\frac{cdu}{m}}{\frac{c^2u^2}{m^2}+c^2} = C - \int \frac{cdx}{\sqrt{c^2-x^2}},\ \text{in qua}\ \int \frac{cc.\frac{cdu}{m}}{\frac{ccuu}{m^2}+c^2}\ \text{exprimit arcum}$$

$$\text{cuius tangens est}\ \frac{cu}{m}\ \text{et}\ \int \frac{cdx}{\sqrt{c^2-x^2}}\ \text{arcum cuius sinus est} = x.$$

Daß das Integral ohne weiteres unter der Form

$$\frac{1}{m}\operatorname{arctg}\frac{u}{m} + \arcsin\frac{x}{c} = C$$

geschrieben werden konnte, daran dachte Euler damals offenbar gar nicht und zwar nur aus dem Grunde, weil er noch ungewohnt war, sich irgend einiger Zeichen für arctg und arcsin zu bedienen. Ein weiterer Beleg hierfür findet sich S. 128 des 2. Bandes, wo die Differentialgleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

integriert werden soll. Die einfachste Form des Integrals ist natürlich

$$\arcsin\frac{x}{a} = \arcsin t - \arcsin C,$$

aber bei Euler heißt es

$$\sqrt{-1}\ \mathrm{l}\left(\frac{x\sqrt{-1}-\sqrt{a^2-x^2}}{c}\right) = \sqrt{-1}\ \mathrm{l}\ (t\sqrt{-1}-\sqrt{1-t^2}).$$

Erst in einem folgenden Kapitel der *Mechanica* ist Euler so weit gekommen, daß er (S. 303 des 2. Bandes) das Integral einer Differentialgleichung unter der Form

$$\mathrm{l}\,C - \mathrm{l}\,s = \mathrm{l}\sqrt{q^2+B^2} + \frac{a}{4Bk}\ \mathrm{A}t.\frac{q}{B}$$

setzt, wo $\mathrm{A}t$ arctg bedeutet.

Da Herr Cantor in betreff der Zeichen für Arkusfunktionen auf die Petersburger Akademie-Schriften verweist, mag bemerkt werden, daß Euler schon im 8. Bande dieser Schriften (siehe *De constructione aequationum ope*

*motus tractorii, aliisque ad methodum tangentium inversam pertinentibus*; Comment. acad. sc. Petrop. **8**, 1736 [gedruckt 1741], S. 66—85, speziell S. 84—85) das Zeichen $At$ für Arcustangens benutzt hat. Das Integral der Gleichung

$$\frac{-ds}{r} = \frac{dp}{1+pp}$$

gibt er nämlich auf folgende Weise an: „Denotet $\int \frac{ds}{r}$ arcum circuli, cujus tangens sit $q$, posito radio $= 1$; eritque

$$At.b - At.q = At.p.$$"

Jetzt weiß EULER auch mit Arkusfunktionen zu rechnen, denn aus $At.p = b - v$ [d. h. $\operatorname{arctg} p = b - v$] folgert er unmittelbar $p = t.A(b-v)$ [d. h. $p = \operatorname{tg}(b-v)$].

G. ENESTRÖM.

---

**3**:565, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 326—327. — **3**:571, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 327; **5**$_3$, 1904, S. 72. — **3**:578, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 327; **5**$_3$, 1904, S. 309. — **3**:586, 609, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 309—310. — **3**:614, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 89—90. — **3**:616, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 214. — **3**:636—637, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441. — **3**:646—647, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 206—207. — **3**:652, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 446; **5**$_3$, 1904, S. 207. — **3**:660, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441. — **3**:667, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441—442; **5**$_3$, 1904, S. 207—208, 310. — **3**:686, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 208. — **3**:689, 695, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 442. — **3**:736, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 111. — **3**:750, 758, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 446. — **3**:759, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 208. — **3**:760, 766, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 446—447. — **3**:774, 798, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 442—443.

---

**3**:819. Hier wäre eine Verweisung auf Seite 444 sehr erwünscht, und dies um so mehr, weil im Register unter „*Euler-Cramersches Paradoxon*" nur auf Seite 826 hingewiesen wird, so daß man daraus gar nicht sehen kann, daß sich MACLAURIN schon 1720 mit dieser Frage beschäftigt hat.

G. ENESTRÖM.

---

**3**:845, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 447; **3**$_3$, 1902, S. 327—328. — **3**:848, 881, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 443. — **3**:882, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 447; **5**$_3$, 1904, S. 414. — **3**:890, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 401. — **3**:892, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 143. — **3**:IV (Vorwort), siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 443.

---

## Vermischte historische Notizen.

**Zu dem Buche „De superficierum divisionibus" des Muhammed Bagdadinus.** In seiner neuesten Schrift *Die Europäischen Übersetzungen aus dem Arabischen bis Mitte des 17. Jahrhunderts* (Abteilg. B: Übersetzungen von Werken bekannter Autoren, deren Übersetzer unbekannt oder unsicher sind)[1]) betrachtet M. STEINSCHNEIDER den JOHN DEE bloß als Entdecker und Herausgeber[2]) eines alten Ms. der Bibliothek Cotton, die später ins Britische Museum

1) Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien (Philolog.-histor. Klasse) **151**, 1905, p. 41.

2) Der eigentliche Herausgeber ist F. COMMANDINO, der es 1570 in Pesaro im Druck veröffentlicht hat.

überging, während alle Autoren, die bis jetzt über diesen Gegenstand berichtet haben, wie Hankel, Cantor, Heiberg und auch der Schreiber dieses Artikels, John Dee als den Übersetzer dieser Schrift aus dem Arabischen betrachtet haben. Ich hatte schon früher, als ich zum erstenmal die an Commandino gerichtete Vorrede J. Dees las, leise Zweifel empfunden über die Richtigkeit der Behauptung, daß J. Dee diese Abhandlung über die Teilung der Figuren aus dem Arabischen übersetzt habe, aber ich wagte damals noch, weil mir die Beweise fehlten, keinen Widerspruch. Wie ich nun aber die Stelle in Steinschneiders Arbeit las, kam mir der Gedanke wieder an diese Frage und ich entschloß mich, dieselbe doch etwas genauer zu untersuchen und womöglich zur endgültigen Lösung zu bringen.

Zuerst muß ich einen Irrtum J. L. Heibergs richtig stellen. Er sagt in seinen *Literargeschichtlichen Studien über Euklid* (Leipzig 1882, p. 13): „Im Jahre 1563 übersetzte Joh. Dee aus dem Arabischen ein Buch „de divisionibus" von Mahometus Bagdadinus", etc., und bemerkt in einer Note zu dem „Arabischen": „Das wird zwar nirgends ausdrücklich gesagt, wie Gregorius bemerkt; es war aber auch kaum notwendig. Daß Dee das Buch nicht lateinisch vorfand, dürfte aus dem Titel der Ausgabe Commandins zu schließen sein." Hierin liegt der Irrtum Heibergs; er las im Titel (ich weiß nicht in welcher Ausgabe): „Joh. Dee et F. Commandini opera *latine* editus", es heißt aber in der mir vorliegenden Original-Ausgabe vom Jahre 1570 statt latine *in lucem*.

Vielleicht mag dies schon als ein erster Beweis dafür gelten, daß die Arbeit John Dees nicht in einer Übersetzung aus dem Arabischen ins Lateinische bestand. Ein zweiter, allerdings auch nicht entscheidender Beweis mag im Wortlaut der an Commandino gerichteten Vorrede liegen, in der kein Wort von einer Übersetzung steht, wo nur gesagt ist, daß ihm (J. Dee) das sehr unleserlich geschriebene Ms. große Mühe verursacht habe, und wo im weiteren die Stelle vorkommt: „in ipso unde *descripsi* vetustissimo exemplari . . .". Der Hauptbeweis liegt natürlich in der Beantwortung der Frage, ob das Ms. Cotton, jetzt im Brit. Museum, ein lateinisches oder ein arabisches sei. M. Steinschneider sagt nämlich nichts von der Sprache, in der das Ms. Cotton geschrieben ist, auch gibt er keine Signatur dafür an. Es existiert aber ein Katalog der Cottonschen Bibliothek von Thomas Smith, betitelt: *Catalogus librorum manuscriptorum Bibliothecae Cottonianae* etc. (Oxford 1696), in welchem in der Abteilung Tiberius (die verschiedenen Abteilungen der Büchersammlung Cottons waren mit römischen Kaisernamen bezeichnet) sub B. IX ein lateinisches Ms. verzeichnet steht, worin unter andern Abhandlungen als sechste sich befindet: „Liber divisionum Mahumeti Bag-dadini" (sic!). Es steht also wohl außer allem Zweifel, daß John Dee nur als der Abschreiber dieses lateinischen Ms. und als der Überlieferer der Abschrift an Commandino betrachtet werden muß. Und nun dürfen wir auch mit fast an Gewißheit grenzender Wahrscheinlichkeit annehmen, daß das Cottonsche Ms. die Übersetzung des arabischen Buches über die Teilung der Figuren durch Gerhard von Cremona sei, kommt doch im Verzeichnis der Gerhardschen Übersetzungen unter den mathematischen Schriften ein „liber divisionum" vor. Was den arabischen Verfasser anbetrifft, so halte ich an der in der Biblioth. Mathem. $4_3$, 1903, p. 27 ausgesprochenen Vermutung fest, daß derselbe identisch sei mit Abû Bekr Muh. b. ʿAbdelbâqî el-Baġdâdî, dem Verfasser des Kommentars zum 10. Buche des Euklides, betitelt „Abbacus". H. Suter.

**Tait's problem with counters in the Japanese mathematics.** In his *Introductory address to the Edinburgh mathematical society* (Philosophical magazine $17_5$, 1884, p. 39), P. G. TAIT treated the following problem:

Place four florins (or white counters) and four halfpence (or black counters) alternately in a line in contact with one another. It is reqnired, in four moves, each of a pair of two contiguous pieces (withont altering the relative position of the pair), to form a continnous line of four balfpence followed by four florins.

I bave quoted this from W. W. R. BALL's *Mathematical recreations and problems* (London 1892), p. 48.

This problem is usually attribnted to TAIT (see E. LUCAS, *L'arithmétique amusante*, Paris 1895, p. 84). Its general solntion has been given by M. DELANNOY in La nature 1889, p. 10.

The problem, however, is found in a book of Japanese mathematics which was publisbed about one bundred and sixty years ago. According to Mr. T. ENDŌ's opinion, the second part of the *Kanja-otogi-soshi* (literally translated „book of amusing problems for tbe entertainment of thinkers") written in 1743, by GENJUN NAKANE, more known by the name of HŌJIKU NAKANE, seems to be the first work containing this problem.

GENJUN NAKANE, one of the eminent mathematicians in Japan, who died in 1761 (the year of bis birtb is unknown), was tbe son of GENKEI NAKANE[1]), more known in the bistory of the Japanese mathematics, wbo was born in 1661, and died in 1733.

From this time, the problem is known among the Japanese under the name of „Play of mandarin drakes and ducks".

Afterwards this problem was mentioned in many books, for example, TASOKU TAKEDA's *Shingen-sampō* (Shingen's arithmetic, „sbingen" being the individual name of TASOKU's father) 2, 1844, and RIKEN FUKUTA's *Sampō-tama-tebako* (small box containing precions articles on aritbmetics), 1879.

Tokyo. T. HAYASHI.

---

## Anfragen.

**123. Über einen Näherungswert für cos x.** Bekanntlich findet sich bei den indiscben Mathematikern eine Regel für die Berecbnung der Seite $s_n$ des in einen Kreis mit dem Durchmesser $d$ eingeschriebenen regelmäßigen $n$-Ecks, welche Regel in moderner Bezeicbnung auf folgende Weise ausgedrückt werden kann (vgl. CANTOR, *Vorles. über Gesch. der Mathem.* $1^2$, 1894, S. 618):

$$s_n = \frac{4\,d\,(n-1)}{\frac{5}{4}\,n^2 - (n-1)}.$$

Hieraus erhält man unmittelbar

$$\sin\frac{\pi}{n} = \frac{4\,(n-1)}{\frac{5}{4}\,n^2 - (n-1)},$$

und wenn man $\frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{2} - x$ setzt, wird nach einigen einfachen Transformationen

1) For NAKANE's biography, see my *Brief history of the Japanese mathematics* in Nieuw Archief voor Wiskunde $6_2$, 1905, p. 354.

$$\cos x = \frac{1 - \frac{4x^2}{\pi^2}}{1 + \frac{x^2}{\pi^2}}.$$

Benutzt man jetzt den indischen Wert $\sqrt{10}$ für $\pi$, wird

$$\cos x = \frac{1 - \frac{2x^2}{5}}{1 + \frac{x^2}{10}}, \qquad (A)$$

oder

$$x^2 = 10 \frac{1 - \cos x}{4 + \cos x}. \qquad (B)$$

Daß die Formeln (A) und (B) wenig genau sind, sieht man leicht, denn (B) wird richtig, wenn man im Zähler nur die zwei ersten Glieder $1 - \frac{x^2}{2}$ und im Nenner nur das erste Glied 1 der Cosinus-Reihe benutzt; aus (A) erhält man durch Entwickelung des rechten Gliedes:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{20} - \frac{x^6}{200} + \frac{x^8}{2000} - \ldots$$

so daß nur die zwei ersten Glieder richtig sind. Auf der anderen Seite ist es von historischem Interesse zu ermitteln, ob die zwei Formeln irgendwo vorkommen, denn dadurch könnte man vielleicht die Ableitung des indischen Wertes für $s_n$ enträtseln. Versuche dazu haben neuerdings H. Suter (*Über die Vielecksformel in Bâhskaras Lilavâti;* Verhandl. d. dritten internat. Mathematiker-Kongresses, Leipzig 1905, S. 556—558) und J. Kürschák (Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, S. 306—307) gemacht, aber es scheint mir nicht unmöglich, daß eine noch wahrscheinlichere Ableitung gegeben werden könnte. G. Eneström.

---

**124. Über zwei ältere Benennungen der fünften Potenz einer Größe.** Am Ende des Mittelalters treten in Europa zwei Benennungen für die fünfte Potenz einer Größe auf, nämlich „sursolidum" und „primo relato". Die erste Benennung findet sich in der von Curtze herausgegebenen Algebra des Initius Algebras (vgl. Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, S. 406), und da diese Schrift wahrscheinlich von dem deutschen Mathematiker Andreas Alexander herrührt (siehe Biblioth. Mathem. $3_3$, 1902, S. 355—360), darf man annehmen, daß die Benennung schon um 1500 gebräuchlich war. Der Name „sursolidum" kommt auch am Anfange des 16. Jahrhunderts bei Riese und Rudolff vor (vgl. Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, S. 406); ein Jahrhundert später wird er von Descartes benutzt (siehe *La géométrie de René Descartes*, Nouv. éd. Paris 1886, S. 4, 82), und noch am Ende des 17. Jahrhunderts hat E. Halley das Wort „sursolidum" angewendet (siehe seine Abhandlung in den Philosophical Transactions 1694, abgedruckt am Ende der Newtonschen *Arithmetica universalis*, Ausg. Leiden 1732, S. 248). Etwa gleichzeitig führte Ozanam das Wort in seinem *Dictionnaire mathématique* (ed. Amsterdam 1691, S. 24, 62) ein.

Die Benennung „primo relato" kommt 1494 bei Luca Paciuolo vor (vgl. z. B. J. Tropfke, *Geschichte der Elementarmathematik* I, Leipzig 1902, S. 189); freilich trifft man den Namen „radice relata" für fünfte Wurzel in einem

Manuskripte, das nach Libri aus dem 14. Jahrhundert herrührt, aber die Librische Angabe ist meines Erachtens nicht genügend begründet, und übrigens wird im fraglichen Manuskripte die fünfte Potenz nicht „primo relato" sondern „censo di cubo" genannt.

Wie die zwei erwähnten Benennungen entstanden sind, ist noch nicht ermittelt worden. Paul Tannery hat vermutet (siehe *Encyclopédie des sciences mathématiques* **1**:1 [1904], S. 138), daß „sursolidum" nur eine ungenaue Form für „surdesolidum" ist, und daß dies letztere Wort auf einen arabischen Term mit der Bedeutung „Solidum von einer nicht-aussprechbaren Art" hinweist; noch dazu bemerkt Paul Tannery, daß dieser Term dem Worte *ἄλογος* des Psellos entspricht, das seiner Ansicht nach auf Anatolius, einen Zeitgenossen des Diofantos, zurückgeht. Aber diese Hypothese schwebt vollständig in der Luft, bis das Vorkommen des Wortes „surdesolidum" vor Descartes nachgewiesen wird. Freilich sagt A. Riese (siehe B. Berlet, *Die Coss von Adam Riese*, Annaberg 1860, S. 11), daß „sursolidum Ist eine taube Zahl", was ja darauf hindeutet, daß Riese das Wort „sursolidum" mit „surdus" in Verbindung setzte, aber dies kann sehr wohl auf einer Mutmaßung von Riese selbst beruhen. Ein wenig größere Beachtung verdient vielleicht der Umstand, daß Ibn Albanna die *Prim*zahlen mit einem Wort bezeichnet, das A. Marre in seiner Übersetzung des *Talkhys* mit „sourd" wiedergibt (siehe *Le Talkhys d'Ibn Albanna publié et traduit;* Atti dell' accademia pontificia de' nuovi Lincei **17**, 1864, S. 19 des Sonderabdruckes). Indessen ist die Marresche Terminologie ziemlich unsicher, denn das Wort, das er zuerst mit „muettes" übersetzt hat (a. a. O. S. 2), soll nach den Errata „sourdes" bedeuten. Meines Wissens kommt das Wort „surdesolidum" zuerst in der von F. van Schooten verfertigten Übersetzung der Descartesschen Geometrie (ed. Leiden 1649, S. 5, 108, 109) vor, und ich halte es darum für wahrscheinlicher, daß Schooten bei seiner Übersetzung des Buches das ihm unverständliche Wort „sursolidum" in „surdesolidum" verändert hat. Wegen der großen Verbreitung der Schootenschen Übersetzung wurde die Form „surdesolidum" von anderen Verfassern benutzt, z. B. von Jakob Bernoulli, der in seinem Kommentar der Descartesschen Geometrie (1695) abwechselnd „sursolidum" und „surdesolidum" anwendet. — Tropfke (a. a. O. S. 196) gibt „sursolidum" durch „überkörperlich" wieder, aber diese Übersetzung setzt voraus, daß „sur" mit „super" identifiziert werden darf, und meines Wissens ist kein Beleg hierfür angeführt worden. Daß die Form „supersolidum" in der mathematischen Literatur des 17. Jahrhunderts zuweilen vorkommt (siehe z. B. Descartes, *Epistolae* III, Frankfurt a./M. 1692, S. 265, Z. 4), kann derselbe Grund wie das Vorkommen von „surdesolidum" haben, nämlich daß „sursolidum" unverständlich war, und darum ein Versuch gemacht wurde, den Term zu verbessern.

In betreff des Termes „primo relato" hat Herr Cantor (*Vorles. über Gesch. der Mathem.* $2^2$, S. 317) auf die Verwandschaft desselben mit dem Ausdruck *ἄλογος πρῶτος* in einer Schrift von Michael Psellos hingewiesen, also gerade dem Ausdruck, den Paul Tannery, wie ich oben bemerkt habe, mit dem Worte „sursolidum" in Verbindung setzt. Indessen scheint Herr Cantor selbst die Schwierigkeit anzuerkennen, „relato" aus *ἄλογος* zu erklären, und in diesem Punkte bin ich mit ihm durchaus einverstanden.

Ist es möglich eine befriedigende Erklärung des Ursprunges der zwei Terme „sursolidum" und „primo relato" auszufinden? G. Eneström.

•

# Rezensionen.

**F. Strobel. Adreßbuch der lebenden Physiker, Mathematiker und Astronomen des In- und Auslandes und der technischen Hilfskräfte.** Leipzig, Barth 1905. 8⁰, X + 208 S. + 48 S. Anzeigen. Mark 7.

Im Vorworte wird angegeben, daß bei der Bearbeitung des Adreßbuches nur authentische Quellen aus den letzten drei Jahren benutzt worden sind, und daß außerdem an jede Adresse ein Korrekturabzug mit der Bitte um Bestätigung oder Berichtigung gesandt wurde. Der Bearbeiter hebt hervor, daß durch dies Verfahren in bezug auf die Richtigkeit der Adressen das Möglichste geschehen ist; dagegen gibt er zu, daß die Auswahl bemängelt werden kann, bemerkt aber, daß es unmöglich ist, in diesem Punkte alle Leser zu befriedigen. Aufgenommen sind in erster Linie alle Universitätslehrer der Physik, Mathematik und Astronomie, aber auch Lehrer an den höheren Schulen und Mitglieder gewisser wissenschaftlicher Gesellschaften sind im Adreßbuch aufgeführt. Die Ordnungsfolge ist nicht alphabetisch nach den Personennamen, sondern die Adressen sind nach den Städten gruppiert, und die Städte-Überschriften in ein einziges Alphabet gebracht. Auf dieselbe Weise ist der Bearbeiter in betreff der Adressen technischer Hilfskräfte verfahren; für jede Stadt sind diese ans Ende der anderen Namen gestellt und durch kursive Schrift erkennbar gemacht. Ein Namenregister (S. 177—208) erleichtert das Auffinden der Adressen.

Wie aus den soeben angeführten Stellen des Vorwortes hervorgeht, hat der Bearbeiter besonderes Gewicht darauf gelegt, daß die Adressen möglichst zuverlässig sind. Indessen ist es leicht einzusehen, daß die Maßregeln, die er für diesen Zweck ergriffen hat, kaum hinreichend sind, um ein gutes Resultat zu erzielen. Auch „authentische" Quellen werden in vielen Fällen recht bald wegen Todesfällen und Versetzungen unzuverlässig, und die Versendung von Korrekturabzügen erweist sich gerade in solchen Fällen meistens erfolglos. Die Bearbeitung eines Adreßbuches erfordert darum besondere Personenkenntnis, und diese Kenntnis besitzt Herr Strobel offenbar nicht. So z. B. führt er S. 106 die Adresse von Josiah Williard Gibbs und S. 135 die Adresse von Luigi Cremona an, obgleich diese beiden hervorragenden Mathematiker schon in der ersten Hälfte des Jahres 1903 gestorben sind; ebenso findet man S. 131 die Adresse von Eduard Weyr, der schon im Juli 1903 starb. Unter solchen Umständen ist es selbstverständlich, daß sich im Adreßbuche eine große Anzahl von unrichtigen Angaben finden müssen, von denen nur sehr wenige S. VII—X

(„während des Druckes eingetretene Veränderungen sowie Berichtigungen") notiert sind. Aus denselben Gründen ist zuweilen ein und dieselbe Person zweimal erwähnt, z. B. S. 57 (Gotha) und 129 (Potsdam) ein früherer Gymnasiallehrer, der seit ein paar Jahren Vorsteher eines Observatoriums ist. Gewisse andere Unrichtigkeiten habe ich dagegen nicht erklären können, z. B. eine Angabe S. 5, laut welcher ein früherer Professor der Mathematik (der Name ist übrigens nicht ganz richtig geschrieben) in Austin (Texas), jetzt in Gambier (Ohio), unter „Annapolis" aufgeführt ist, aber mit genau der Adresse, die er in Austin hatte. Sehr verzeihlich ist dagegen die unvollständige Adresse „Via P. Umberto 29" S. 123 Z. 2 v. u. unter *Pavia* — der betreffende Professor ist nicht in Pavia sondern in *Milano* wohnhaft, obgleich er wirklich noch Professor an der Universität jener Stadt ist.

In betreff der Auswahl der aufzuführenden Adressen muß zugegeben werden, daß sie sehr schwierig ist, und natürlich ist der Bearbeiter auch von dem ihm zur Verfügung gestandenen Quellenmateriale abhängig gewesen. Es wäre darum unrecht seine Arbeit zu bemängeln, weil sie z. B. eine große Anzahl Adressen von deutschen, französischen und italienischen Gymnasiallehrern enthält, aber nur ein paar schwedische Lehrer dieser Art aufführt. Weniger leicht zu verstehen ist, warum Herr Strobel, der nach eigener Aussage verschiedene Mitglieder-Verzeichnisse gelehrter Gesellschaften benutzt hat, das Mitglieder-Verzeichnis der *deutschen Mathematiker-Vereinigung* offenbar *nicht* zu Rate gezogen hat um sein Material zu ergänzen; ebensowenig scheint er das Mitglieder-Verzeichnis der „Société mathématique de France" gebraucht zu haben. Ist man der Ansicht, daß ein Adreßbuch lebender Mathematiker in erster Linie solche Fachgenossen berücksichtigen soll, die literarisch tätig sind, so kann man nicht umhin, die Arbeit des Herrn Strobel als ziemlich unvollständig zu bezeichnen, und besonders fehlen sehr viele mathematisch-historische Forscher; beispielsweise sind von den 19 Verfassern, die Beiträge zum Jahrgange 1904 der Bibliotheca Mathematica geliefert haben, nur 9 im Adreßbuche zu finden. In den meisten Fällen ist der Grund dieses Fehlens unmittelbar einleuchtend, aber warum fehlen z. B. die Herren A. Favaro und T. Hayashi, die ja beide Universitätsprofessoren (bezw. in Padua und Tokio) sind? Und warum sucht man S. 16 vergebens den Verfasser der verdienstvollen *Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung*, da sonst Hunderte von Oberlehrern an deutschen Gymnasien erwähnt werden?

Ob die Einfügung der großen Anzahl von Adressen technischer Hilfskräfte einem wirklichen Bedürfnis entsprechen, bin ich nicht kompetent zu beurteilen — für Mathematiker haben sie jedenfalls wenig Wert. Dagegen wäre es sehr angebracht, die Adressen von Verlegern mathematischer, physischer und astronomischer Schriften anzugeben; in der Tat können auch diese als „Hilfskräfte", wenngleich in einem anderen Sinne als dem von Herrn Strobel gemeinten, bezeichnet werden.

Es ist schon erwähnt worden, daß sich im vorliegenden Adreßbuch die alphabetische Ordnungsfolge nicht auf die Personen sondern auf die Städte, wo sie wohnhaft sind, bezieht. Für die Mathematiker kann eine solche Anordnung ausnahmsweise angebracht sein, wenn man z. B. Aufschlüsse über Vorlesungen an einer gewissen Universität wünscht und nicht weiß, welche Professoren es dort gibt, aber in den meisten Fällen ist die Anordnung unbequem. Wenn ich z. B. mit einem Fachgenossen in Verbindung treten will, von dem ich nur weiß,

daß er „H. Müller“ heißt, und für diesen Zweck das Adreßbuch zu Rate ziehe, so muß ich vielleicht sechs Stellen (S. 196, 14, 77, 49, 129, 145) einsehen, um zu erfahren, ob ich im Buche die erwünschte Auskunft bekommen kann oder nicht. Noch dazu wird das Adreßbuch wegen der zahlreichen Versetzungen viel früher unbrauchbar, als wenn die Personennamen alphabetisch geordnet wären.

Am Anfange des Vorwortes wird bemerkt, daß eine Zusammenstellung von Adressen lebender Physiker, Mathematiker und Astronomen vielfach als besonders erwünscht bezeichnet worden ist. Die Bemerkung ist ohne Zweifel richtig, aber durch das Adreßbuch des Herrn Strobel sind die Wünsche der Mathematiker nur zum geringen Teile erfüllt worden. Dagegen wird das Buch gewiß den Verlegern und Buchhändlern gute Dienste leisten, wenn sie Prospekte oder Probehefte versenden wollen.

Stockholm. G. Eneström.

# Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

## Autoren-Register.



### a) Zeitschriften. Allgemeines.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8⁰. [1
$6_3$ (1905): 2.

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8⁰. [2
1905: 2—3.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik herausgegeben von E. Lampe. Berlin. 8⁰. [3
34 (1903): 1—2. — Die Seiten 1—62 enthalten Referate der im Jahre 1903 erschienenen mathematisch-historischen Schriften.

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la société mathématique d'Amsterdam par P. H. Schoute, D. J. Korteweg, J. C. Kluyver, W. Kapteyn, J. Cardinaal. Amsterdam. 8⁰. [4
13: 2 (octobre 1904 — avril 1905).

Atti del congresso internazionale di scienze storiche (1903), volume XII (1904). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 8, 1905, 78—81. (G. Vivanti.) [5

Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses, herausgegeben von A. Krazer (1905). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. $29_2$, 1905, 217—222. (J. T.) — Revista trimestral de matem. 5, 1905, 96—99. [6

Adreßbuch der lebenden Physiker, Mathematiker und Astronomen des In- und Auslandes und die technischen Hilfskräfte. Zusammengestellt von Fr. Strobel. Leipzig, Barth 1905. [7
8⁰, X + 208 S. + 48 S. Anzeigen. — [7 Mk.]

---

**Cantor M.**, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. = $2^2$ (1900). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 208—211. (G. Eneström.) = $3^2$ (1901). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 211—214. (G. Eneström.) [8

**Zeuthen, H. G.**, Histoire des mathématiques dans l'antiquité et le moyen-âge. Edition française (1902). [Rezension:] Jorn. de sc. mathem. 15, 1905, 136—137. (G. T.) [9

**Zeuthen, H. G.**, Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert. Deutsche Ausgabe (1903). [Rezension:] *Lemberg*, [Ševčenko-Gesellschaft, Schriften] 10, 1905, 17. — *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin $11_2$, 1905,

554—557, (D. E. Smith.) — Revue génér. d. sc. 16, 1905, 284—285. — Unterrichtsblätter für Mathem. 11, 1905, 38. (H. Wieleitner.) [10

**Sturm, A.**, Geschichte der Mathematik (1904). [Rezension:] *Lemberg*, [Ševčenko-Gesellschaft, Schriften] 10, 1905, 18—19. [11

**Picard, E.**, Sur le développement de l'analyse et ses rapports avec diverses sciences (1905). [Rezension:] *Amsterdam*, Wisk. genoots., Nieuw archief $7_2$, 1905, 97—99. (Kl.) — L'interméd. d. mathém. 12, 1905, Supplément IX—X. (A. G.) [12

**Darboux, G.**, Etude sur le développement des méthodes géométriques (1904). [Englische Übersetzung durch H. D. Thompson:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin $11_2$, 1905, 517—543. — [Rezension:] *Amsterdam*, Wisk. genoots., Nieuw archief $7_2$, 1905, 93. (Z.) — Deutsche Literaturz. 26, 1905, 1834. (A. Schönflies.) — L'interméd. d. mathém. 12, 1905, Supplément VIII. (A. G.) [13

**Loria, G.**, Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte (1902). [Rezension:] Jorn. de sc. mathem. 15, 1905, 132—133. (G. T.) [14

**Duhem, P.**, Les origines de la statique. Tome premier. Paris, Hermann 1905. [15

8°, (4) + IV + 360 S. — [10 fr.] — Die Seiten 1—352 sind ein Sonderabdruck aus der „Revue des questions scientifiques publiée par la société scientifique de Bruxelles" $4_3$, 1903, 462—516; $5_3$, 1904, 560—596; $6_3$, 1904, 9—66, 394—473; $7_3$, 1905, 96—149.

**Duhem, P.**, Les origines de la statique. [16

*Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. $8_3$, 1905, 115—201, 508—558.

**Lebon, E.**, Histoire abrégée de l'astronomie (1899). [Rezension:] L'interméd. d. mathém. 12, 1905, Supplément VI. (A. G.) [17

**Ahrens, W.**, Scherz und Ernst in der Mathematik (1904). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 8, 1905, 51. (G. L.) — Monatsh. für Mathem. 16, 1905; Lit.-Ber. 43—44. — Unterrichtsblätter für Mathem. 11, 1905, 37—38. [18

**Smith, D. E.**, A portfolio of portraits of eminent mathematicians (1905). [Rezension:] L'enseignement mathém. 7, 1905, 330. [19

**Hayashi, T.**, A brief history of the Japanese mathematics. [20

*Amsterdam*, Wisk. genoots., Nieuw archief $7_2$, 1905, 105—112.

**Harzer, P.**, Die exakten Wissenschaften im alten Japan (1904). [Wieder abgedruckt mit einigen Verbesserungen und Ergänzungen:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 14, 1905, 312—339. — [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 8, 1905, 63—64. [21

**Miller, G. A.**, Mathematics in Japan. [22

Science $22_2$, 1905, 215—216.

**Hayashi, T.**, A list of some dutch astronomical works imported into Japan from Holland. [23

*Amsterdam*, Wisk. genoots., Nieuw archief $7_2$, 1905, 42—44. — Mit Bemerkungen von J. C. Kluyver S. 44—47.

**Förstemann, E.**, Die Astronomie der Mayas. [24

Das Weltall 4, 1904, 353—361.

**Šoarek, A. V.**, Über den mathematischen Unterricht in Bulgarien (1905). [Französische Übersetzung:] L'enseignement mathém. 7, 1905, 257—270. [25

### b) Geschichte des Altertums.

**Schack-Schackenburg, H.**, [No. 35—38 des mathematischen Handbuches]. [26

Zeitschr. für ägyptische Sprache 41, 1904, 79—80.

**Zeuthen, H. G.**, Théorème de Pythagore. Origine de la géométrie scientifique. [27

Deuxième congrès international de philosophie (1904), Comptes rendus, 1905, 833—854.

**Heiberg, J. L.**, [Griechische] Mathematik, Mechanik und Astronomie. [28

Kroll, Altertumswissenschaft 1 (1905), 129—143.

***Manitius, K.**, Fixsternbeobachtungen des Altertums. [29

Das Weltall 5, 1905.

**Rudio, F.**, Die Möndchen des Hippokrates. [30

*Zürich*, Naturf. Ges., Vierteljahrsschr. 50, 1905, 177—200.

***Miller, J. E.**, The significance of the mathematical element in the philosophy of Plato. Chicago 1904. [31

8°, 96 S. — [0,75 doll.]

**Rudio, F.**, Notizen zu dem Berichte des Simplicios [über die Möndchen des Hippokrates]. [32

*Zürich*, Naturf. Ges., Vierteljahrsschr. 50, 1905, 213—223.

### c) Geschichte des Mittelalters.

**Wiedemann, E.**, Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften [bei den Arabern]. III. [33

*Erlangen*, Physik.-mediz. Societät, Sitzungsber. 37, 1905, 218—283. — Einige Biographien von griechischen Mathematikern nach arabischen Verfassern; zur Astronomie und Kosmographie der Araber; über die Kenntnis der Uhren bei den Arabern.

**Eneström, G.**, Woher haben Leonardo Pisano und Jordanus Nemorarius ihre Lösungen des Problems der Würfelverdoppelung entnommen? [34

Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 214—215 — Anfrage.

**Wegener, A.**, Die astronomischen Werke Alfons X. [35

Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 129—185. — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 26, 1905, 2280—2281.

### d) Geschichte der neueren Zeit.

***Steinschneider, M.**, Mathematik bei den Juden 1551—1840. [36

Monatsschr. für Gesch. und Wiss. des Judentums 1905.

**Gravelaar, N. L. W. A.,** De leerwijze van Ferrari voor de oplossingen der vergelijkingen van den vierden graad. [37
Wiskundig tijdschrift 1, 1905, 62–71.

**Forsyth, A. R.,** Address to the mathematical and physical section of the British association for the advancement of science. [38
Science $22_2$, 1905, 234–247. — Über die Entwickelung der Mathematik 1605–1905.

***Günther, L.,** Kepler und die Theologie. Gießen, Ricker 1905. [39
8°, 114 S. — [2,50 Mk.] — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 26, 1905, 1799; 2597–2599. (S. Günther.)

**Kasner, E.,** Galileo and the modern concept of infinity. [40
*New York,* Americ. mathem. soc., Bulletin $11_2$, 1905, 499–501. — Der Artikel bezieht sich auf das bekannte Galileische Paradoxon, daß die Anzahl der Quadratzahlen teils kleiner als die Anzahl der natürlichen Zahlen, teils gleich der letzten Anzahl sein muß (vgl. z. B. E. Goldbeck, Biblioth. Mathem. $3_3$, 1902, S. 84).

**Favaro, A.,** Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. XIII. Vincenzio Galilei. [41
*Venezia,* Istituto Veneto, Atti 64 : 2, 1905, 1349–1377.

***Bachet de Méziriac, C. G.,** Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres. Quatrième édition, revue et simplifiée. Paris, Gauthier-Villars 1905. [42
16°, VI + 161 S. — [3,50 fr.] — [Rezension:] *Bruxelles,* Soc. scient., Revue des questions scient. $8_3$, 1905, 359. — L'intermèd. d. mathém. 12, 1905, Supplément X. (A. G.)

**Waard, C. de,** Eene correspondentie van Descartes uit jaren 1618 en 1619. [43
*Amsterdam,* Wisk. genoots., Nieuw archief $7_2$, 1905, 69–87.

**Waard, C. de,** Descartes en de breekingswet. [44
*Amsterdam,* Wisk. genoots., Nieuw archief $7_2$, 1905, 64–68.

Oeuvres complètes de Christiaan Huygens publiées par la société hollandaise des sciences. Tome dixième. Correspondance 1691–1695. La Haye, Nijhoff 1905. [45
4°, 816 S. — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 26, 1905, 2407–2408. (E. Gerland.)

**Bonola, R.,** Un teorema di Giordano Vitale da Bitonto sulle rette equidistante. [46
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 8, 1905, 33–36.

**Eneström, G.,** Über eine von Euler aufgestellte allgemeine Konvergenzbedingung. [47
Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 186–189.

**Sauerbeck, P.,** Einleitung in die analytische Geometrie der höheren algebraischen Kurven nach den Methoden von J. P. de Gua de Malves (1902). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. $29_2$, 1905, 157–158. (J. T.) [48

Georg Vega. [49
Zbornik znanstvenih in poučnih spisov Matice Slovenske (Laibach) $5_2$, 1903, 217; $6_2$, 1904, 209.

**Macfarlane, A.,** Bibliography of quaternions (1904). [Rezension:] Jorn. de sc. mathem. 15, 1905, 144. (G. T.) [50

**Zanotti-Bianco, O.,** I concetti moderni sulla figura matematica della terra. Appunti per la storia della geodesia. II. [51
*Torino,* Accad. d. sc., Atti (sc. matem.) 40, 1905, 18–42.

**Jourdain, Ph. E. B.,** The theory of functions with Cauchy and Gauss. [52
Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 190–207.

**Klein, F.,** Über den Stand der Herausgabe von Gauss Werken. Sechster Bericht (1904). [Wieder abgedruckt:] Mathem. Ann. 61, 1905, 72–76. [53

**Simon, M.,** Über den sogenannten Brocardschen Punkt. [54
Arch. der Mathem. $9_3$, 1905, 206. — Historische Notiz.

**Graf, J. H.,** Beiträge zur Biographie Jakob Steiners. [55
*Bern,* Naturf. Ges., Mitteil. 1905. 11 S. + Porträt.

**Neumann, Luise,** Franz Neumann (1904). [Rezension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 36, 1905, 286–288. (W. Ahrens.) [56

**Tannery, P.,** Augusto Comte et l'histoire des sciences. [57
Revue génér. d. sc. 16, 1905, 410–417.

**Alexejeff, W. G.,** M. V. Ostrogradskij. [58
*Jurjeff,* [Gesellsch. d. Wiss., Sammlung] 6, 1903, 122–155.

***Moore, H. L.,** A. A. Cournot. [59
Revue de métaphysique et de morale 13, 1905.

***Poincaré, H.,** Cournot et les principes du calcul infinitésimal. [60
Revue de métaphysique et de morale 13, 1905.

**Königsberger, L.,** Carl Gustav Jacob Jacobi. Festschrift (1904). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 8, 1905, 60–61. (G. L.) — The mathem. gazette 3, 1905, 139. [61

**Study, E.,** Sir William Rowan Hamilton. [62
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 14, 1905, 421–424 + Porträt.

**Friedländer, S.,** Julius Robert Mayer (1905). [Rezension:] Naturwiss. Rundschau 20, 1905, 426. (Lampa.) [63

**Muir, Th.,** The theory of continuants in the historical order of development up to 1880. [64
Edinburgh, Royal soc., Proceedings 25, 1905, 648–679.

**Segre, C.,** La geometria d'oggidì e i suoi legami coll' analisi. Discorso (1905). [Polnische Übersetzung:] Wiadomości matem. 9, 1905, 7–21. [65

**Graf, J. H.,** Briefwechsel von Ludwig Schläfli mit Arthur Cayley. Bern 1905. [66
$8^0$, 42 S. + Facsim. — Festgabe der Universität Bern für das 50jährige Jubiläum des eidgenössischen Polytechnikums in Zürich.

Correspondance d'Hermite et de Stieltjes publiée par les soins de B. Baillaud et H. Bourget. I (1905). [Rezension:] *Amsterdam*, Wisk. genoots, Nieuw archief $7_2$, 1905, 96—97. (Kl.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 8, 1905, 38—39. (G. L.) [67

**Störmer, C.,** Verzeichnis über den wissenschaftlichen Nachlass von Sophus Lie. I (1904). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 26, 1905, 1719—1720. (F. Engel.) [68

**Veronese, G.,** La geometria non Archimedea. Una questione di priorità. [69
*Roma*, Accad. d. Lincei, Rendiconti $14_2$ : 1, 1905, 347—351.

J. C. **Poggendorffs** Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften. Vierter Band (die Jahre 1883 bis zur Gegenwart umfassend), herausgegeben von A. J. von Oettingen (1904). [Rezension:] Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 216—218. (G. Eneström.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 8, 1905, 50. (G. L.) [70

International catalogue of scientific literature. Third annual issue. A. Mathematics. London 1904. [71
$8^0$, VIII + 228 S. — „Referee": R. Hargreaves.

**Ludwig, F.,** Neuere Literatur über das Grenzgebiet der Biometrie. IV. [72
Zeitschr. für Mathem. 52, 1905, 106—111.

### e) Nekrologe.

Ernst **Abbe** (1840—1905). [73
Nature 71, 1905, 301—302. (R. T. G.)

Nikolaus **Bugajeff** (1837—1903). [74
*Kieff*, Univ., Isvjestia n° $10^4$, 69—73. (D. Th. Egoroff.)

Joseph **Diekmann** (1848—1905). [75
Zeitschr. für mathem. Unterr. 36, 1905, 316—318. (A. Thaer.)

François Jacques Philippe **Folie** (1833—1905). [76
*Bruxelles*, Acad. de Belgique, Bulletin 1905, 60—63. (P. de Heen.)

J. **Fontès** (1842—1902). [77
*Toulouse*, Acad. d. sc., Mémoires $4_{10}$, 1904, 344—355 [mit Schriftverzeichnis]. (V. Rouquet.)

Guido **Hauck** (1845—1905). [78
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 14, 1905, 289—311 [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. (E. Lampe.) — Ein Sonderabzug ergänzt durch eine Rede von A. Parisius ist später erschienen (Leipzig, Teubner 1905, $8^0$, 32 S. + Porträt).

Paul Pierre **Henry** (1848—1905). [79
Nature 71, 1905, 302. (W. E. P.)

Karl Josef **Küpper** (1828—1900). [80
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 14, 1905, 389—394 [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. (E. Walsch.)

Corneille **Landré** (1838—1905). [81
*Amsterdam*, Wisk. genoots, Nieuw archief $7_2$, 1905, 1—6 + Porträt. (M. C. Paraira.) — Archief voor de verzekerings-wetenschap (Haag) 8, 1905, 227—247 + Porträt. (G. J. D. Mounier.)

George **Salmon** (1819—1904). [82
Mathem. Ann. 61, 1905, 1—19. (M. Noether.)

Emile **Sarrau** (1837—1904). [83
Revue génér. d. sc. 16, 1905, 7—10. (P. Vieille.)

Władyslaw **Satke** (1853—1904). [84
Wiadomości matem. 9, 1905, 122.

Wilhelm **Schell** (1826—1904). [85
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 14, 1905, 394. (N. Hatzidakis.)

Josef **Stefan** (1835—1893). [86
Zbornik znanstvenih in poučnih spisov Matice Slovenske (Laibach) $4_2$, 1902, 62—85. (J. Šubic.)

Otto Wilhelm **von Struve** (1819—1905). [87
Nature 72, 1905, 61.

Simon **Šubic** (1830—1903). [88
Zbornik znanstvenih in poučnih spisov Matice Slovenske (Laibach) $6_2$, 1904, 208.

Pietro **Tacchini** (1838—1905). [89
Naturwiss. Rundschau 20, 1905, 285—286. (A. B.)

Paul **Tannery** (1843—1904). [90
Deuxième congrès international de philosophie (1904), Comptes rendus, 1905, 775—797. (J. Tannery.) Nordisk Tidsskrift for Filologi $14_3$, 1905, 43—45. (J. L. Heiberg.)

### f) Aktuelle Fragen.

Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens. I. [91
L'enseignement mathém. 7, 1905, 387—395.

[Französische Mathematiker-Versammlung in Cherbourg 1905.] [92
L'enseignement mathém. 7, 1905, 406—407. (E. Lebon.)

# Wissenschaftliche Chronik.

## Ernennungen.

— Dr. O. P. Akers in Ithaca zum Professor der Mathematik am „Allegheny college“ in Meadville, Pa.

— Professor S. J. Barnet an der „Stanford university“ zum Professor der Physik an der „Tulane university“.

— Privatdozent I. Bischoff in München zum Professor der Geodäsie an der Technischen Hochschule daselbst.

— Professor G. A. Bliss in Columbia, Mo. zum Professor der Mathematik an der Universität in Princeton.

— Privatdozent O. Blumenthal in Göttingen zum etatsmäßigen Dozenten der Mathematik an der Technischen Hochschule in Aachen.

— W. E. Brooke in Minneapolis zum Professor der angewandten Mathematik an der Universität von Minnesota daselbst.

— E. Brown in Liverpool zum Professor der Mechanik an der „Mc Gill university“.

— Dr. H. A. Bumstead in New Haven zum Professor der Physik an der „Sheffield scientific school“ daselbst.

— Privatdozent H. Cohn in Königsberg zum Professor der Astronomie an der Universität daselbst.

— Dr. D. R. Curtiss in New Haven zum Professor der Mathematik an der „Northwestern university“ in Evanston, Ill.

— Dr. R. H. Curtiss zum Professor der Astronomie an der Universität von Western Pennsylvania.

— Privatdozent K. Czarda in Wien zum Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule daselbst.

— Privatdozent M. Dehn in Münster zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Professor E. Doležal in Leoben zum Professor der praktischen Geometrie an der Technischen Hochschule in Wien.

— Dr. L. P. Eisenhart in Princeton zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Professor A. Emch in Boulder, Col. zum Professor der Mathematik an der Kantonsschule in Solothurn.

— W. Findley in New York zum Professor der Mathematik an der „Mc Master university“ in Toronto.

— Dr. W. B. Fite in Ithaca zum Professor der Mathematik an der „Cornell university“ daselbst.

— Dr. A. S. Gale in New Haven zum Professor der Mathematik an der Universität in Rochester.

— Dr. W. Gillespie in Princeton zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Dr. O. E. Glenn zum Professor der Mathematik am „Drury college“ in Springfield, Missouri.

— Privatdozent L. Grunmach in Berlin zum Professor der Physik an der Technischen Hochschule daselbst.

— Dr. K. E. Guthe zum Professor der Physik an der „State university of Iowa“ in Iowa city.

— Professor A. Gutzmer in Jena zum Professor der Mathematik an der Universität in Halle a./S.

— Professor F. Hahn in Lausanne zum Professor der angewandten Mathematik an der Universität in Nancy.

— Pofessor A. G. Hall in Urbana, Ill. zum Professor der Mathematik an der „Miami university“ in Oxford, Ohio.

— Privatdozent G. Hamel in Karlsruhe zum Professor der Mechanik an der deutschen Technischen Hochschule in Brünn.

— Professor R. Haussner in Karlsruhe zum Professor der Mathematik an der Universität in Jena.

— Professor L. Heffter in Aachen zum Professor der Mathematik an der Universität in Kiel.

— Professor G. Hellmann in Berlin zum Professor der Meteorologie an der Universität daselbst.

— Professor Th. F. Holgate in Evanston zum Professor der Mathematik an der „Northwestern university" daselbst.

— Dr. E. V. Huntington in Cambridge, Mass. zum Professor der Mathematik an der „Harvard university" daselbst.

— Professor W. T. Hussey zum Professor der Astronomie an der Universität von Michigan in Ann Arbor.

— Prof. G. Jäger in Wien zum Professor der Physik an der Technischen Hochschule daselbst.

— J. H. Jeans in Cambridge (England) zum Professor der angewandten Mathematik an der Universität in Princeton.

— Dr. O. D. Kellogg in Princeton zum Professor der Mathematik an der Universität von Missouri.

—Privatdozent H. von Koch in Stockholm zum Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule daselbst.

— Privatdozend E. Landau in Berlin zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Professor A. C. Mc Kay in Toronto zum Professor der Physik an der „Mo Master university" daselbst.

— Professor F. M. Morrison in Akron, O. zum Professor der Mathematik an der Universität von Washington in Seattle.

— Professor E. Pringsheim in Berlin zum Professor der Physik an der Universität in Breslau.

— Professor S. E. Slocum in Cincinnati zum Professor der Mathematik an der Universität von Illinois in Urbana.

— Privatdozent H. Starke in Berlin zum Professor der Physik an der Universität in Greifswald.

— Professor J. J. Thomson in Cambridge zum Professor der Physik an der „Royal institution" in London.

— Oberlehrer E. Timerding in Elsfleth (Oldenburg) zum Professor der angewandten Mathematik an der Universität in Straßburg.

— Professor O. Tumlirz in Czernowitz zum Professor der mathematischen Physik an der Universität in Innsbruck.

— Professor R. Wachsmuth in Rostock zum Professor der Physik an der Kriegsakademie in Berlin.

— Professor J. Weingarten zum Professor der Mathematik an der Universität in Freiburg i. Br.

— Dr. J. V. Westfall in Iowa city zum Professor der Mathematik an der „State university of Iowa" daselbst.

— Professor H. S. White in Evanston, Ill. zum Professor der Mathematik am „Vassar college" in Poughkeepsie, N. Y.

— E. T. Whittaker in Cambridge zum „lecturer in mathematics" an der Universität daselbst.

— A. H. Wilson in Champaign, Ill. zum Professor der Mathematik am Polytechnischen Institut in Alabama.

— Dr. J. W. Young in Evanston zum Professor der Mathematik an der „Northwestern university" daselbst.

## Todesfälle.

— Friedrich Arzberger, früher Professor der mechanischen Technologie an der Universität in Wien, geboren den 14. November 1833, gestorben in Ebensee den 8. August 1905.

— Ernest Bichat, Professor der Physik an der Universität in Nancy, geboren in Luneville den 17. September 1845, gestorben den 26. Juli 1905.

— Robert Billwiller, Direktor der schweizerischen meteorologischen Anstalt, geboren in St. Gallen den 2. August 1849, gestorben in Zürich den 14. August 1905.

— De Witt Bristol Brace, Professor der Physik an der Universität von Nebraska in Lincoln, gestorben in Lincoln den 2. Oktober 1905, 46 Jahre alt

— Joseph Constantin Decharme, früher Professor der Physik am Lyceum in Angers, geboren zu Brenvannes (Haute Marne) den 10. Oktober 1815, gestorben in Amiens den 5. Juli 1905.

— Joseph Dierkmann, früher Direktor des Gymnasiums in Viersen, geboren in Höxter i/W. den 1. Januar 1848, gestorben den 22. März 1905.

— Henry Dufet, Professor der Physik an der „Faculté des sciences“ in Paris, geboren in Nantes den 9. September 1848, gestorben den 10. April 1905.

— Lymann Hall, Professor der Mathematik an der „Georgia school of technology“ in Atalanta, gestorben in Atalanta den 17. August 1905, 45 Jahre alt.

— Johann Hermanek, Professor der Hydromechanik an der Technischen Hochschule in Wien, gestorben den 15. Juni 1905, 41 Jahre alt.

— Johann Kiessling, früher Professor am Johanneum in Hamburg, geboren in Culm a. d. Weichsel den 6. Februar 1839, gestorben 1905.

— Stanislaus Kostlivy, Vice-Direktor an der Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik in Wien, gestorben den 7. Oktober 1905, 58 Jahre alt.

— Stefan Kruspér, emeritierter Professor der Mathematik und Geodäsie an der Technischen Hochschule in Budapest, geboren in Miskolcz den 25. Januar 1818, gestorben den 2. Juli 1905.

— Johann Heinrich Meidinger, Professor der technischen Physik an der technischen Hochschule in Karlsruhe, geboren in Frankfurt a. M. den 29. Januar 1831, gestorben in Karlsruhe den 11. Oktober 1905.

— Bloomfield Jackson Miller, Mathematiker der „Mutual benefit insurance company“ in Newark, gestorben in Newark den 11. April 1905.

— L. Natani, gestorben zu Bernau bei Berlin den 19. Juni 1905, 86 Jahre alt.

— Alfred Potier, Professor der Physik an der „Ecole des mines“ in Paris, geboren den 11. Mai 1840, gestorben in Paris 1905.

— Franz Reuleaux, früher Professor der praktischen Mechanik an der technischen Hochschule in Berlin, geboren zu Eschweiler bei Aachen den 30. September 1829, gestorben den 19. August 1905.

— Franz Ruth, Professor der Geodäsie an der deutschen Technischen Hochschule in Prag, geboren in Stockerau (Niederösterreich) den 17. Oktober 1850, gestorben in Nauheim den 30. August 1905.

— Wladyslaw Satke, Meteorolog, Professor des Lehrerseminars in Tarnopol, geboren in Brzeżany (Galizien) den 25. Mai 1853, gestorben in Tarnopol den 24. September 1904.

— Adolf Schepp, Oberleutnant a. D., fleißiger Übersetzer mathematischer Arbeiten aus dem italienischen und englischen, geboren in Wiesbaden den 9. November 1837, gestorben daselbst den 9. März 1905.

— Wilhelm Schmidt, Oberlehrer am Gymnasium in Helmstedt, geboren in Harderode den 25. August 1862, gestorben den 7. August 1905.

— Tobias Robert Thalén, früher Professor der Physik an der Universität in Upsala, geboren in Köping den 28. Dezember 1827, gestorben in Upsala den 27. Juli 1905.

— Leben Warren, früher Professor der Mathematik am „Colby college“, gestorben den 21. April 1905, 69 Jahre alt.

— Walter Friedrich Wislicenus, Professor der Astronomie an der Universität in Straßburg, geboren in Halberstadt den 5. November 1859, gestorben in Straßburg den 3. Oktober 1905.

## Vorlesungen über Geschichte der mathematischen Wissenschaften.

— An der Universität in Berlin hat Professor W. Förster für das Wintersemester 1905/1906 eine zweistündige Vorlesung über Geschichte der neueren Astronomie angekündigt.

— At the university of Colorado Miss R. L. Carstens will deliver during the academic year 1905—1906 a course (two lectures each week) on the history of mathematics.

— An der Universität in Jena hat Professor F. Auerbach für das Wintersemester 1905/1906 eine einstündige Vorlesung über die Entwickelung der Physik seit hundert Jahren angekündigt.

— At the „Columbia university“ (New York) Professor D. E. Smith will deliver during the academic year 1905—1906 a course (two lectures each week) on the history of mathematics.

— An der Universität in Straßburg hat Professor M. Simon für das Wintersemester 1905/1906 eine zweistündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik im Altertum angekündigt.

— M. A. Favaro a été chargé du cours d'histoire des mathématiques à l'université de Padova. C'est la première fois qu'un cours officiel de l'histoire des mathématiques soit professé en Italie (cf. Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, p. 428).

### Preisfragen gelehrter Gesellschaften.

— *Akademie der Wissenschaften in Berlin.* Preisaufgabe der Steiner-Stiftung für das Jahr 1909 (vgl. Biblioth. Mathem. $1_3$, 1900, S. 536). Es soll irgend ein bedeutendes, auf die Lehre von den krummen Flächen sich beziehendes, bis jetzt noch nicht gelöstes Problem möglichst mit Berücksichtigung der von J. Steiner aufgestellten Methode und Prinzipien vollständig gelöst werden. Es wird gefordert, daß zur Bestätigung der Richtigkeit und Vollständigkeit der Lösung ausreichende analytische Erläuterungen den geometrischen Untersuchungen beigegeben werden. — Besonders richtet die Akademie die Aufmerksamkeit auf die speziellen Aufgaben, auf welche J. Steiner in der allgemeinen Anmerkung am Schlusse seiner zweiten Abhandlung über Maximum und Minimum bei den Figuren in der Ebene, auf der Kugelfläche und im Raume überhaupt hingewiesen hat.

— *Académie de Belgique à Bruxelles.* Concours de l'année 1906. On demande une contribution à l'étude algébrique et géométrique des formes $n$-linéaires, $n$ étant plus grand que 3 (cf. Biblioth. Mathem. $4_3$, 1903, p. 320).

### Vermischtes.

— An der Versammlung der französischen Mathematiker in Cherbourg 1905, wurde als Gegenstand für die nächste Versammlung u. a. vorgeschlagen: „Über die Historiker der Mathematik von Montucla bis M. Marie". Wahrscheinlich handelt es sich nur um französische Historiker, die eine allgemeine Geschichte der Mathematik verfaßt haben; in der Tat dürfte Marie der letzte der schon verstorbenen französischen Verfassern dieser Art sein. Sonst wäre es wenig angebracht einen Vortrag über die Geschichtsschreiber der Mathematik mit Marie zu schließen.

# Über die Originalität der physikalischen Lehren des Johannes Philoponus.

Von Arthur E. Haas in Göttingen.

In einem vor der Meraner Naturforscherversammlung von 1905 gehaltenen Vortrage[1]) hat Herr E. Wohlwill auf die große Bedentung eines Mannes hingewiesen, dessen Name wohl auf manchem anderen Gebiete häufig genannt wird, den man aber bis jetzt in den meisten geschichtlichen Darstellungen der Physik vergebens suchen mußte. In diesem bisher so wenig beachteten Schriftsteller, dem aristotelischen Kommentator Johannes Philoponus, glaubt Herr Wohlwill den Vermittler zwischen Aristoteles und Galilei gefunden zu haben, einen Denker, dessen Anschauungen die weite Kluft zwischen antiker und moderner Physik überbrückten. Aus den interessanten Ausführungen ist aber nur schwer zu ersehen, wodurch des Johannes Ruhm eigentlich gerechtfertigt ist und ob die Beachtung, die ihm geschenkt wird, noch in anderem ihren Grund hat als in dem glücklichen Zufalle, daß sich seine umfangreichen Abhandlungen erhalten haben, während die Werke bedeutenderer Physiker mittlerweile ganz oder zum Teile verloren gegangen sind.

Daß die Lehre von der dem Bewegten *eingeprägten Kraft* sich bereits bei Hipparch (um 150 v. Chr.) findet, hebt Herr Wohlwill selbst hervor. Da, soweit es sich um die ersten Prinzipien der Mechanik handelt, von einer reformatorischen Tätigkeit des alexandrinischen Astronomen aber nichts bekannt ist, so kann man sogar vielleicht annehmen, daß seine Auffassung schon vor ihm verbreitet und von manchen anerkannt gewesen sein mag. Auch daß die Ansichten des Johannes über die *Fallbewegung* vor ihm nie ausgesprochen wurden, ist ziemlich unwahrscheinlich. Hätte er die Proportionalität zwischen Geschwindigkeit und Gewicht auf Grund eigener Beobachtungen bestritten, so hätte er diese bei seiner gewohnten Weitschweifigkeit wohl ausführlich beschrieben; und der erste, der den

1) Emil Wohlwill, *Ein Vorgänger Galileis im 6. Jahrhundert;* Vortrag, gehalten in der Abteilung für Geschichte der Medizin und der Naturwissenschaften der Naturforscherversammlung zu Meran. Physikalische Zeitschrift 7, 1906, S. 23—32.

Satz des ARISTOTELES bekämpfte, daß die Geschwindigkeit im umgekehrten Verhältnisse zur Dichte des Mediums stehe, war er wohl auch nicht. Denn die Epikureer, denen die aristotelische Physik gewiß nicht unbekannt war, lehrten, daß sich im absolut leeren Raume alles mit gleicher und zwar sehr großer, aber keineswegs unendlicher Schnelligkeit bewege.[1]) Am originellsten scheinen auf den ersten Blick die Ansichten des PHILOPONUS über die *natürliche Bewegung* und die *Schwere* der Körper zu sein. Doch soll im folgenden zu zeigen versucht werden, daß auch sie — wenigstens zum Teile und in ihrem Kerne — um fast tausend Jahre älter sind als der Kommentar des JOHANNES.

Aus den daraus zitierten Stellen könnte man den Eindruck gewinnen, als ob ARISTOTELES die Ursache der natürlichen Bewegung in der Wirksamkeit des Zieles der Bewegung gesucht habe, während sie PHILOPONUS als ein Neuerer in die Körper selbst verlege. Die aristotelische Auffassung der verallgemeinerten Bewegung als einer *Entelechie*, d. h. eines Überganges von der Möglichkeit in die Wirklichkeit oder, wie sich auch ARISTOTELES ausdrückt, von Stoff (*ὕλη*) in Form (*εἶδος*), legt allerdings den Gedanken nahe, daß bei der Bewegung nicht nur der Stoff, sondern auch die Form wirksam sein müsse. Es ist dies um so mehr der Fall, als ARISTOTELES in dem zweiten Buche „über das Entstehen und Vergehen" lehrt: „Es ist die Eigenschaft des Stoffes, Einwirkungen zu erfahren und bewegt zu werden, das Bewegen und Wirken aber ist Sache einer anderen Kraft" (*περὶ γενέσεως καὶ φθορᾶς*, II, 9, ed. BEKKER 355b: *τῆς μὲν γὰρ ὕλης τὸ πάσχειν ἐστὶ καὶ τὸ κινεῖσθαι, τὸ δὲ κινεῖν καὶ ποιεῖν ἑτέρας δυνάμεως*). Daß andrerseits die natürliche Bewegung nur ein Spezialfall der Entelechie ist, erklärt ARISTOTELES in der Schrift über das Himmelsgebäude mit den Worten: „Die Bewegung eines jeden an seinen natürlichen Ort ist die Bewegung in seine eigene Form" (*περὶ οὐρανοῦ*, IV, 3, 310a: *τὸ δ' εἰς τὸν αὑτοῦ τόπον φέρεσθαι ἕκαστον τὸ εἰς τὸ αὑτοῦ εἶδός ἐστι φέρεσθαι*).

Es war aber ARISTOTELES *selbst*, der trotzdem hinsichtlich der Ursache der Bewegung einer Art der allgemeinen Bewegung, und zwar gerade der hier in Betracht kommenden, nämlich der *räumlichen Veränderung* (*φορά*) eine *Sonderstellung* zugesteht.[2]) Er erwähnt bei der Besprechung der Ursachen der Bewegung, daß bisweilen schon das Heilbare (*ὑγιαστόν*) und das Vermehrungsfähige (*αὐξητόν*) *aus sich selbst heraus* (*ἐξ αὑτῶν*) in

1) Vgl. DIOGENES LAËRTIUS, *περὶ βίων* usw., X, § 61 (EPIKURS Brief an HERODOT *περὶ τῶν φυσικῶν*) und LUCRETIUS, *De rerum natura* II, V. 161f., V. 238f.

2) ARISTOTELES unterscheidet bekanntlich (Physik VIII, 7, 260a) drei Arten der Bewegung (*κίνησις*): die quantitative Änderung (*κατὰ μέγεθος*), nämlich die Zu- und Abnahme (*αὔξησις καὶ φθίσις*), die qualitative (*κατὰ πάθος*) oder die *ἀλλοίωσις* und die räumliche (*κατὰ τόπον*) oder die Raumbewegung (*φορά*).

Gesundheit und Zunahme übergehen; und nach der Anführung dieser beiden Beispiele (für qualitative und quantitative Änderung) fährt er so fort: „Weit mehr hingegen als diese scheinen das Schwere und das Leichte in sich selbst den Anfang der Bewegung zu haben, weil nämlich ihr Stoff dem wirklichen Sein am nächsten ist" (*περὶ οὐρανοῦ* IV, 3, 310b: *μᾶλλον δὲ τὸ βαρὺ καὶ τὸ κοῦφον τούτων ἐν ἑαυτοῖς ἔχειν φαίνεται τὴν ἀρχὴν διὰ τὸ ἐγγύτατα τῆς οὐσίας εἶναι τὴν τούτων ὕλην*). Die bevorzugte Stellung der Raumbewegung wird im achten Buche der Physik (cap. 7) damit begründet, daß durch sie die quantitative und qualitative Veränderung erst bedingt seien, daß diese beiden nicht ohne gleichzeitiges Auftreten der räumlichen Veränderung stattfinden, diese aber wohl für sich allein bestehen könne. Auch an dieser Stelle äußert sich Aristoteles dahin, daß der Fall, daß sich etwas selbst bewege, am meisten und im eigentlichen Sinne bei der Raumbewegung eintrete (*φυσικὴ ἀκρόασις*, VIII, 7, 261a: *μάλιστα δὲ δῆλον ὅτι τὸ κινοῦν αὐτὸ αὑτὸ μάλιστα ταύτην κινεῖ κυρίως τὴν κατὰ τόπον*).

Wie die Bewegung eines Dinges „aus sich selbst" zu verstehen sei, wird näher im vierten Kapitel des achten Physikbuches ausgeführt. Hier sucht Aristoteles gleichsam seine Inkonsequenz zu rechtfertigen und (freilich zum Teile nur durch Wortspielereien) zu zeigen, daß die Ausnahme, die er in der Tat doch der räumlichen Bewegung zugesteht, nur eine scheinbare sei. Er behauptet nämlich, daß auch bei dem, was sich nach der gewöhnlichen Annahme selbst bewege, immer noch von einer, wenn auch weit abseits liegenden, *äußeren* Ursache die Rede sein könne. Das Leichte und Schwere würden z. B. „entweder von demjenigen bewegt, das sie als Leichtes oder Schweres erzeugte oder zu solchen machte oder das sie Hindernde und Hemmende löste" (VIII, 4, 256a: *ἢ γὰρ ὑπὸ τοῦ γεννήσαντος καὶ ποιήσαντος κοῦφον ἢ βαρύ, ἢ ὑπὸ τοῦ τὰ ἐμποδίζοντα καὶ κωλύοντα λύσαντος*). Als Beispiel für den zuletzt genannten Fall werden das Wegziehen einer stützenden Säule oder das Wegnehmen eines Steines von einem auf dem Wasser schwimmenden Schlauche angeführt. Der zuert erwähnte Fall zeigt aber ganz deutlich, daß die äußere Ursache der Bewegung *zeitlich unbegrenzt vor* dieser liegen kann, und da nun Aristoteles von einem Beharrungsvermögen im Newtonschen Sinne nichts weiß, also auch zur Aufrechterhaltung einer Bewegung etwas Wirkendes für notwendig erachtet, gibt er ja zu, daß die *eigentliche Ursache der Bewegung doch eine innere sein müsse*, was er an anderen Stellen (s. früheres) ohnedies unumwnnden erklärt. Wie immer aber auch das Verhältnis zwischen äußerer und innerer Ursache sein mag, das eine geht schon aus den angeführten Beispielen für jene unzweifelhaft hervor: daß die Annahme einer von der Form (dem Mittelpunkte oder der

Peripherie des Alls) auf die Körper ausgeübten *Anziehungskraft* der aristotelischen Auffassung *durchaus ferne* lag. Es ist jedesfalls die Deutung Prantls die richtigere, der in der fraglichen Stelle[1]) *δύναμις* mit „Geltung“ übersetzte, und Johannes hat hier einen Fehler bekämpft, der in Wirklichkeit nie gemacht worden war, — noch dazu mit Beweisgründen, die schon Aristoteles vorgebracht hatte.

Daß dem Mittelpunkte des Alls noch eine weitere als eine bloß geometrische Bedeutung zukommen solle, hat übrigens vor Philoponus schon Lucrez auf das entschiedenste bestritten.[2]) „Hüte dich sehr,“ ruft er in seinem großen Lehrgedichte (*De rerum natura*) dem Freunde Memmius zu, „vor der Annahme, daß alles zu einem sogenannten Mittelpunkte der Welt hinstrebe“ (I, V. 1046: Illud in his rebus longe fuge credere, Memmi, In medium summae quod dicunt omnia niti). Vor allem weudet er sich gegen die Ansicht, als könnte der Mittelpunkt die zu ihm gelangenden Körper festhalten. „Ein jeder Ort und jede Stelle im Leeren müssen, ob nun im Mittelpunkte oder nicht, in gleicher Weise den schweren Körpern weichen, wohin auch immer sich diese bewegen“ (I, V. 1068: Omnis enim locus ac spatium, quod inane vocamus, Per medium, per non medium concedere debet Aeque ponderibus, motus qua cumque feruntur).

Wenn nun Johannes das Streben nach geometrischen Gebilden, mit dem Aristoteles die Erscheinungen der Schwere und Leichtigkeit zu erklären suchte, durch das *Verlangen nach Vereinigung mit dem Ganzen und dem Verwandten* ersetzt wissen will, so ist hierin wohl am ehesten ein Einfluß Platons zu erblicken. Es ist ja auch aus anderen Gebieten der Wissenschaft bekannt, daß Philoponus, wie die meisten Denker seiner Zeit, aristotelische Lehren mit platonischen (und teilweise auch neuplatonischen) Anschauungen zu verschmelzen suchte. Denn ganz ähnliche Gedanken über die Ursache der natürlichen Bewegung finden sich bei Philoponus und in Platons Dialoge „Timaios“.[3])

Dort wird als der Kern der platonischen Schweretheorie vorgetragen, daß allem das Streben zum Verwandten gemein sei und daß es dieses sei, das das Bewegte schwer mache (63 E: *τόδε γε μὴν ἕν τι διανοητέον*

1) Physik IV, 1, 208b: *ἔτι δὲ αἱ φοραὶ τῶν φυσικῶν σωμάτων καὶ ἁπλῶν, οἷον πυρὸς καὶ γῆς καὶ τῶν τοιούτων, οὐ μόνον δηλοῦσιν ὅτι ἔστι τι ὁ τόπος, ἀλλ᾽ ὅτι καὶ ἔχει δύναμιν.*

2) Lucrez (96—24 v. Chr.) leugnet, daß es einen Mittelpnnkt im unbegrenzten All üherhaupt geben könne. Die folgenden Einwände erhebt er nur unter dieser irrealen Voraussetzung. Es darf wohl angenommen werden, daß auch schon Epikur die Gravitation nach dem Mittelpunkte hekämpft hat; doch findet sich nichts darüber in den spärlich erhaltenen Bruchstücken.

3) Manche Äußerungen des Johannes erinnern auch an die Alles bewegende Liebe des Empedokles; z. B. S. 599, Z. 23: *πᾶν γαρ τοῦ συγγενοῦς ἐρᾷ.*

*περὶ πάντων αὐτῶν, ὡς ἡ μὲν πρὸς τὸ ξυγγενὲς ὁδὸς ἑκάστοις οὖσα βαρὺ μὲν τὸ φερόμενον ποιεῖ . . .*). Das Ziel des Strebens ist zugleich der Ort, wo sich das *meiste* von demselben Stoffe befindet, wie bei Johannes das *Ganze*, dem sein Teil zueilt. Es geht dies aus einem bei Plato erwähnten Beispiele hervor. Er spricht von einem Orte im Weltall, zu dem das Feuer vor allem seiner Natur nach bestimmt ist, und wo auch das *meiste* von dem beisammen ist, zu dem es sich hinbewegt (63 B: *εἴ τις ἐν τῷ τοῦ παντὸς τόπῳ καθ' ὃν ἡ τοῦ πυρὸς εἴληχε μάλιστα φύσις, οὗ καὶ πλεῖστον ἂν ἠθροισμένον εἴη πρὸς ὃ φέρεται, . . .*). Auch ein Gedanke, auf den Johannes großen Nachdruck legt, daß durch die *göttliche Ordnung* jedem Stoffe ein Ort zugewiesen sei, tritt uns bei Platon auf das bestimmteste entgegen. Nach dessen Ansicht war die Lage der einzelnen Stoffe vor der Weltschöpfung ganz ungeordnet, und erst durch die eingreifende Tätigkeit des ordnenden Gottes nahm jeder der Stoffe einen bestimmten Platz ein. Diesen Vorgang beschreibt Plato so: „Alles wurde bewegt, von einander geschieden und das eine dahin, das andere dorthin gebracht; wie in Sieben und anderen zum Reinigen des Getreides bestimmten Geräten die geschüttelten und geworfelten Körner, von denen die dicken und schweren zu einer anderen Stelle niederfallen als die dünnen und leichten. Damals nun wurden ebenso die vier Grundstoffe von ihrem Behälter, dessen Bewegung eine Erschütterung wie derartige Geräte verursachte, geschüttelt, und sie schieden das ihnen Unähnlichste von sich und brachten das Ähnlichste an einen Platz zusammen. Bevor aus ihnen die geordnete Welt hervorging, nahm jedes von ihnen eine andere Stelle ein“ (Timaios 52 E: *τὰ δὲ κινούμενα ἄλλα ἄλλοσε ἀεὶ φέρεσθαι διακρινόμενα, ὥσπερ τὰ ὑπὸ τῶν πλοκάνων τε καὶ ὀργάνων τῶν περὶ τὴν τοῦ σίτου κάθαρσιν σειόμενα καὶ ἀναλικνώμενα τὰ μὲν πυκνὰ καὶ βαρέα ἄλλῃ, τὰ δὲ μανὰ καὶ κοῦφα εἰς ἑτέραν ἵζει φερόμενα ἕδραν· τότε οὕτω τὰ τέτταρα γένη σειόμενα ὑπὸ τῆς δεξαμενῆς, κινουμένης αὐτῆς οἷον ὀργάνου σεισμὸν παρέχοντος, τὰ μὲν ἀνομοιότατα πλεῖστον αὐτὰ ἀφ' αὐτῶν ὁρίζειν, τὰ δ' ὁμοιότατα μάλιστα εἰς ταὐτὸν ξυνωθεῖν, διὸ δὴ καὶ χώραν ταῦτα ἄλλα ἄλλην ἴσχειν, πρὶν καὶ τὸ πᾶν ἐξ αὐτῶν διακοσμηθὲν γενέσθαι*). Daß dieser Vorgang nicht nur während des Schöpfungsaktes stattfand, sondern sich infolge des unaufhörlichen Überganges der Elemente ineinander fortwährend wiederholt, zeigt Platon an einer späteren Stelle (57, B).

Es erübrigt nun noch zum Schlusse, über den Ursprung einer in späterer Zeit auch bei Koppernikus vertretenen Meinung zu berichten, daß nämlich die geradlinige Bewegung der Ausdruck einer gewissen Unvollkommenheit sei. Es sei vor allem auf eine Stelle im Kommentar des Simplicius *(in libros de coelo)* hingewiesen: Es haben bekanntlich

Ptolemäus in seinem Buche über die Grundstoffe und in seiner Optik, ferner der große Plotin, auch Xenarch in seinen Einwänden gegen das fünfte Element (die aristotelische Quintessenz) gelehrt, daß die geradlinige Bewegung den Elementen nur zukomme, wenn sie noch im Entstehen begriffen seien und wenn sie sich an einem ihrer Natur entgegengesetzten Orte befänden, aber nicht mehr, wenn sie den natürlichen eingenommen hätten (ed. Heiberg, S. 20, Z. 10: *ἰστέον δέ, ὅτι καὶ Πτολεμαῖος ἐν τῷ Περὶ τῶν στοιχείων βιβλίῳ καὶ ἐν τοῖς Ὀπτικοῖς καὶ Πλωτῖνος ὁ μέγας καὶ Ξέναρχος δὲ ἐν ταῖς Πρὸς τὴν πέμπτην οὐσίαν ἀπορίαις τὴν μὲν ἐπ' εὐθείας κίνησιν τῶν στοιχείων γινομένων ἔτι καὶ ἐν τῷ παρὰ φύσιν ὄντων τόπῳ, ἀλλὰ μήπω τὸν κατὰ φύσιν ἀπειληφότων εἶναί φασι*). Auch die Stoiker unterschieden nach Johannes Stobaeus das irdische (also an naturwidriger Stelle befindliche) Feuer, das sich geradlinig, und das himmlische, das sich in kreisförmiger Bahn bewege (*Eklogai* I, cap. 15, § 1: *καὶ τὸ μὲν περίγειον φῶς κατ' εὐθεῖαν, τὸ δ' αἰθέριον περιφερῶς κινεῖται*). Diese Anschauungen über die geradlinige Bewegung waren also wohl zu allen Zeiten und jedesfalls schon lange vor Philoponus verbreitet. Die stoische Physik geht, wie aus Stobaeus ersichtlich ist, zum größten Teil auf Zenon zurück, der um 300 v. Chr. lebte, der Peripatetiker Xenarch war ein Zeitgenosse des Augustus; der große Astronom Ptolemäus wirkte um 100 n. Chr., während Plotin, der bedeutendste unter den Neuplatonikern, dem dritten Jahrhundert angehört.

# Sopra una trasformazione di contatto ideata da Fermat.

Di Gino Loria a Genova.

La curva $\Gamma_0$ rappresentata dall' equazione

(1) $$y_0 = f(x)$$

si supponga passare per l' origine $O$ delle coordinate (ortogonali) e se ne chiami $s_0$ l' arco compreso fra il punto $O$ ed il punto $P$ di ascissa $x$; sarà quindi

$$s_0 = \int_0^x \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Si costruisca ora una nuova curva $\Gamma_1$ tale che l' ordinata $y_1$ del punto di essa corrispondente all' ascissa $x$ sia equale a $s_0$; $\Gamma_1$ passerà evidentemento per l' origine ed avrà per equazione

$$y_1 = \int_0^x \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx.$$

$\Gamma_1$ si deduce quindi da $\Gamma_0$ col mezzo della trasformazione geometrica $T$ individuata dalle equazioni seguenti:

$$x_1 = x, \; y_1 = \int_0^x \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx;$$

siccome queste dànno

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2},$$

funzione della sola $x$, così è chiaro che $T$ è una trasformazione di contatto.

Detto $s_1$ l' arco di $\Gamma_1$, contato a partire dell' origine, si potrà similmente costruire una terza curva $\Gamma_2$ tale che, detta $y_2$ l' ordinata del suo punto di ascissa $x$, si abbia $y_2 = s_1$; $\Gamma_2$ è una curva passante per l' origine ed avente per equazione

$$y_2 = \int_0^x \sqrt{2 + [f'(x)]^2}\, dx;$$

essa può ritenersi dedotta direttamente da $\Gamma_0$, applicando a questa curva la trasformazione $T^2$. Similmente, applicando alla stessa $\Gamma_0$ la trasformazione $T^{n-1}$ si avrà una curva $\Gamma_{n-1}$, avente per espressione del suo arco

$$s_{n-1}=\int_0^x\sqrt{n+[f'(x)]^2}\,dx$$

e quindi alla curva $\Gamma_n$ di equazione

$$(2)\qquad y_n=\int_0^x\sqrt{n+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Notisi che della trasformazione $T$ esiste l' inversa $T^{-1}$ e che, applicandola $n$ volte di seguito alla stessa curva di partenza $\Gamma_0$, si giunge alla curva $\Gamma_{-n}$ avente per equazione

$$(3)\qquad y_{-n}=\int_0^x\sqrt{-n+[f'(x)]^2}\,dx.$$

Le quadrature indicate nelle formole (2), (3) sono evidentemente tutte della stessa natura, eccezione fatta di quella per cui $n=0$, che è sempre eseguibile; onde, se una di esse è effettuabile, tali saranno tutte le altre. Emerge da ciò che la trasformazione $T$ è un metodo di derivazione che abilita a dedurre da una curva rettificabile infinite altre e quindi a scoprire relazioni notevoli fra curve differenti. Essa venne ideata da FERMAT, il quale ne fece applicazioni importanti, senza però presentarlo con la piena generalità sotto cui è così facile enunciarlo, giovandosi dei simboli e dei concetti moderni.

Una di tali applicazioni s' incontra fra le celebri *Ad* LALOVERAM *propositiones*[1]) e merita di essere rilevata.

Si supponga che la curva $\Gamma_0$ sia la parabola

$$y^2=2px;$$

allora $\Gamma_{n-1}$ sarà la curva di equazione

$$y_{n-1}=\int_0^x\sqrt{n-1+\frac{p}{2x}}\,dx.$$

Ora è facile accertarsi che

$$s_{n-1}=\int_0^a\sqrt{n+\frac{p}{2x}}\,dx=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{na}\sqrt{1+\frac{p}{2x}}\,dx,$$

quindi

$$(4)\qquad \frac{\int_0^{na}\sqrt{1+\frac{p}{2x}}\,dx}{\int_0^a\sqrt{n+\frac{p}{2x}}\,dx}=\sqrt{n},$$

relazione che il FERMAT enuncia in parole con piena generalità e precisione[2]). Ed aggiunge un teorema, concernente le aree generate dalla

1) *Oeuvres de* FERMAT, éd. TANNERY et HENRY, T. I p. 201 e T. III p. 173.

2) L. c.

rotazione attorno a $Ox$ delle curve considerate, il quale esprime la seguente identità

(5)
$$\frac{2\pi\int_0^{na}(x-na)\sqrt{1+\frac{p}{2(x-a)}}\,dx}{2\pi\int_0^{a}(x-a)\sqrt{n+\frac{p}{2(x-a)}}\,dx}=\sqrt{n^3}.$$

Un' altra applicazione della trasformatione $T$, lievemente modificata, poggia ancora sulla supposizione che $\Gamma_0$ sia una parabola; ma l' equazione di questa devesi supporre posta sotto la forma

$$\left(\frac{x+l}{l}\right)^2=\frac{y+m}{m}.$$

$\Gamma_0$ passa pel punto $(-l,-m)$, ha per parametro $p=-\frac{l^2}{2m}$ e per differenziale dell' arco

(6)
$$ds_0=\sqrt{1+\left(\frac{x+l}{p}\right)^2}\,dx=\frac{1}{p}\sqrt{p^2+z^2}\,dz,$$

essendo $z=x+l$. Volendo che $\Gamma_1$ si diparta del medesimo punto, porremo

$$y_1+m=\int_{-l}^{x}\sqrt{1+\left(\frac{x+l}{p}\right)^2}\,dx.$$

Ripetendo sopra $\Gamma_1$ la stessa operazione e così continuando si perviene alla curva $\Gamma_n$ di equazione

$$y_n+m=\int_{-l}^{x}\sqrt{n+\left(\frac{x+l}{p}\right)^2}\,dx;$$

per essa il differenziale dell' arco è

$$ds_n=\frac{1}{p}\sqrt{(n+1)p^2+(x+l)^2}\,dx;$$

posto quindi

$$x+l=\frac{z}{\sqrt{x+1}},\quad p_n=(n+1)p,$$

si può scrivere

(6)
$$ds_n=\frac{dz}{p_n}\sqrt{p_n^2+z^2}.$$

Paragonando questa espressione a quella di $ds_0$ si vede subito essere $ds_n$ il differenziale dell' arco di una parabola avente per parametro $p_n=(n+1)p$, onde $\Gamma_n$ è rettificabile per mezzo di archi di parabola; altro risultato che Fermat pubblicò fra le succitate *Propositiones ad Laloveram*[1]).

A Fermat sembra essere sfuggito (e ne venne vivamente rimproverato dal Wallis[2])) che la trasformazione $T$ può guidare ad una curva $\Gamma_1$ identica a $\Gamma_0$[3]). Ciò accade quando $\Gamma_0$ è la parabola semicubica di equazione

1) L. c.

2) Cfr. Zeuthen, Bull. de l'acad. d. sc. de Danemark 1895, p. 75.

3) *Oeuvres de Fermat*, T. I p. 263 e T. III p. 202.

$$x^3 = \frac{3^2}{2^2} p y_0^2.$$

Infatti, essendo in conseguenza

$$s_0 = \int_0^x dx \sqrt{1 + \frac{x}{p}} = \frac{3}{2} \left\{ \sqrt{\frac{(x+p)^3}{p}} - p \right\},$$

come equazione della curva $\Gamma_1$ assumeremo

$$y_1 + \frac{2p}{3} = \frac{2p}{3} \left\{ \sqrt{\frac{(x+p)^3}{p}} - p \right\}$$

o anche

$$(x+p)^3 = \frac{3^2}{2^2} p \left( y_1 + \frac{2p}{3} \right)^2;$$

$\Gamma_1$ è pertanto una parabola semicubica identica a $\Gamma_0$. In generale $\Gamma_n$ avrà per equazione

$$(x + np)^3 = \frac{3^2}{2^2} p \left( y_n + \frac{2p}{3} n^{\frac{3}{2}} \right)^2,$$

che evidentemente non differisce della $\Gamma_0$ se non per la sua posizione rispetto agli assi di riferimento.

Questa svista (forse solo apparente) di Fermat non toglie nulla ai meriti insigni che lo fecero collocare in prima linea fra i geometri che, pur senza adoperare l' algoritmo del calcolo infinitesimale, ma solo applicando considerazioni del tipo di quelle inventate da Archimede, seppero felicemente risolvere difficili questioni di rettificazioni, quadrature e cubature. Quanto precede porge notevoli esempi di trasformazioni di integrali definiti; ma non sono gli unici che si potrebbero addurre interpretando, al lume de' nostri concetti moderni, molti passi delle opere del sommo tolosano[1]).

1) Per altro esempio veggasi la mia opera *Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven* (Leipzig 1902), p. 475—476.

# Die magischen Kreise in der japanischen Mathematik.

Von T. HAYASHI in Tokyo.

Bekanntlich hat BENJAMIN FRANKLIN[1]) im Jahre 1769 die Konstruktion gewisser Figuren, die magische Kreise genannt werden, angegeben. Aber schon 100 Jahre früher hatten sich japanische Mathematiker mit ähnlichen Figuren beschäftigt. Der erste, der meines Wissens diesen Gegenstand behandelt hat, ist YOSHINORI ISOMURA (Geburts- und Todesjahr unbekannt), der 1660 eine Arbeit *Sampō-ketsugishō* verfaßte. Von dieser Arbeit findet sich eine zweite durchgesehene und vermehrte Auflage vom Jahre 1684, wo im zweiten Teile die magischen Kreise unter der Benennung „En-yō-choku" (Kreisanordnung) behandelt werden; auch die Konstruktion magischer Quadrate („Hō-yō-choku") wird hier gelehrt, und zwar werden für diesen Zweck zwei Methoden angegeben.

Die Aufgabe, die ISOMURA „En-yō-choku" nannte, kann auf folgende Weise ausgedrückt werden: „Gegeben sei eine Anzahl ($n$) konzentrischer Kreise mit ebenso vielen Durchmessern des größten Kreises; diese Durchmesser schneiden natürlich jeden Kreis in $2n$ Punkte, so daß es zusammen $2n^2$ Punkte gibt, und jeder Punkt wird als eine Zelle betrachtet, die mit einer der Zahlen $2, 3, \ldots, 2n^2+1$ besetzt werden soll, so daß die Summe der Zahlen jedes Kreises und jedes Durchmessers konstant ist". ISOMURA betrachtete auch den Mittelpunkt der Kreise als eine Zelle, setzte darin 1 ein und berechnete überall diese Eins mit, aber dieser Umstand

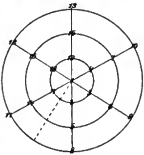


Fig. 1.

[1]) *Experiments and observations on electricity. To whith are added Letters and papers on philosophical subjects* (London 1769); siehe C. DAVIES and W. G. PECK, *Mathematical dictionary and cyclopedia of mathematical science* (1869), S. 350; W. AHRENS, *Mathematische Unterhaltungen und Spiele* (Leipzig 1901), S. 246, 406.

hat selbstverständlich für die Konstruktion der magischen Kreise keine Bedeutung. Für $n = 3$ gibt Isomura den obigen magischen Kreis an (Fig. 1). Wie dieser konstruiert worden ist, wird unmittelbar klar, wenn man unter Bezugnahme auf die punktierte Gerade die Zahlen auf folgende Weise schreibt:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 4 | 19 | 18 | 17 |
| 5 | 6 | 7 | 16 | 15 | 14 |
| 8 | 9 | 10 | 13 | 12 | 11 |
| 19 | 18 | 17 | | | |
| 16 | 15 | 14 | | | |
| 13 | 12 | 11 | | | |

Die drei ersten Horizontalreihen entsprechen den Zahlen der Kreise, die drei ersten Vertikalreihen dagegen den Zahlen der Durchmesser.

Für $n = 5$ gibt Isomura den folgenden magischen Kreis an (Fig. 2); hier ist die Art der Konstruktion weniger einleuchtend.

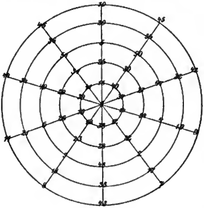


Fig. 2.

Für beliebiges $n$ ist es leicht die Konstruktion magischer Kreise anzugeben, wenn man bemerkt, daß die Summe der $2n^2$ Zahlen $2, 3, \ldots, 2n^2 + 1$ gleich

$$\tfrac{1}{2}(2n^2+1)\ (2n^2+2) - 1$$

ist, so daß zwei Zahlen zusammen im Durchschnitt

$$[\tfrac{1}{2}(2n^2+1)(2n^2+2) - 1] : n^2 = 2n^2 + 3$$

betragen. Nennt man jetzt zwei Zellen korrespondierend, die auf demselben Kreise und demselben Durchmesser liegen, und nennt man ebenso zwei Zahlen korrespondierend (japanisch „sō-tai-sū"), deren Summe gleich $2n^2 + 3$ ist, so erhält man die Regel: „Man schreibt die $n^2$ Zahlen $2, 3, \ldots, n^2 + 1$ in $n^2$ Zellen und beobachtet dabei nur, daß, wenn eine Zelle besetzt ist, ihre korrespondierende Zelle frei wird; dann schreibt man die noch übrigen $n^2$ Zahlen $n^2 + 2,\ n^2 + 3, \ldots, 2n^2 + 1$ in die noch freien Zellen, so daß zwei korrespondierende Zellen immer mit zwei korrespondierenden Zahlen besetzt sind".

Isomura gab die magischen Kreise für $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ an. In seinem Buche *Sanso* (1663) konstruierte Shigekiyo Matsumura magische Kreise für $n = 8$. Der berühmte Mathematiker Takakazu Seki oder

Kōwa Seki (1642—1708) behandelte die Frage in seiner Arbeit *Shichi-bu-sho* (Sieben Bücher), wo auch verwandte Probleme (z. B. Konstruktion magischer Quadrate) gelöst werden. Eine andere Art magischer Kreise, wo die Mittelpunktszelle nicht 1, sondern eine andere der $2n^2+1$ ersten Zahlen enthält, wurde 1743 von Genjun Nakane in der Schrift *Kanja-otogi-sōshi* konstruiert. Auch die spätere mathematische Literatur in Japan enthält Untersuchungen über magische Kreise.

# On two differential equations in Lagrange's „Mécanique analytique".

By PHILIP E. B. JOURDAIN (Broadwindsor).

I have briefly noticed, in a note to a paper in the Quarterly journal of mathematics[1]), that LAGRANGE had already referred to the case of non-integrable linear differential equations occuring among the equations of condition of a mechanical problem. This consideration was, however, undeveloped, and LAGRANGE did not realise the importance which this case is now known to have, as being the case of non-holonomy.

Further, the usual statement[2]) is that LAGRANGE did not consider the case of the equations of condition containing the time explicitly, and that this extension was first made by J. VIEILLE[3]) in 1849, is incorrect.

In the following note I shall substantiate these two remarks.[4])

## § 1.

In the part entitled „Statique, I^re^ partie, 4^e^ section" of his *Mécanique*[5]), LAGRANGE denoted by

$$L = 0,\ M = 0,\ N = 0, \ldots,$$

the different equations of condition given by the nature of the system, the quantities $L$, $M$, $N$, . . . , being finite functions of the variables

1) Page 62 of *On the general equations of mechanics;* Quart. journ. of mathem. 34, 1904, p. 61—79.

2) See e. g. ROUTH, *The elementary part of a treatise on the dynamics of a system of rigid bodies*, 6th ed. (London, 1897), p. 316; A. VOSS, *Die Prinzipien der rationellen Mechanik; Encyklop. der mathem. Wiss.*, Bd. 4 : 1 (1901), p. 81.

3) Journ. de mathém. 14 (1849), p. 201.

4) My references are to the *first* edition of the *Mécanique analytique* (under the title: *Méchanique analitique*, Paris 1788). The reprint in the *Oeuvres de LAGRANGE* (t. XI and XII) was after the third edition, and the passages quoted in § 1 above correspond to t. XI, p. 78, 87, 336 of this reprint.

5) LAGRANGE, op. cit. p. 45, 53.

$x, y, z, x', y', z', \ldots$ (the rectangular coordinates of the various particles of the system); and the „general equation of equilibrium"[1]) is of the form:

$$Pdp + Qdq + \ldots + \lambda dL + \mu dM + \ldots = 0,$$

where $\lambda, \mu, \ldots$, are undetermined quantities. But LAGRANGE adds: „En général nous représenterons par

$$dL = 0,\ dM = 0,\ \ldots,$$

les équations de condition entre ces différentielles, soit que ces équations soient elles-mêmes des différences exactes ou non, pourvu que les différentielles n'y soient que linéaires". And again, where now $\delta$ takes the place of the $d$ not quite properly used before: „Au reste, on observera qu'il n'est pas nécessaire que $\delta L$, $\delta M$, ..., soient les variations exactes de fonctions de $x, y, z, dx, dy, \ldots$, mais qu'il suffit que $\delta L = 0$, $\delta M = 0, \ldots$, soient les équations de condition indéterminées entre les variations de $x, y, z, dx, dy, \ldots$."

LAGRANGE does not return again to this more general supposition, and soon afterwards[2]) refers to the „finite equatious of condition $L = 0$, $M = 0, \ldots$" as serving to complete the determination of the coordinates after the unknowns in LAGRANGE's method of multipliers are eliminated.

In the „Dynamique, 2e partie, sect. IV., § 9"[3]), LAGRANGE refers to the above treatment; but in the derivation of the LAGRANGE's equations, expressed in terms of the *least* possible number of coordinates $q_\nu$:

$$Q_\nu = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_\nu}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, r)$$

from D'ALEMBERT's principle:

$$\sum_r \{(X_r - m_r x''_r)\delta x_r + (Y_r - m_r y''_r)\delta y_r + (Z_r - m_r z''_r)\delta z_r\} = 0,$$

the assumption is made that the equations of condition between the rectangular coordinates of the particles of the system are finite equations

This assumption is, indeed, necessary; for the transformation

$$\sum_r m_r\left(x'_r \frac{d}{dt}\frac{\partial x'_r}{\partial q'_\nu} + y'_r \frac{d}{dt}\frac{\partial y'_r}{\partial q'_\nu} + z'_r \frac{d}{dt}\frac{\partial z'_r}{\partial q'_\nu}\right) = \frac{\partial T}{\partial q_\nu}$$

requires the conditions

$$\frac{\partial x'}{\partial q'_\nu} = \frac{\partial x}{\partial q_\nu},\ \frac{\partial y'}{\partial q'_\nu} = \frac{\partial y}{\partial q_\nu},\ \frac{\partial z'}{\partial q'_\nu} = \frac{\partial z}{\partial q_\nu},$$

and hence that all the equations of condition should be integrable, that is to say, that the dynamical system should be holonomous.[4])

1) LAGRANGE, op. cit. p. 46. — 2) LAGRANGE, op. cit. p. 47. — 3) LAGRANGE, op. cit. p. 227.

4) Cf. JOURDAIN, Mathem. gazette 2 (1903), p. 339—340.

But LAGRANGE only mentions the case of the reduction of the number of parameters to the least possible, and seems to prefer, in general, to keep a greater number of (not all independent) parameters, and to eliminate the superfluous ones afterwards by his method of multipliers. For he says[1]):

„Mais quoiqu'on puisse toujours ramener la question à cet état, puisqu'il ne s'agit que d'éliminer par les équations de condition, autant de variables qu'elles permettent de le faire, et de prendre ensuite pour $\xi$, $\psi$, $\varphi$, . . ., les variables restantes; il peut néanmoins y avoir des cas où cette voie soit trop pénible, et où il soit à propos, pour ne pas trop compliquer le calcul, de conserver un plus grand nombre de variables. Alors les équations de condition auxquelles on n'aura pas encore satisfait, devront être employées à éliminer dans la formule générale, quelques-unes des variations $\delta\xi$, $\delta\psi$, . . .; mais au lieu de l'élimination actuelle, il sera plus simple d'employer la méthode exposée dans la quatrième section de la première partie“.

LAGRANGE then obtains the equations of mechanics in the form:

$$\Xi + \lambda \frac{\partial L}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial M}{\partial \xi} + \ldots = 0,$$

$$\Psi + \lambda \frac{\partial L}{\partial \psi} + \mu \frac{\partial M}{\partial \psi} + \ldots = 0,$$

$$\ldots,$$

which is substantially identical with what I have called[2]) „ROUTH's extension of LAGRANGE's equations“, which form is valid *for non-holonomous systems also*.[3]) But LAGRANGE, as appears from his use of $\frac{\partial L}{\partial \xi}$, $\frac{\partial M}{\partial \xi}$, . . ., does not appear to have realised fully that these equations apply almost at once even when $L$, $M$, . . ., cannot be found.

## § 2.

LAGRANGE treats quite explicitly the case of the time $t$ occuring among the new variables (generalised coordinates) used in the transformation of a dynamical problem.

With regard to the distinction between the variations (marked by $\delta$) and the differentials (marked by $d$), LAGRANGE says[4]):

„En général, il faut remarquer relativement aux *variations*, qu'elles ne se rapportent qu'à l'espace et non à la durée, ensorte que dans les

1) LAGRANGE, op. cit. p. 226—227.

2) Quart. journ. of mathem. 34, 1904, p. 63, 65.

3) Ibid. p. 66, 69. Some further notes on the history of the mechanics of non-holonomous systems are to be found in this paper on p. 61, 62, 63, 73.

4) LAGRANGE, op. cit. p. 198; cf. p. 196.

différentiations marquées par $\delta$ la variable $t$, qui représente le tems, devra toujours être regardée comme constante. Or il peut arriver suivant les circonstances du problême que les équations de condition renferment elles-mêmes le tems $t$, auquel cas elles seront, à proprement parler, variables d'un instant à l'autre; alors quelques-unes des coordonnées se trouveront exprimées en fonction des autres coordonnées et de la variable $t$; et il faudra avoir égard à la variabilité de $t$ dans les différentiations marquées par $d$, mais on supposera $t$ invariable dans les différentiations marquées par $\delta$".

And again[1]), referring to the transformation:

$$\mathrm{S}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)$$
$$= \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \xi'} - \frac{\partial T}{\partial \xi}\right)\delta\xi + \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \psi'} - \frac{\partial T}{\partial \psi}\right)\delta\psi + \ldots,$$

he remarks:

„Et cette transformation aura lieu également, quand même parmi les nouvelles variables il se trouveroit le tems $t$, pourvu qu'on le regarde comme constant, c'est-à-dire, qu'on fasse $\delta t = 0$".

Finally, for a third time, he remarks[2]):

„Au reste rien n'empêche que les équations de condition $L = 0$, $M = 0, \ldots$, ne puissent contenir aussi la variable $t$ qui représente le tems; seulement il faudra la regarder comme constante dans la différentiation suivant $\delta$, comme nous l'avons déja prescrit plus haut".

1) Lagrange, op. cit. p. 224.
2) Lagrange, op. cit. p. 228.

# Wilhelm Schmidt (1862—1905).

Von Ferdinand Rudio in Zürich.




Die Hoffnung, der ich noch vor kurzem[1]) Ausdruck gegeben habe, hat sich nicht erfüllen sollen: Wilhelm Schmidt ist am 7. August nach langem, mit Geduld getragenem Leiden in noch nicht vollendetem 43. Jahre an einem Gehirnschlage gestorben. Wenige Tage zuvor hatte ich noch von ihm als Antwort auf meine *Notizen zu dem Berichte des Simplicius*, von denen sich ja einige gegen seine Auffassung wandten, eine überaus herzliche und freudig zustimmende Karte erhalten, und ich glaubte aus den mir so vertrauten Schriftzügen, die ihre frühere Festigkeit wiedererlangt hatten, auf eine endgültige Besserung schließen zu dürfen, — da kam wie ein Schlag aus heiterem Himmel die Nachricht von dem plötzlichen Hinschiede des unvergeßlichen Freundes. Denn so darf ich ihn nennen, obwohl wir uns persönlich nicht gekannt haben.

Mit Wilhelm Schmidt verliert die mathematisch-historische Forschung einen ihrer hervorragendsten Vertreter, die Bibliotheca Mathematica insbesondere einen ihrer gediegensten Mitarbeiter. Die ungewöhnliche Arbeitsenergie, die Schmidt entfaltete, das Geschick, mit dem er die

1) Vierteljahrsschr. d. naturforsch. Gesellsch. in Zürich **50**, 1905, 213, Anm. 3.

schwierigsten Fragen anzupacken wußte, sein erstaunliches Wissen und die Vielseitigkeit seiner Interessen hatten noch zu so manchen schönen Hoffnungen berechtigt — war doch überdies die Zeit, die er seiner wissenschaftlichen Tätigkeit hatte widmen können, nur eine allzu kurz bemessene gewesen.

Das äußere Leben Schmidts war das eines stillen Gelehrten, der von Jugend auf nichts anderes kannte als Mühe und Arbeit. Ich berichte darüber nach den Mitteilungen, die mir Frau Dr. Schmidt freundlichst zur Verfügung gestellt hat.[1])

Wilhelm Schmidt wurde am 25. August 1862 zu Harderode, einem kleinen Dorfe des Amtes Eschershausen im braunschweigischen Kreise Holzminden, als Sohn eines Landwirtes geboren. Die Eltern hatten aber kein Glück mit der Landwirtschaft, denn als ihr Junge kaum das 12. Jahr erreicht hatte, wanderte der Vater nach Amerika aus, während die Mutter zu Verwandten zog. In seiner Abiturientenmeldung berichtete Schmidt über seine Jugendzeit, wie folgt: „Nachdem ich bis zu meinem 12. Lebensjahre im elterlichen Hause erzogen und von meinen Eltern sowie von dem Kantor Meyer in den Lehren der evangelisch-lutherischen Konfession unterrichtet worden war, besuchte ich die früher sogenannte Realschule (eine Vorbereitungsanstalt für das Lehrerseminar) in Wolfenbüttel, in der Absicht, mich zum Volksschullehrer auszubilden. Da ich aber später diese Absicht aufgab und mich einem akademischen Studium zuzuwenden beschloß, so ging ich Ostern 1877 zum Gymnasium daselbst über, und zwar trat ich zunächst in die Untertertia ein". Schmidt absolvierte dann beide Tertien in einem Jahre und konnte so Ostern 1882 das Abiturientenexamen bestehen. Obwohl er während seiner Gymnasialzeit beständig Privatstunden erteilte, war er doch immer der erste in der Klasse. Mit einem glänzenden Maturitätszeugnis (in Deutsch 2, in allen anderen Fächern 1) ausgerüstet, bezog er nun Ostern 1882 die Universität Leipzig, um sich dem Studium der klassischen Philologie zu widmen. Nachdem er in Leipzig gleichzeitig sein Militärjahr absolviert hatte, setzte er seine Studien Ostern 1883 bis Ostern 1884 in Göttingen fort und studierte dann noch drei Semester in Berlin. Neben Griechisch, Latein und Deutsch betrieb er alte Geschichte und hörte daneben noch einige theologische Vorlesungen. Schon nach sieben Semestern (mit Einschluß des Militärjahres) trat er in den praktischen Schuldienst über. Da nämlich zu jener Zeit Lehrermangel war, wurde er bereits Herbst 1885 aushilfsweise am herzoglichen Real-

1) Weitere Mitteilungen verdanke ich Herrn Prof. H. Diels in Berlin und Herrn Prof. Fr. Leo in Göttingen, sowie den Herren Gymnasialdirektoren Brandes (Gymnasium Wolfenbüttel), W. Dahl (Realgymnasium Braunschweig), L. Drewes (Gymnasium Helmstedt) und Fr. Koldewey (Gymnasium Braunschweig).

gymnasium zu Braunschweig beschäftigt. Im Februar 1888 bestand er die Staatsprüfung und nun rückte er Ostern 1888 in die Stelle eines wissenschaftlichen Hilfslehrers vor, um dann am 1. Oktober 1890 als Gymnasiallehrer an dem Realgymnasium fest angestellt zu werden. Im Jahre 1893 promovierte er in Göttingen und 1895 gründete er mit MINNA HÜBNER, der Tochter eines Kaufmanns in Helmstedt, seinen Hausstand. Der glücklichen Ehe entsprossen ein Knabe von jetzt 9 und ein Mädchen von jetzt 2 Jahren.

Am 1. Oktober 1896 erfolgte seine Beförderung zum etatmäßigen Oberlehrer (den Titel Oberlehrer besaß er seit 1891) — aber schon Ostern 1898 wurde er „zwangsweise" an das Gymnasium in Helmstedt versetzt!

Es ist schwer, sehr schwer, das zu verstehen. Von allen seinen Vorgesetzten wird SCHMIDT als ein äußerst gewissenhafter Lehrer geschildert: „Sein Leben ging auf in den drei Kreisen: Familie, Beruf, Wissenschaft.... Vielseitige wissenschaftliche Kenntnisse, höchst solides Wissen, scharfe Urteilskraft zeichneten ihn aus und erklären seine vortrefflichen Erfolge als Lehrer. Jene Eigenschaften kannten oder ahnten auch seine Schüler und respektierten sie sehr. Und die Eltern freuten sich, wenn ihre Söhne in seine Klasse kamen, da sie bei ihm gründlich arbeiten und klar denken lernten und unverlierbare Schätze in die höheren Klassen mitnahmen. Er besaß auch viele historische und philosophische Kenntnisse, denn er arbeitete unermüdlich (auch zur Vorbereitung auf den Unterricht) und verfügte über ein hervorragendes Gedächtnis". Und in einem in der Braunschweiger Landeszeitung veröffentlichten Nachrufe (der ebenfalls aus der Feder des Herrn Direktor DREWES in Helmstedt stammte) heißt es: „Oberlehrer Dr. WILHELM SCHMIDT war einer der trefflichsten und erfolgreichsten Lehrer des hiesigen Gymnasiums und einer der immer seltener werdenden Philologen, die das Lateinische und Griechische nicht nur grammatisch und lexikalisch beherrschen, sondern auch für die intimeren Eigenheiten dieser Sprachen ein ausgeprägtes und unmittelbares Gefühl besitzen". Auch von der Direktion des Realgymnasiums in Braunschweig wird ihm bezeugt, er sei „ein treuer, gewissenhafter Lehrer gewesen, dem es Herzenssache war, die ihm anvertraute Klasse nach äußerster Möglichkeit zu fördern".

Und trotzdem — SCHMIDT wurde 1898 gegen seinen Willen von Braunschweig nach Helmstedt versetzt. Der allerdings weit über das gewöhnliche Maß hinausgehende heilige Eifer, mit dem er sich neben der Lehrtätigkeit auch noch seiner Wissenschaft widmete, brachte naturgemäß eine starke Zurückhaltung im geselligen Verkehre mit sich, die manches Mal zu Mißstimmungen in seiner Umgebung geführt haben mag. Und bei solchen Gelegenheiten fand man dann wohl, daß er sich zu sehr seinen „Liebhabereien" widme: „Oft haben wir im Kreise des Lehrerkollegiums versucht, ihn dieser über alles Maß hinausgehenden Liebhaberei abwendig

zu machen; es war nicht möglich. SCHMIDT war einfach taub für die Lockungen der ..... Geselligkeit. Saß er hinter seinen Folianten, die er — der Himmel weiß, woher — sich zu verschaffen gewußt hatte, so kannte er keine Ermüdung. Der Begriff der Zeit kam ihm völlig abhanden.... Vielleicht ist im Jahre 1898 die vorgesetzte Behörde in wohlwollendster Absicht darauf verfallen, ihm zwangsweise einen neuen Berufskreis zuzuweisen; man hat vielleicht gehofft, diesem Übermaß von Einkapselei ein Ende zu setzen. Ob die Absicht erreicht ist, ich weiß es nicht. Ich bezweifele es, daß er ein wesentlich anderer am Gymnasium zu Helmstedt geworden ist...."

Wenn eine solche Absicht bestanden haben sollte, so wurde sie freilich nicht erreicht. Denn nun folgten Schlag auf Schlag alle die trefflichen Publikationen, die SCHMIDT mit einem Male in die vordersten Reihen der mathematisch-historischen Forscher versetzten und die einen Ruhmesschimmer auch zurückwarfen auf die Schule, der er über zwölf Jahre lang treu gedient hatte.

Am Gymnasium in Helmstedt wirkte nun SCHMIDT bis zu seinem Tode, erst als Klassenlehrer von Untertertia, dann von Obertertia, zuletzt seit Ostern 1903 von Untersekunda. Daneben erteilte er den Lateinunterricht in Unterprima, seit Herbst 1902 in Oberprima. Wäre ihm eine längere Lebensdauer beschieden gewesen, so hätte er es mit der Zeit ja wohl auch noch erreicht, mit dem Unterrichte im Griechischen betraut zu werden, — falls denn wirklich keine Hochschule in der Lage war, sich diese seltene Kraft zu sichern. Denn es darf in der Tat als tragisch bezeichnet werden, wenn ein Mann, dessen ganze Lebensarbeit der Sprache und der Wissenschaft der Griechen gewidmet war und der sich mit ihrer Art zu leben und zu denken in solchem Maße vertraut gemacht hatte, daß man von ihm sagen durfte, er habe auf Du und Du mit den Alten gestanden, und nicht etwa nur mit den Vertretern der schönen Literatur, sondern ganz besonders auch mit den Männern der Wissenschaft und der Praxis, mit den Philosophen, den Mathematikern und den Physikern, den Mechanikern und den Technikern aller Art bis herab zum kleinsten Handwerker, — wenn ein solcher Mann sein ganzes Leben hindurch in allem möglichen, in Geschichte, Geographie, Latein, Deutsch, Religion, ja auch im Turnen zu unterrichten hatte, aber nie auch nur eine einzige griechische Unterrichtsstunde hatte erteilen dürfen. Dafür mußte er dann aber in den letzten Jahren auch noch Hebräisch lernen, um auch noch in dieser Sprache, die er seit der Schulzeit nicht mehr geübt hatte, den Unterricht zu übernehmen. Und SCHMIDT übernahm alle diese Verpflichtungen bereitwilligst und erfüllte sie aufs treueste. Aber geschmerzt hat ihn die eigentümliche Fügung des Schicksals doch manchmal. Eine um so größere Freude und Genugtuung empfand

er daher, daß es ihm beschieden wurde, wenigstens indirekt zu dem griechischen Unterrichte, und dazu noch in weitesten Kreisen herangezogen zu werden: Im Jahre 1902 nahm v. Wilamowitz sechs Stücke aus Heron (Lehre vom Vakuum, Windkessel, Feuerspritze, Weihwasserautomat, Kugel von Dampf bewegt, Wegmesser) in sein *Griechisches Lesebuch* auf.

Überblickt man die stattliche Reihe der wissenschaftlichen Arbeiten Schmidts, die sich so ziemlich auf das Jahrzehnt 1893—1903 zusammendrängen, so kann man nur staunen. Bei zwanzig und mehr wöchentlichen Unterrichtsstunden, die so gut wie gar keine Berührung mit seiner wissenschaftlichen Tätigkeit darboten, — so verzeichnet z. B. das Programm des Braunschweiger Realgymnasiums für das Sommerhalbjahr 1897 8 Stunden Religion, 8 Latein, 3 Deutsch, 2 Erdkunde und außerdem Turnspiele — war Schmidt bei der Gründlichkeit und Gewissenhaftigkeit, mit der er seinen Lehrerberuf erfaßte, für die wissenschaftliche Arbeit ganz auf die bescheidenen Ferien angewiesen. Und dazu gesellten sich nun noch Schwierigkeiten, deren Überwindung Anstrengungen nicht gewöhnlicher Art erforderte. Von Haus aus durch und durch Philologe sah sich Schmidt plötzlich vor ein Arbeitsgebiet gestellt, das zugleich ganz beträchtliche Kenntnisse in Mathematik, Physik, Mechanik und anderen naturwissenschaftlichen und technischen Disziplinen voraussetzte. Das alles mußte er sich nun nach und nach mit eisernem Fleiße aneignen, denn was er von seiner Schulzeit her mitgebracht hatte, war natürlich bei weitem nicht ausreichend. Und wie erschwert wurde ihm seine Forscherarbeit sodann noch dadurch, dass er nicht an der Quelle saß, daß ihm weder in Helmstedt noch auch in Braunschweig das erforderliche Material zu Gebote stand. Und wenn er sich auch in ausgiebigster Weise das, was er an Druckwerken und Handschriften brauchte, von den Bibliotheken in Göttingen, Berlin, Paris und anderen kommen ließ — im Juli und im Oktober 1903 ließ er sich z. B. die Pariser Handschriften nach Berlin kommen, um sie dort zu photographieren, — wieviel von der ihm spärlich zugemessenen Zeit ging auf diesem Wege für ihn verloren!

So konnte Schmidt sein Ziel eben nur dadurch erreichen, daß er auch jede und jede freie Stunde seiner wissenschaftlichen Arbeit widmete. Urlaub gab es nicht und nach Erholung verlangte er nicht. Man müßte denn die wissenschaftlichen Reisen dazu rechnen, die er im Auftrage und mit Unterstützung der Berliner Akademie der Wissenschaften zum Zwecke der Vergleichung von Heron-Handschriften ausführte. In dieser Mission reiste er Juli 1894 nach Italien, um den in den verschiedensten Bibliotheken zerstreuten Handschriften nachzugehen. Da er aber an die kurzen Schulferien gebunden war, so sah er sich genötigt, im folgenden Jahre nochmals wieder zu kommen, um seine Arbeiten zu Ende zu führen. Es

handelte sich für ihn damals namentlich um die Beschaffung des Materials für die beiden ersten Bände der neuen HERON-Ausgabe und dazu führte ihn der Weg nach Venedig, Florenz, Mailand, Genua, Neapel und Rom. Im Jahre 1900 begab er sich, der folgenden HERON-Bände wegen und wiederum im Auftrage der Berliner Akademie, im Juli nach Paris und im Oktober nach Rom.

Von denen, die WILHELM SCHMIDT persönlich kannten, wird er als ein Mann „von unendlicher Liebenswürdigkeit" geschildert, der zugleich „ebenso bescheiden als tüchtig" war. Die stattliche Erscheinung ließ auf Kraft und Gesundheit schließen. Aber freilich — dem Übermaße von Arbeit, das SCHMIDT sich zumutete, hätte auch die stärkste Gesundheit auf die Dauer nicht standgehalten. Ich war Juli 1902, durch Vermittlung von DIELS, mit SCHMIDT in Briefwechsel getreten und unterhielt seit jener Zeit mit ihm eine äußerst lebhafte, für mich ungemein genußvolle und lehrreiche Korrespondenz, für die ich ihm stets dankbar sein werde. Wir hatten eine gemeinsame Arbeit, die Herausgabe von Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Altertum, verabredet, hatten die Rollen verteilt und alles nötige besprochen — und so ahnte ich auch nichts Schlimmes als 1904 eine mehrmonatliche Pause in unserem Verkehre eintrat. Um so schmerzlicher wurde ich daher berührt, als ich mit Anfang des neuen Jahres auf eine Anfrage nach dem Stande der Arbeit die folgende, so überaus wehmütige Mitteilung von ihm erhielt: „Ich hatte im vorigen Sommer (Mai, Juli und September) rechts und links drei Schlaganfälle. Die Lähmungen sind zwar zurückgegangen, aber ich habe, trotzdem ich erst 42 Jahre zähle, alle wissenschaftliche Arbeit niederlegen müssen und werde mich künftig, hoffentlich noch recht lange, auf den Unterricht beschränken. Nehmen Sie es also nicht übel, daß ich damit von den ‚Urkunden' zurücktrete. . . ." Und nun war seine ganze Sorge darauf gerichtet, daß das von ihm gesammelte und vorbereitete Material in die richtigen Hände gelange und alles aufs beste geordnet werde: „HERON, Band II, 2. Abt., ist an Herrn Professor H. SCHÖNE, Königsberg, und HERON, Band IV und V, an Herrn Professor HEIBERG, Kopenhagen, der Jahresbericht an Herrn Dr. TITTEL in Leipzig gegeben", schrieb er mir im Februar. „Ob ich später wissenschaftlich arbeiten werde, steht dahin. . . . Hoffentlich kehrt das Leiden nicht wieder."

Es kehrte leider wieder. Nachdem er schwer unter der Untätigkeit, zu der er verurteilt war, gelitten hatte, nahm er Ostern den Unterricht mit 5 Stunden in Oberprima wieder auf und er hoffte, Michaelis 12 Stunden geben zu können. Da traf ihn, Donnerstag, den 3. August, abermals ein Schlaganfall, ein noch schwererer als die früheren. Völlig gelähmt lag er noch vier Tage bei halbem Bewußtsein, um dann Montag, den 7. August, ohne Todeskampf sanft einzuschlafen.

Er schied dahin zu früh für seine Familie, die in ihm den treubesorgten Gatten und Vater verlor, zu früh aber auch für die Wissenschaft, die Großes noch von ihm erwarten durfte. —

Seine schriftstellerische Tätigkeit eröffnete Schmidt 1893 mit seiner Göttinger Inauguraldissertation. Sie ist seinen Lehrern Leo und v. Wilamowitz-Moellendorff gewidmet und trägt den Titel *De Flavii Josephi elocutione observationes criticae.* Die ganze, sehr umfangreiche Dissertation ist in Fleckeisens Jahrbüchern veröffentlicht. Separat, mit dem Zusatze *Pars prior*, wurden auf 48 Seiten zunächst nur die vier ersten Paragraphen gedruckt. Die äußere Veranlassung, sich mit Sprache und Stil jenes jüdischen Geschichtsschreibers eingehender zu befassen, war für Schmidt der Umstand gewesen, daß schon die Staatsprüfung von 1888 eine Arbeit über Josephus von ihm gefordert hatte.

Um über das Verhältnis der beiden Veröffentlichungen völlige Klarheit zu gewinnen, wandte ich mich an Herrn Professor Leo in Göttingen, der die Freundlichkeit hatte, mir folgendes zu schreiben: „.... ich habe die Antwort verzögert, da ich die Notizen zum Nekrolog des vortrefflichen Mannes genau zu geben wünschte und mir darum die Akten kommen ließ.

Zunächst haben Sie ganz recht mit Ihrer Auffassung vom Verhältnis des als Dissertation gedruckten Teils zur vollständigen Abhandlung in Fleckeisens Supplementen. Die ganze Abhandlung war als Dissertation eingereicht und die Fakultät gestattete, daß nur ein Teil gedruckt werde, um dem Verfasser die Kosten zu ersparen.

Die Geschichte der Dissertation ist aber an sich interessant. Schmidt hatte in Göttingen nur Ostern 1883 bis 1884 (lange vor meiner Zeit) studiert und dann in Braunschweig das Examen gemacht. Wilamowitz kannte ihn flüchtig, ich gar nicht. Im Februar 1892 reichte er eine umfangreiche Arbeit *Observationes in elocutionem Flavianam* ein, die ich zum Referieren erhielt. Es war eine fleißige Materialsammlung, die aber mit Bezug auf Anlage, Methode und Durcharbeitung in jeder Hinsicht ungenügend war. Doch war etwas in der Arbeit zu spüren, was uns hinderte, sie zurückzuweisen. Er bekam sie zur Umarbeitung wieder und lieferte sie im November 1892 zum zweitenmal ein. Er war auf die Mängel aufmerksam gemacht worden und auf die Wege, die er zu gehen hatte, um sie zu beseitigen. Aber ich muß sagen, daß mir eine solche Entwickelung in so kurzer Zeit, eine solche Energie der Arbeit, die zugleich den Blick erweiterte und die Methode sicherte, kaum vorgekommen ist. Ich habe mich dieses Falles noch oft erinnert, als eines Beweises, was aus Arbeiten werden kann, die anfänglich unzureichend sind.

Gesehen habe ich SCHMIDT nur einmal, nämlich während des Examens und in einer Konferenz, die wir gleich darauf über seine Arbeit unter vier Augen hatten Er machte mir auch damals einen sehr guten Eindruck; und daß sein Charakter von seltener Art war, hat ja auch sein späterer Entwickelungsgang bewiesen. . . .“

So also lautet das Urteil über das erste wissenschaftliche Auftreten SCHMIDTS. — Nun aber tritt sofort ein Name in den Vordergrund, mit dem die ganze Lebensarbeit SCHMIDTS so innig verwachsen ist, daß man ihn künftighin nicht nennen wird, ohne auch des trefflichen Helmstedter Gelehrten zu gedenken: HERON von Alexandria. Gleich nach seiner Promotion wandte sich SCHMIDT an seinen ehemaligen Lehrer DIELS, an den er sich schon während seiner Berliner Studentenzeit besonders angeschlossen hatte, um von ihm ein geeignetes Studienobjekt zu erhalten. DIELS hatte gerade seine Abhandlung *Über das physikalische System des STRATON* (Sitzungsber. der Akad. d. Wissensch. zu Berlin, 1893, 101—127) veröffentlicht und hatte darin den Nachweis geführt, daß das merkwürdige Prooemium[1]) der *Pneumatik* HERONS dem Philosophen STRATON von Lampsakos (3. Jahrh. v. Chr.) entlehnt sei, der nach THEOPHRASTS Tode die Leitung des Peripatos in Athen übernommen hatte und der den Ehrennamen „der Physiker“ trägt. Unter Hinweis auf die Unbrauchbarkeit der bisherigen Texte hatte nun DIELS den Wortlaut dieses Prooemiums in verbesserter Gestalt und mit den wichtigsten Varianten im Anhange seiner Abhandlung (S. 120—127) mitgeteilt. So empfahl er denn seinem ehemaligen Schüler eine Ausgabe des HERON! Und SCHMIDT stürzte sich auf diese große und ungemein schwierige Aufgabe mit wahrem Feuereifer. „Die Energie, mit der er sich in die philosophische wie in die technische Seite des schwierigen Unternehmens einarbeitete“, schreibt Herr Prof. DIELS, „erregte meine höchste Bewunderung. Er selbst fühlte, da er von Haus aus ein sehr bescheidener Mensch war, während der Arbeit seine Kräfte wachsen. Die enorme Mühe, die Handschriften zu ermitteln, zu kollationieren, die Abbildungen zu prüfen, dann die Ergebnisse zu sichten und zu klassifizieren, bewältigte er spielend.“

Für SCHMIDT begann jetzt jene Zeit der „Einkapselei“, der stillen, selbstlosen, unermüdlichen Arbeit, durch die er sich die Anerkennung und die Bewunderung von seiten der Mitstrebenden und den Dank der Nachwelt erworben hat. Als erste Frucht seines Fleißes konnte er bereits

1) Es handelt von der Lehre vom Vakuum. Die Hauptteile davon bilden das erste Stück aus HERON in dem S. 358 genannten Lesebuche von v. WILAMOWITZ.

Ostern 1894 in dem Jahresberichte des herzoglichen Realgymnasiums zu Braunschweig die Abhandlung *Das Prooemium der Pneumatik des Heron von Alexandria in lateinischer Übersetzung* veröffentlichen. In dieser Abhandlung, die im engsten Zusammenhange mit jener von DIELS über STRATON steht, gibt SCHMIDT zunächst eine kurze Übersicht über die Vakuumtheorie, die den Inhalt des merkwürdigen Prooemiums bildet, um sodann eine noch ungedruckte lateinische Übersetzung mitzuteilen und ihre kritische Bedeutung für den griechischen Text darzulegen. Diese Übersetzung ist im 15. Jahrhundert von JOHANN FRANZ BURANA aus Verona angefertigt worden und war bisher nur aus der Münchener Handschrift No. 431 bekannt. SCHMIDT war es aber gelungen, in der Ambrosiana in Mailand noch zwei weitere (G 78 und J 38) ausfindig zu machen, und nun werden die drei ausführlich in der Programmabhandlung beschrieben. Zugleich weist SCHMIDT den eigentümlichen Wirrwar nach, der in der Übersetzung BURANAS durch Blattversetzung entstanden war. Die Vermutung freilich, daß die Handschrift J 38 von LEONARDO DA VINCI herrühre, hat SCHMIDT später wieder aufgeben müssen.

Es folgten nun zunächst, Juli 1894 und 1895, die beiden italienischen Reisen und die Studien in den italienischen Bibliotheken. DIELS war es gewesen, auf dessen Antrag die Berliner Akademie (und dann nochmals 1900) die erforderlichen Mittel bewilligt hatte. Und dann ging es an das Verarbeiten des gewaltigen Materiales. Trotz der ärgerlichen Störung, die er 1898 durch seine Versetzung und die damit verbundene Eingewöhnung in neue Lebens- und Arbeitsverhältnisse erfahren mußte, setzte er es durch, daß schon 1899, in der Bibliotheca Teubneriana, der stattliche erste Band der neuen HERON-Ausgabe erscheinen konnte! „HERMANN DIELS und RICHARD SCHÖNE in dankbarer Verehrung gewidmet", heißt es auf dem ersten Blatte.

Der Inhalt ist folgender: Zunächst wird in einer Einleitung ausführlich die HERONische Frage behandelt (S. IX—XXV), d. h. die Frage, „zu welcher Zeit HERON gelebt hat oder, was wichtiger ist, welchem Zeitalter die durch HERON uns überlieferten Kenntnisse des Altertums angehören. Die einzelnen Ansätze zur Bestimmung desselben erstrecken sich zusammengenommen über nicht weniger als vier Jahrhunderte". Die HERONische Frage war durch DIELS wieder in Fluß gebracht worden, der in seiner mehrfach erwähnten Abhandlung über STRATON (S. 106, Anm. 5) HERON wegen der Latinismen frühestens dem Anfange unserer Zeitrechnung zugewiesen hatte. SCHMIDT kommt nun zu dem Resultate, daß jedenfalls für HERONS *Mechanik* das Jahr 55 n. Chr. als terminus post quem festzuhalten sei, daß aber

Heron wahrscheinlich doch noch vor Klaudius Ptolemaeus, also noch im ersten Jahrhundert n. Chr. gelebt habe.[1])

Die folgenden drei Kapitel der Einleitung (XXVI—LXX) enthalten Anmerkungen, insbesondere zu den Figuren, die teils neu entworfen, teils nachgezeichnet oder sonst rekonstruiert werden mußten.

Und nun folgen, griechisch und deutsch, die *Druckwerke* (S. 1—333) und die *Automatentheater* (S. 335—453) Herons.

Ein aus drei Stücken bestehender Anhang schließt den stattlichen und schön ausgestatteten Band, über den Schmidt selbst, in den Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner, folgendermaßen berichtet:

„Herons *Druckwerke* (*Πνευματικά*, S. 1—333), welche vorzugsweise in das Gebiet der unterhaltenden Physik fallen, aber auch für den Archäologen einiges Interessante bieten, sind griechisch nur einmal in der anerkanntermaßen unbrauchbaren[2]) Ausgabe der *Veteres mathematici* 1693 gedruckt. Die neue Bearbeitung versucht zum ersten Male eine kritische Gestaltung des Textes, der in den Hss. im ganzen recht gut erhalten ist, trotzdem sie bis auf eine der Renaissance angehören. Der Edition der echten Heronischen *Pneumatik* sind als Vertreter der besseren Klasse Marcianus 516, s. XIII und Gudianus 13, als Vertreter der schlechteren Taurinensis B, V, 20 zugrunde gelegt. Die große Masse der übrigen Hss. ist, soweit es nötig schien und möglich war, untersucht und klassifiziert. Über das gegenseitige Verhältnis der Hss. und ihre Bedeutung für die Textkritik gibt das Supplementheft im einzelnen Rechenschaft.

Schon früh wurde die *Pneumatik* griechisch überarbeitet, spätestens im 6. Jahrhundert n. Chr. Diese Pseudo-Heronische Rezension ist in einer weit geringeren Anzahl von Hss. vorhanden. Sie wird nach Barberinianus I 162 (a. d. Jahre 1499), Constantinopolitanus 19 s. XV und

1) Man war bisher gewöhnlich von der Überschrift der *Βελοποιικά* Herons, nämlich *Ἥρωνος Κτησιβίου* (die übrigens in den verschiedenen Handschriften verschieden lautet), ausgegangen und hatte daraus geschlossen, daß Heron ein Schüler des großen Erfinders Ktesibios gewesen sei. So war man dazu gekommen, seine Blütezeit auf das Jahr 100 v. Chr. anzusetzen. Aber schon Diels hatte gezeigt, daß jene Überschrift gar nicht beweiskräftig sei. Immerhin wird es wohl noch eine Weile dauern, bis die neue Erkenntnis durchgedrungen ist. Wird doch auch wieder in dem soeben erschienenen Werke von P. La Cour und J. Appel *Die Physik auf Grund ihrer geschichtlichen Entwickelung* (Deutsch von G. Siebert), Braunschweig 1905, in dem Heron verhältnismäßig sehr ausgiebig zum Worte kommt, nach wie vor gelehrt, daß Heron ein Schüler des Ktesibios gewesen sei und ums Jahr 100 v. Chr. gelebt habe.

2) „Denn die Ausgabe, welche erst nach dem Tode des gelehrten Bibliothekars (Thévenot) erschien, ist nicht nur mit geringer Sorgfalt ausgeführt, sondern beruht auch auf einer mehr durch Zufall als mit Überlegung ausgewählten Handschrift.“ (Schmidt, *Prooemium*, S. 3.)

nach dem weniger guten Parisinus 2515 s. XVI jetzt zum ersten Male gedruckt. Den Nachweis, daß hier eine spätere Überarbeitung vorliegt, bringt das Supplementheft.

An die *Druckwerke* schließen sich die *Automatentheater* (*Περὶ αὐτοματοποιητικῆς*, S. 335—453), eine Schrift, welche besonders das Interesse der Archäologen erregen dürfte. Bei dieser schwierigen Materie läßt uns die erwähnte Pariser Ausgabe (1693) vollends im Stich. Die einheitliche hsl. Überlieferung, in der neuen Ausgabe durch Marcianus 516, Gudianus 19 und Taurinensis B, V, 20 vertreten, ist im ersten Teile bei dem fahrenden Automatentheater nicht gerade schlecht, zeigt sich aber im zweiten bei dem stehenden Automatentheater an vielen Stellen verderbt. Schon der Archetypus war stark interpoliert.

Wie in der *Pneumatik* steht auch bei den *Automaten* dem griechischen Texte gegenüber die deutsche Übersetzung, die erste, welche überhaupt erscheint.

Der Anhang (S. 455—507) gibt ein Fragment aus HERONS *Wasseruhren* (*Περὶ ὑδρίων ὡροσκοπείων*) nach PAPPOS und PROKLOS griechisch und deutsch, die *Druckwerke* (*De ingeniis spiritualibus*) PHILONS von Byzanz und einige zur *Pneumatik* gehörende Kapitel aus VITRUV lateinisch und deutsch.

Die im Texte beigegebenen Figuren sind nach den handschriftlichen rekonstruiert, die zu VITRUV und einige zu den *Automaten* frei entworfen.

Die Einleitung erörtert die HERONische Frage und enthält erklärende und ergänzende Anmerkungen."

Es wäre sehr verlockend, auf Einzelheiten des Inhaltes dieses hochinteressanten Bandes einzutreten, dessen Lektüre nicht genug empfohlen werden kann. Die verschiedenen Heber, die Zauberkanne, der HERONSball, der Tantalusbecher, die Tempeltrompete, die Feuerspritze, der trinkende Adler, der Weinautomat, die Wasserorgel, ein Thermoskop, die tönende Trompete, ein HERONSbrunnen und so vieles andere, was an sinnreichen Vorrichtungen im Altertume ersonnen worden war, wird da zum ersten Male in einwandfreiem Texte und guter Übersetzung dargeboten und durch treffliche Figuren erläutert. Man versteht es, daß v. WILAMOWITZ die neue HERON-Ausgabe seinem Lesebuche nutzbar machte.

Auch auf die Einrichtung der Automatentheater, die sich „bei den Alten großer Beliebtheit erfreuten, einmal, weil eine mannigfaltige Kunstfertigkeit dabei entwickelt wird, sodann, weil das (dargebotene) Schauspiel geradezu staunenerregend ist", kann leider hier nicht näher eingetreten werden.

Wem es nur um eine kurze Orientierung zu tun ist — der Band verdient zwar, daß man ihn selbst in die Hand nehme, — der sei auf die

Abhandlung *Heron von Alexandria* verwiesen, die Schmidt gleichzeitig mit dem ersten Bande in den Neuen Jahrbüchern für das klassische Altertum veröffentlicht hat. Diese Abhandlung die zunächst mit einer allgemeinen Würdigung Herons und der Heronischen Schriften beginnt, teilt das Wichtigste über Plan und Einrichtung der neuen Heron-Ausgabe mit und gibt sodann eine treffliche Übersicht über den Inhalt der *Druckwerke* und besonders der *Automatentheater*. Mit den *Automaten* beschäftigt sich die Abhandlung ausführlicher, denn diese Schrift „bietet uns gegenüber den kurzen Andeutungen der übrigen antiken Schriftsteller den Vorteil, daß sie uns auch mit den technischen Einzelheiten vertraut macht, die wenigstens für Archäologen und vielleicht auch für die Geschichte der Technik einiges Interesse haben dürften“. Der Schluß der Abhandlung lautet: „Die Überlieferung der *Automaten* ist, von einigen Interpolationen abgesehen, im ersten Teil im ganzen gut, im letzten an vielen Stellen verderbt. Hier die bessernde Hand anzulegen, ist eine keineswegs leichte, aber vielleicht nicht ganz undankbare Aufgabe für die Philologen. Wenngleich bereits eine Anzahl Konjekturen im kritischen Apparate stehen, so war naturgemäß das Ziel der Ausgabe in erster Linie die Recensio, erst in zweiter die Emendatio. Die Ausgabe hat sich zwar bemüht, die Wunden bloßzulegen. Sie zu heilen vermag nur die gemeinsame Tätigkeit der philologischen Fachgenossen. Wie bei jedem anderen antiken Schriftsteller, so ist auch bei Herons *Automaten* für die Ausübung der Textkritik die Beherrschung nicht bloß der Form, sondern im hohem Maße der Sache und Klarheit über die Heronischen Prinzipien Voraussetzung, wenn wirklich Ersprießliches geleistet werden soll. Besonderen Erfolg würde ich mir versprechen, wenn ein geschickter, technisch nicht unerfahrener Archäologe sich entschließen könnte, eine Rekonstruktion in Form eines Modelles zu versuchen. Die Aufgabe wäre nicht leicht, aber scheint mir nicht unmöglich. Das fahrende Automatentheater ist zwar nach Heron manchen Fährlichkeiten ausgesetzt gewesen, dagegen soll das stehende ziemlich sicher funktionioniert haben. Jedenfalls würde, wer es unternimmt, des Dankes der Gelehrten sicher sein, wie es dem Artilleriehauptmann Deimling, dem Wiederhersteller der Katapulte, auf dem Philologentage zu Heidelberg (1865), oder de Reffye für das jetzt im Museum zu St. Germain aufbewahrte Modell einer Katapulte gewiss nicht an Anerkennung gefehlt hat.“

Auf Herons *Automatentheater* ist Schmidt einige Jahre später noch einmal zurückgekommen in der Note *Zu Herons Automatentheater* (Hermes, Zeitschr. f. klass. Philologie, 38, 1903). Er tritt darin dem Einwurfe von A. Olivieri (Revista di filologia, 1901) entgegen, Herons Automat habe nur theoretische Bedeutung und sei praktisch un-

ausführbar. Er zeigt, daß es bei Heron keineswegs an Hinweisen fehle über den Zusammenhang der Einzelbewegungen mit dem einen (einzigen) Betriebsgewicht, und er schließt mit den Worten: „Eine Entscheidung kann hier meines Erachtens nicht der Schreibtisch, sondern nur eine Werkstatt bringen, in der eine ungewöhnliche Geschicklichkeit waltet."

Kehren wir aber nun zu der Heron-Ausgabe zurück, die ja das eigentliche Lebenswerk Schmidts bildet. Gleichzeitig mit dem ersten Bande erschien noch ein Supplementheft, von dem auch die Schmidtsche Selbstanzeige in den Teubnerschen Mitteilungen spricht. Der erste Teil dieses Supplements enthält die Geschichte der Textüberlieferung und gibt eingehende Rechenschaft über die von dem Herausgeber bewältigte Arbeit. Nicht weniger als 100 Handschriften der *Pneumatik* und 39 der *Automaten* werden besprochen, beurteilt und klassifiziert. Daran schließen sich höchst interessante Mitteilungen über die bisher vorhandenen *gedruckten* Ausgaben der *Pneumatik* und der *Automaten*. Wir erfahren z. B., daß an eine Ausgabe von Herons *Pneumatik* wohl zuerst Regiomontanus gedacht habe, sodann Konrad Dasypodius, vielleicht auch Scaliger. Griechisch lag (wie schon bemerkt) die *Pneumatik* bisher „nur in einer einzigen Ausgabe vor, nämlich den *Veterum mathematicorum opera graece et latine pleraque nunc primum edita*, Parisiis 1693, S. 145—232. Diese Ausgabe wurde von Melchisédec Thévenot (1620—1692, seit 1684 Bibliothekar der Kgl. Bibliothek in Paris), durch Louvois befürwortet, auf Kosten König Ludwigs XIV. veranstaltet. Eine Textrezension hat Thévenot nicht beabsichtigt. Es lag ihm daran, 'ut nihil ex codicibus commutaret, tametsi errores manifesti in eos irrepserint'. Das ist zwar sehr bequem, aber selbst für jene Zeit doch zu unwissenschaftlich. Die Ausgabe ist denn auch danach ausgefallen. Sie ist tatsächlich in vieler Beziehung ein Beispiel, wie man eine Ausgabe *nicht* machen soll." Schmidt bespricht sodann die Arbeiten von Joh. Gottlob Schneider, der in seinen *Eclogae physicae*, Jenae 1801, einzelne Abschnitte unter Verwendung der Lesarten von G (= Gudianus 13, s. XVI) wieder abgedruckt und kommentiert hat, und namentlich die Vorbereitungen, die Friedrich Haase Ende der dreißiger Jahre des vergangenen Jahrhunderts getroffen hatte, „die griechischen Kriegsschriftsteller und darunter von Herons Werken außer den *Belopoiika* und der *Cheiroballistra* auch die *Pneumatik*, die *Automaten* und die *Dioptra* zu bearbeiten .... Das Unternehmen ist leider nicht zur Ausführung gekommen. Haases sorgfältige Kollationen sind aber zum Glück erhalten nnd befinden sich jetzt im Besitze von R. Schöne. Sie standen mir fast 6 Jahre zur Verfügung." Einzelne Abschnitte sind nach der Pariser Ausgabe auch veröffentlicht von G. Walther *Veterum scriptorum loci aliquot physici propositi tabulisque illustrati*,

Wismariae 1844 (Gymnasialprogramm). „Schließlich ist 1893 unter Benutzung des HAASEschen Apparates, der Kollation SCHNEIDERS von G und der Varianten von Hs. 4 (= Berolinensis 144, s. XVI) eine kritische Bearbeitung des Prooemiums (4, 1 — 28, 15) erschienen von H. DIELS *Über das physikalische System des STRATON*." Wir sind dieser Abhandlung wiederholt begegnet. SCHMIDT wendet sich zum Schlusse nun zu seiner eigenen Ausgabe mit den Worten: „Die vorliegende Ausgabe ist, soweit es sich um die *Pneumatik* und die *Automaten* handelt, durch H. DIELS angeregt, die Ausdehnung des ursprünglichen Planes auf die übrigen HERONischen Schriften durch R. SCHÖNE. Beide haben unablässig ihr Interesse für die Ausgabe durch Rat und Tat an den Tag gelegt.

Die Vorarbeiten für dieselbe hatten sich der Unterstützung der kgl. Preußischen Akademie der Wissenschaften zu erfreuen. Durch ein Reisestipendium wurde es mir 1894 ermöglicht, viele italienische Hss. zu untersuchen und die wichtigste (A [= Marcianus 516 s. XIII]) an Ort und Stelle zu kollationieren. Die kgl. Akademie hat damit zur Erfüllung eines Wunsches beigetragen, den einst ihr Stifter (LEIBNIZ, *Werke* VII, 154) äußerte: 'Desiderantur adhuc pleraque HERONIS quae uno corpore complecti non inutile foret'.

Die Pseudo-Heronische *Pneumatik* wird jetzt zum ersten Male gedruckt".

Es folgt die Besprechung der lateinischen Ausgaben. „Wie viele andere Schriften des Altertums, so erschien auch HERONS *Pneumatik* früher lateinisch als griechisch. Der erste, welcher aus HERONS *Pneumatik* etwas publizierte, war GIORGIO VALLA († 1499) aus Piacenza, seit 1486 in Venedig." Die Übersetzung gibt aber nur einzelne Abschnitte, auch fehlt es nicht an Ungenauigkeiten. Immerhin behält sie „das Verdienst, das Interesse für diese Dinge befördert zu haben". Darauf wird die Übersetzung besprochen, auf der „im Ausgange des 16. und fast im ganzen 17. Jahrhundert alles beruhte, was man von HERON wußte: *HERONIS Alexandrini Spiritalium liber a FEDERICO COMMANDINO Urbinate ex Graeco nuper in Latinum conversus*. Cum privilegio GREGORIJ XIII Pont. Max. Urbini 1575. (Dem Kardinal GIULIO DELLA ROVERE gewidmet.)

Diese Übersetzung ist erst nach COMMANDINOS Tode († 1575) von dessen Schwiegersohne VALERIUS SPACIOLUS herausgegeben." Eine zweite Auflage erschien 'Parisiis 1583' eine dritte 'Amstelodami 1680'. Die Übersetzung benutzt, zwar nicht durchgehends aber vielfach, die bereits erwähnte handschriftliche Übersetzung von BURANA. „Im allgemeinen ist die Übersetzung fließend und lesbar. Große Mißverständnisse sind uns nicht aufgefallen, wenngleich es nicht an kleinen Versehen fehlt." (Auf den bemerkenswerten Fehler ὁ λύχνος ellychnium, der auch bei GALILEI

vorkommt, hatte Schmidt schon 1898 in der Abhandlung *Heron von Alexandria im 17. Jahrhundert* hingewiesen. Wir kommen noch darauf zurück.)

Endlich ist von Buranas Übersetzung zunächst das ganze Prooemium und außerdem Anfang und Schluß der einzelnen Kapitel nebst Varianten abgedruckt in der schon besprochenen Programmabhandlung Schmidts von 1894.

Wir müssen es uns leider versagen, dem sachkundigen Führer weiter zu folgen bei seiner Besprechung der italienischen Übersetzungen von Davanzati, Aleotti, Giorgi, einer spanischen, der deutschen von Cario und v. Drieberg, der englischen von Woodcroft und der französischen von (de la Hire? und) A. de Rochat, die von der *Pneumatik* oder von Teilen davon existieren.

Weit weniger zahlreich sind *gedruckte* Ausgaben der *Automaten*, was bei der Schwierigkeit der Materie nicht zu verwundern ist. Von griechischen nennt Schmidt zunächst wieder die in den *Veterum mathematicorum opera*, Parisiis 1693, S. 243—274, die ebenso unbrauchbar ist wie die der *Pneumatik*. Sodann ist noch eine Abhandlung von Prou (1884) zu nennen, die den griechischen Text nur der stehenden Automaten mit französicher Übersetzung enthält, aber „für diesen schwierigen Abschnitt der *Automaten* keinen sicheren Grund gelegt“ hat. „Für die vorliegende Ausgabe“, schließt Schmidt, „in welcher zugleich die erste deutsche Übersetzung erscheint, hatte ich mich wertvoller Beiträge von Brinkmann, Diels, Hildebrandt, H. und R. Schöne zu erfreuen“.

Endlich wird noch eine italienische Übersetzung besprochen, nämlich: Bernardino Baldi, *Di Herone Alessandrino degli Automati overo machine se moventi, libri due, tradotti dal Greco.* In Venezia appresso Gir. Porro 1589 (2. Aufl 1601). Die Originalhs. von Baldis Übersetzung war im Besitze Libris, des bekannten Verfassers der *Histoire des sciences mathématiques en Italie.* Baldi (1553—1617) war durch seinen Lehrer Commandino zu dieser Übersetzung angeregt worden und hatte sie bereits 1576 beendet. „In Anbetracht der geringen Hilfsmittel in jener Zeit und der Schwierigkeit der Aufgabe kann man nicht umhin, die Baldische Arbeit als eine wohl befriedigende Leistung zu betrachten.“

Wenn ich mich bei dem ersten Teile des Supplementes zu Heron I so lange aufgehalten habe, so geschah es nicht nur, weil sein Inhalt historisch-bibliographisch so außerordentlich interessant ist, sondern namentlich auch, weil er den eigentlichen Schlüssel enthält für die Beurteilung der wissenschaftlichen Arbeit Schmidts, für sein Werk und für sein Wirken. Man muß immer nur staunen, wie es einem vollbeschäftigten Gymnasiallehrer möglich war, in seinen Nebenstunden in einem Zeitraume

von knapp fünf Jahren ein solches Material zu bewältigen. Und das, wovon das Supplementheft berichtet, waren ja nur die Vor- und die Nebenarbeiten!

Den zweiten Teil des Supplementes (S. 145—181) bildet ein ungemein sorgfältig behandeltes Wörterverzeichnis. Es ist überflüssig, sich über den Nutzen solcher Verzeichnisse, wenn sie gut angelegt werden, auszusprechen. Aber an dem SCHMIDTschen müssen Philologen, Mathematiker und Historiker die gleiche Freude haben. —

Die neue HERON-Ausgabe war mit Spannung und Sehnsucht erwartet worden. Besprechungen der trefflichen Arbeit stellten sich daher auch sofort in großer Zahl ein. Ich erwähne nur die von CANTOR (Zeitschr. f. Mathem. **45**, 1900; Hist. Abt. S. 10—12), von WERTHEIM (Zeitschr. f. mathem. Unterr. **30**, 1899, S. 507—509) und von HEIBERG (Deutsche Literaturzeitung **20**, 1899, Sp. 1147—51). Die Ausstellungen, die HEIBERG machte, — sie betreffen nach HEIBERGS eigenen Worten nur die Außenwerke — „in der Hauptsache können wir uns nur darüber freuen, daß wir endlich eine solide Ausgabe der beiden wichtigen und interessanten Schriften besitzen,“ — veranlaßten SCHMIDT zu der Gegenschrift *Zur handschriftlichen Überlieferung Herons von Alexandria* (Rheinisches Museum f. Philologie **55**$_2$, 1900, 625—634). Für SCHMIDT hatte als Grundlage der *Pneumatik* und der *Automaten* die Hs. A (= Marcianus 516, s. XIII) gegolten. Daneben sind noch G(udianus 13, s. XVI) und T(aurinensis B, V 20 aus dem Jahre 1541) verwertet. Ich bezeichnete AG als die bessere Klasse, ohne jedoch G einen besonderen Wert neben A beizumessen, während ich T als Vertreter der schlechteren Klasse einführte“. Während nun HEIBERG der Ansicht war, daß die gesamte Überlieferung auf A allein beruhe, daß G und T unselbständig neben A und aus einer gemeinsamen Quelle geflossen seien, daß also von zwei Klassen nicht die Rede sein könne, suchte SCHMIDT in der genannten Gegenschrift zu erweisen, daß die Überlieferung von HERONS *Pneumatik* doch auf zwei selbständigen Zweigen beruhe und daß Pseudo-Herons *Pneumatik* kein Erzeugnis der Renaissance sein könne.

Schon im Jahre 1900 erschien der erste Teil des zweiten Bandes der HERON-Ausgabe. Zu seiner Bearbeitung hatte sich SCHMIDT mit Dr. LUDWIG NIX, Privatdozenten der semitischen Sprachen an der Universität Bonn, vereinigt, der nun auch schon dahin geschieden ist. Dieser erste Teil enthält zunächst *Herons Mechanik in der arabischen Übersetzung des Kosta ben Luka mit deutscher Übertragung* herausgegeben von LUDWIG NIX. Daran schließt sich die *Mechanik des Heron nach den griechischen Fragmenten*, die mit hinzugefügter deutscher Übersetzung von SCHMIDT herausgegeben ist. Dann folgt, lateinisch und deutsch, *Herons Katoptrik* mit einem griechischen Fragment der *Katoptrik*, aus OLYMPIODOR (6. Jahrh.

n. Chr.) entnommen, ebenfalls von SCHMIDT bearbeitet, und im Anhange folgen endlich noch Exzerpte aus VITRUVS *Baukunst*, PLINIUS *Naturgeschichte*, CATOS *Landbau* und Pseudo-EUKLIDS *Katoptrik*.

Obwohl bei der Herausgabe der *Mechanik* auch SCHMIDT stark beteiligt war, so müssen wir uns doch hier etwas kürzer fassen und auf die Einleitung verweisen, die NIX der *Mechanik* vorausgeschickt hat. Bekanntlich ist die *Mechanik* HERONS, von einigen kurzen Auszügen abgesehen, im griechischen Originale verloren gegangen. Sie ist aber zum Glück in arabischer Übersetzung in vier Handschriften erhalten (in Leyden, London, Konstantinopel und Kairo), von denen zuerst die Leydener 1893 von CARRA DE VAUX entdeckt wurde, und die alle vier auf eine gemeinsame Vorlage, nämlich auf die Übersetzung des KOSTA BEN LUKA (ums Jahr 865) zurückgehen. Daß das von diesem Gelehrten aus dem Griechischen ins Arabische übersetzte und unter HERONS Namen überlieferte Buch echt ist, erhellt aus den im Anhang „im griechischen Text von dem Herausgeber des ersten Bandes beigegebenen Fragmenten, die sich an verschiedenen Stellen bei PAPPUS finden und daselbst ausdrücklich als aus HERON herübergenommen bezeichnet werden. Alle Stellen HERONS, auf die PAPPUS anspielt oder die er wörtlich anführt, finden sich in unserm arabischen Texte". Die von SCHMIDT herausgegebenen und übersetzten Fragmente sind S. 255—299 des vorliegenden Bandes der HERON-Ausgabe abgedruckt. Wir erinnern uns aber auch, daß gerade die *Mechanik* HERONS es war, die SCHMIDT dazu führte, HERON in die zweite Hälfte des ersten Jahrhundert n. Chr. zu versetzen.

An die *Mechanik* schließt sich die *Katoptrik* (S. 301—365), betitelt „*CLAUDII PTOLEMEI de speculis recensuit GUILELMUS SCHMIDT*". In der Einleitung (S. 303—315) sagt SCHMIDT: „Daß HERON ein Buch über Katoptrik geschrieben hat, bezeugt DAMIANOS *Περὶ τῶν ὀπτικῶν ὑποθέσεων* Kap. 14, S. 20, 12 ed. R. SCHÖNE: *ἀπέδειξε γὰρ ὁ μηχανικὸς Ἥρων ἐν τοῖς αὐτοῦ Κατοπτρικοῖς*. . . . Außer dieser Notiz und einem Fragmente bei OLYMPIODOR zu ARISTOT. *Meteorol.* vol. II, 96 IDELER (s. unten S. 368) ist uns vom griechischen Texte nichts überliefert.

Nun haben wir eine lateinische Schrift, welche lange Zeit hindurch für ein Bruchstück der *Optik* des PTOLEMAEUS galt, weil sie sowohl in den beiden Handschriften als in der Ausgabe als *PTOLEMEUS De speculis* bezeichnet wird. Nachdem aber die lateinische Optik des Ammiratus (Admiral) EUGENIUS SICULUS bekannt geworden und, besonders durch MARTIN 1871, gegen die Zweifel von CAUSSIN (1822) der Nachweis erbracht war, daß dies wirklich die *Optik* des PTOLEMAEUS nach einer arabischen Übersetzung sei, ergab sich von selbst, daß die Schrift *De speculis* den Namen des PTOLEMAEUS mit Unrecht trage. Vielmehr gehört sie, schon

nach VENTURI, aus folgenden Gründen dem HERON an". SCHMIDT entwickelt diese Gründe und kommt zu dem Resultate, daß uns „im *PTOLEMEUS De speculis* HERONS *Katoptrik*, wenngleich in stark gekürzter und verderbter Gestalt, vorliegt.

Daß die Schrift unmittelbar aus dem Griechischen, nicht etwa aus dem Arabischen, übersetzt ist, beweisen mehrere Graecismen. . . .

Der Übersetzer ist nach MARTINS wahrscheinlicher Vermutung WILHELM VON MOERBEEK (bei Gent), Dominikanermönch und derzeit Beichtvater und Kaplan am Apostolischen Stuhle, derselbe, dem WITELO seine ausführliche *Optik* gewidmet hat. Gerade dieser hat den sog. *PTOLEMEUS De speculis* zuerst benutzt. Auch stimmt die Subskription unserer *Katoptrik* aus dem Jahre 1269 in der formelhaften Ausdrucksweise mit den unzweifelhaften Subskriptionen WILHELMS überein. MARTINS Vermutung ist neuerdings durch den von F. EHRLE, *Historia bibliothecae romanorum pontificum* I, Rom 1890, S. 95—99 veröffentlichten Katalog der Päpstlichen Bibliothek 1311 zur Gewißheit geworden."

Die HERONische *Katoptrik* handelt zunächst von Gehör und Gesicht und von der Sphärenharmonie. Es wird gezeigt, daß die Sehstrahlen gerade Linien bilden und sich mit unendlicher Schnelligkeit bewegen. Dann folgt die Reflexion und das Grundgesetz von der Gleichheit des Einfalls- und Reflexionswinkels. Auch die Reflexion erfolgt geradlinig. Ausführlich werden sodann Planspiegel, konvexe Spiegel, Hohlspiegel und allerlei sinnreiche Spiegelverbindungen besprochen, wie Vexierspiegel, theatralische Spiegel, Winkelspiegel usw. Gerade der Umstand, daß auch in dieser Schrift, wie in allen übrigen HERONischen Werken, schließlich alles auf die praktische Verwendung hinausläuft, war für SCHMIDT mit ein Grund gewesen, sie HERON zuzuweisen.

Das griechische Fragment enthält HERONS 4. Satz, nämlich das Grundgesetz der Reflexion. Auch die übrigen Exzerpte des Anhangs beziehen sich auf einzelne Gegenstände der *Mechanik* und der *Katoptrik*.

Das Erscheinen des dritten Bandes von HERON hat SCHMIDT noch erlebt. Dieser von HERMANN SCHÖNE 1903 herausgegebene Band enthält HERONS *Vermessungslehre*[1]) und *Dioptra*. Den Abschluß des groß angelegten Werkes, dem SCHMIDT sein Leben gewidmet, man darf sagen geopfert hat, sollte er leider nicht mehr sehen. Wir haben erfahren, wie nunmehr über die Fortsetzung verfügt worden ist. Möge ein guter Stern über dem schönen Werke walten!

Ich kann von der HERON-Ausgabe nicht scheiden ohne noch eine Bemerkung hinzuzufügen. Es wird gewiß von den meisten Mathematikern,

1) Die *Metrika* (*Vermessungslehre*), seit dem 6. Jahrh. verschollen, waren Ende 1896 von R. SCHÖNE neu entdeckt worden.

auch von den Nichtdeutschen, mit Dank aufgenommen worden sein, daß dem Texte allemal eine deutsche Übersetzung gegenübergestellt worden ist, und nicht, wie dies bei solchen Ausgaben bisher üblich war, eine lateinische. Diese Ausgaben sollten doch gewiß mindestens ebenso sehr für Mathematiker bestimmt sein, wie für Philologen. Wenn man aber ehrlich sein will, so wird man doch sagen müssen, daß für jene das Lateinische oft ebenso böhmisch ist wie das Griechische.

Daß sich bei einer so umfangreichen und so viele Gebiete umfassenden Arbeit nebenbei noch zahlreiche Einzeluntersuchungen aufdrängten, ist selbstverständlich, nicht selbstverständlich aber der Fleiß, die Gründlichkeit und das Geschick, mit dem Schmidt noch so viele von diesen Aufgaben bewältigte. Schon 1898, also vor dem Erscheinen des ersten Bandes, hatte Schmidt als Frucht seiner Heron-Studien im 8. Hefte der Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik drei Arbeiten veröffentlicht: *Zur Geschichte des Thermoskops*, sodann *Heron von Alexandria, Konrad Dasypodius und die Straßburger astronomische Münsteruhr* und endlich *Heron von Alexandria im 17. Jahrhundert*.

Schon durch die Abhandlung von Diels über Straton war Schmidt frühzeitig auf den Mechaniker Philon von Byzanz hingewiesen worden, der wahrscheinlich in der zweiten Hälfte des dritten Jahrhunderts v. Chr. gelebt hat. Von seiner umfangreichen *Mechanischen Sammlung* (*Μηχανικὴ σύνταξις*) sind leider nur Fragmente erhalten und zu diesen gehört die allerdings nur in lateinischer Übertragung vorhandene Abhandlung *De ingeniis spiritualibus*, die Schmidt mit deutscher Übersetzung in den Anhang des ersten Bandes von Heron aufgenommen hatte. In dieser Abhandlung wird ein Thermoskop beschrieben, wie es ähnlich auch bei Heron vorkommt, und mit diesem Thermoskope beschäftigt sich die erste der drei genannten Arbeiten Schmidts. Die Erfindung ist also dem Altertume und nicht etwa, wie bisher, Galilei oder anderen Gelehrten der Neuzeit zuzusprechen. Ja, es ist nicht einmal ganz ausgeschlossen, daß auch schon die Graduierung, auf die allein die Neuzeit Anspruch erheben kann, im Altertume vorgenommen wurde, denn Graduierungen, wenn auch anderer Art, kommen bei Heron vor.

Die zweite Abhandlung macht uns mit Konrad Dasypodius (1530—1600) näher bekannt, dessen Name uns schon im Supplemente zu Heron I begegnet ist. Dasypodius (zu deutsch „Rauhfuß“) war Professor der Mathematik an der Akademie in Straßburg und hat sich in zahlreichen Schriften mit den Mathematikern, Astronomen, Physikern und Mechanikern des Altertums beschäftigt, insbesondere auch mit Heron. Dasypodius war es nun gewesen, der im Verein mit David Wolckenstein aus Breslau, Tobias Stimmer und den Gebrüdern Habrecht aus Schaffhausen die so

berühmte astronomische Uhr im Straßburger Münster geschaffen hatte. Dieses Kunstwerk beschreibt SCHMIDT mit einer Sachkenntnis, die einem gewiegten Mechaniker Ehre machen würde. Er schließt sich dabei an die lateinische Beschreibung an (sie erschien 1580 gleichzeitig auch deutsch), die DASYPODIUS selbst unter dem an sich schon sehr bezeichnenden Titel *Heron mechanicus* unter wiederholter Berufung auf antike Mechaniker gegeben hatte. Diese Beziehungen werden von SCHMIDT eingehend besprochen. „Beriefe sich DASYPODIUS nicht selber auf HERON“, schließt SCHMIDT seine äußerst interessanten Ausführungen, „so würde es kaum jemand wagen, einen antiken Mechaniker mit der berühmten Straßburger astronomischen Münsteruhr in Verbindung zu bringen. So aber glaubten wir, dazu berechtigt zu sein.“

Die dritte Abhandlung *Heron von Alexandria im 17. Jahrhundert* mit dem Motto: „Es ist außer Frage, daß das Studium der Schriften der Alten den ersten Impuls zur neueren Naturforschung gegeben hat (POGGENDORFF)“, knüpft zunächst an die Tatsache an, daß schon zur Zeit der Renaissance die physikalischen Schriften HERONS einen starken Reiz ausgeübt haben. „Das beweist die fast unübersehbare Zahl griechischer Handschriften, welche wir z. B. von der *Pneumatik* haben. Man hat daher sicher im Jahre 1575 das Erscheinen von COMMANDINOS lateinischer Übersetzung mit Freuden begrüßt.“ SCHMIDT verfolgt nun in seiner Abhandlung im einzelnen den Einfluß, den HERON auf GIAMBATTISTA DELLA PORTA, der 1601 das auf HERON zurückgehende, aber sonst selbständige Werk *Pneumaticorum libri tres* veröffentlichte, auf ROBERT FLUDD, auf KASPAR ENS, auf JEAN LEURECHON, auf den bekannten Professor DANIEL SCHWENTER in Altorf, den Verfasser der *Erquickstunden*, auf ATHANASIUS KIRCHER, auf MARIN MERSENNE, auf Professor KASPAR SCHOTT in Würzburg, der sich in seiner 1657 erschienenen *Mechanica hydraulico-pneumatica* besonders eingehend mit HERON beschäftigt, u. a. ausgeübt hat.

„Es ist bemerkenswert, daß gerade zu Anfang des 17. Jahrhunderts die Wasserkünste in fürstlichen Gärten eine große Rolle spielen, nicht bloß in Heidelberg, sondern z. B. auch in Tivoli. Und wer kennte nicht die noch vorhandenen Wasserkünste der von GIACOMO DELLA PORTA erbauten Villa Aldobrandini oberhalb Frascati, Wasserkünste, welche um 1603 GIOVANNI FONTANA zum Ergötzen der Mit- nnd Nachwelt geschaffen hat? Es ist nicht unwahrscheinlich, daß auch hierzu in letzter Instanz HERON die Anregung gegeben hat.“

Es werden nun insbesondere die verschiedenen sinnreichen Vorrichtungen in HERONS *Pneumatik* durchgangen, soweit sie in den Arbeiten namentlich von PORTA und SCHOTT berücksichtigt sind: die verschiedenen Heber, die Zauberkanne, die „Krüge von Kana“ (wie sie SCHOTT nennt), das

Weihbecken u. a. Dabei wird die ziemlich verbreitete Meinung (MARTIN, CANTOR, HELLER, GÜNTHER) widerlegt, daß die in den physikalischen Lehrbüchern erwähnten HERONsbrunnen und HERONsball in HERONS Schriften gar nicht vorkämen. Mit einem der HERONsbrunnen (der unversieglichen Lampe, HERON I, S. 265) hat sich auch GALILEI in einem Briefe beschäftigt, den er am 11. Januar 1594 von Padua aus an einen Freund gerichtet hat und der jetzt in der Ambrosiana zu Mailand aufbewahrt wird (ungenau abgedruckt bei VENTURI; der berichtigte Abdruck findet sich in der Einleitung zu HERON I, S. XLVI). Von diesem Briefe gibt SCHMIDT einen Teil in seiner Abhandlung wieder mit folgender Anmerkung (S. 206, Anm. 4):

„Daß COMMANDINO fälschlich 'Docht' (*ἐλλύχνιον*, ellychnion) statt 'Lampe' (*λύχνος*, lychnos) übersetzt, hat SCHOTT richtig erkannt, PORTA aber übersehen. Denselben Fehler hat ferner GALILEI mit COMMANDINO gemein, so daß es scheint, als ob GALILEI keine griechische Handschrift eingesehen habe. Wenn wir hier die Beziehungen GALILEIS der ja doch vorwiegend auch dem 17. Jahrhundert angehört, zu HERON etwas ausführlicher erörtern, als es vielleicht dem Thema angemessen erscheinen könnte, so befürchten wir dennoch keinen Tadel."

Mit der Besprechung der drei Arbeiten aus den Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik haben wir nun nachgetragen, was SCHMIDT noch bis zum Jahre 1900 veröffentlicht hat. Dieses Jahr ist für die mathematisch-historische Forschung von nicht zu unterschätzender Bedeutung: Verwandelte sich doch in diesem Jahre die aus bescheidenen Anfängen hervorgegangene Bibliotheca Mathematica von GUSTAF ENESTRÖM in eine historische Zeitschrift größeren Stiles, die nun unter der Obhut der Firma TEUBNER der eigentliche Sammelpunkt für die Geschichte der mathematischen Wissenschaften geworden ist. Gleich von dem ersten Bande der neuen Folge an wurde SCHMIDT ein eifriger Mitarbeiter dieses Organs. Nicht weniger als 13 Abhandlungen hat er, abgesehen von kleineren Mitteilungen, in den vier Jahrgängen, für die er noch tätig sein konnte, veröffentlicht. Sie sind, mit Ausnahme einer einzigen, alle aus den HERON-Studien herausgewachsen, auch wenn ihr Titel dies nicht immer erraten läßt.

*ARCHIMEDES' Ephodikón* betitelt sich die erste (Biblioth. Mathem. $1_3$, 1900, 13—14). Unter den nur aus Zitaten bekannten Schriften des ARCHIMEDES wird von SUIDAS ein *'Εφόδιον* erwähnt, zu dem THEODOSIUS von Tripolis einen Kommentar geschrieben habe. Mit diesem *ἐφόδιον* wußte man bisher nichts Rechtes anzufangen. SCHMIDT weist nun auf die folgende Stelle in HERONS *Metrika* (jetzt HERON III, S. 80) hin: „ARCHIMEDES hat im *Ephodikón* gezeigt, daß jedes Segment, welches von einer Geraden und

einem Schnitte eines rechtwinkligen Kegels, d. h. einer Parabel, eingefaßt wird, $^4/_3$ eines Dreiecks ausmacht, das mit ihm dieselbe Basis, aber auch gleiche Höhe hat.“ Da sich diese Stelle nur auf die Quadratur der Parabel beziehen kann, so vermutete SCHMIDT, daß 'Εφοδικόν der echte Titel für diese Schrift sei und daß SUIDAS' 'Εφόδιον dementsprechend verbessert werden müsse. Das Titelwort 'Εφοδικόν (ἔφοδος Methode) weise wohl auf die Exhaustionsmethode jener Schrift hin.

In der Note *Noch einmal* ARCHIMEDES' *Ephodikón* (Biblioth. Mathem. $3_3$, 1902, 143—144) ergänzte SCHMIDT die frühere Mitteilung durch zwei weitere (damals ebenfalls noch unedierte) Stellen (jetzt HERON III, S. 130), die auch auf das *Ephodikón* hinweisen, von denen aber SCHMIDT sagte, daß er sie bei ARCHIMEDES nicht nachzuweisen vermöge. Es sei also wahrscheinlich *Ephodikón* der Titel einer größeren Schrift, von der uns nur die „Quadratur der Parabel“ erhalten ist.

Speziell mit HERON beschäftigt sich der Aufsatz *Sind die* HERONischen *Vielecksformeln trigonometrisch?* (Biblioth. Mathem. $1_3$, 1900, 319—320). Die Ableitung dieser Formeln galt bisher für zweifelhaft. CANTOR bezeichnet sie als trigonometrisch, TANNERY und v. BRAUNMÜHL sind anderer Meinung. SCHMIDT zeigt, daß die Frage durch HERONS *Metrika* entschieden werde, die im ersten Buche (HERON III, S. 51—65) die Formeln für das Fünfeck, Sechseck bis Zwölfeck einschließlich auf geometrischem Wege ableiten. Die geometrische Entwickelung wird speziell für das Achteck ausgeführt, da CANTOR gerade an dieser Figur versucht hatte, die trigonometrische Grundlage nachzuweisen.

Auch die Abhandlung *Zur Geschichte der Isoperimetrie im Altertume* (Biblioth. Mathem. $2_3$, 1901, 5—8) betrifft, wie die vorhergehenden, eine Frage der reinen Mathematik. „Die Beschäftigung der Griechen mit der Isoperimetrie stand, da die Pythagoreer (CANTOR, *Vorlesungen* $1^2$, 167) wohl noch keine klare Vorstellung darüber hatten, bisher nur fest für ZENODOR, den man aus allgemeinen Gründen in die nächste Zeit nach ARCHIMEDES setzt. . . .“ Aus einer Notiz bei SIMPLICIUS geht aber hervor, daß die Geschichte der Isoperimetrie schon vor ARISTOTELES beginnt, wenn auch wohl erst ARCHIMEDES der Urheber einer wirklichen Beweisführung gewesen sein wird. Auch nach ZENODOR trifft man in der griechischen Literatur Verfasser an, die sich mit der Isoperimetrie beschäftigt haben. So finden sich z. B. auch in HERONS *Definitionen* die Sätze, daß der Kreis unter den ebenen Figuren gleichen Umfangs den größten Inhalt habe, und ebenso die Kugel unter den körperlichen Figuren (*Def.* 83, p. 25, ed. HULTSCH). SCHMIDT zitiert dann noch griechische Schriftsteller bis in das 6. Jahrhundert n. Chr., bei denen von Isoperimetrie die Rede ist.

In dem Aufsatze *Über den griechischen Mathematiker Dionysodoros* (Biblioth. Mathem. $4_3$, 1903, 321—325) führt Schmidt die drei in der Literatur erwähnten Dionysodore auf, den aus Melos, den aus Amisene und den aus Kaunos, und macht es wahrscheinlich, daß die verschiedenen Hinweise auf die mathematischen Leistungen eines Dionysodoros, von denen z. B. Eutokius spricht und von denen auch in Herons *Metrika* die Rede ist — dort wird einem Dionysodor eine Schrift *Über den Wulst* zugeschrieben —, auf Dionysodoros von Kaunos zu beziehen sind, der zur Zeit des Apollonius von Perga gelebt und wahrscheinlich mit diesem wissenschaftlich verkehrt hat.

Die andern aus den Heron-Studien hervorgegangenen Abhandlungen Schmidts betreffen mehr Fragen der angewandten Mathematik und der Technik. Unter den Schriftstellern, die wegen ihrer vielfachen Berührungen mit Heron auf Schmidt eine besondere Anziehung ausgeübt haben, ist namentlich Vitruv zu nennen, von dem ja auch Fragmente in die Heron-Ausgabe aufgenommen sind. Die Frage: *Haben Vitruv und die römischen Feldmesser aus Heron geschöpft?* bildet den Titel einer größeren Abhandlung Schmidts (Biblioth. Mathem. $1_3$, 1900, 297—318) „Wenn wir uns jetzt dem Vitruv zuwenden, so verzichte ich mit Absicht auf ein Moment, durch welches allein schon die Unmöglichkeit dargetan würde, daß Vitruv aus Heron geschöpft hat, nämlich durch den bis jetzt noch nicht widerlegten Nachweis, daß Herons *Mechanik* nach dem Jahre 55 n. Chr. fällt, sondern ich will lediglich aus den zwischen Heron und Vitruv vorliegenden sachlichen Berührungen die Möglichkeit gegenseitiger Abhängigkeit einer Prüfung unterziehen. Beide zitieren sich nicht, weder Heron den Vitruv, noch Vitruv den Heron, obgleich Vitruv genug griechische Autoren anführt.“

Durch Besprechung einer großen Zahl von Problemen, mechanischen Vorrichtungen, Arbeiten verschiedener Art, wie z. B. Nivellierungen, die bei Vitruv und Heron gemeinsam vorkommen, gelangt Schmidt zu dem Resultate, daß „genaue Übereinstimmungen zwischen Heron und Vitruv nicht nur spärlich, sondern auch meist so allgemeiner Art sind, daß sie für die Festsetzung gegenseitiger Abhängigkeit nicht in Betracht kommen, daß aber andererseits die Abweichungen zahlreich und meist so erheblich sind, daß eine gegenseitige Benutzung ausgeschlossen erscheint“.

Während also Schmidt die gestellte Frage in bezug auf Vitruv, entgegen bisheriger Ansichten, verneint, so läßt er sie für die römischen Feldmesser, z. B. Columella offen. Außerdem tritt er der Ansicht Cantors entgegen, daß das sogenannte *ἄλλο βιβλίον* eine verlorene 2. Ausgabe von Herons *Geometrie* sei.

Der Ingenieurkunde gehören auch die beiden Abhandlungen *Nivellierinstrument und Tunnelbau im Altertume* (Biblioth. Mathem. $4_3$, 1903, 7—12) und *Über die Gestalt der Groma der römischen Feldmesser* (Biblioth. Mathem. $4_3$, 1903, 234—237) an. Im Anschluß an HERON III gibt SCHMIDT in der ersten eine genaue Beschreibung der antiken Dioptra und des Nivellierlineals. „Praktisch ist das Nivellement, wie HERON wiederholt hervorhebt, unter anderem zur Anlegungen von Wasserleitungen verwendet. Hierzu sind, wohl schon zur Zeit des POLYKRATES (6. Jahrh. vor Chr.), auch Bergtunnel angelegt. Bekannt ist des EUPALINOS aus Megara Durchstich des 228 m hohen Berges Kastro (Kalkstein) auf Samos, ein im wesentlichen geradliniger Tunnel, der etwa 1000 m lang und durchschnittlich 2,30 m hoch und breit ist."

Die Aufgabe: „Einen Berg in gerader Linie zu durchstechen, wenn die Mündungspunkte des Tunnels an dem Berge gegeben sind", findet sich auch bei HERON (*Dioptra* 15) und wird von ihm mit Benutzung einer Art rechtwinkliger Koordinaten gelöst, die mittels der Dioptra festgelegt werden und die schließlich zur Bestimmung der Tunnelachse führen. „Wird der Graben (Tunnel, ὄρυγμα) auf diese Weise hergestellt", schließt HERON siegesgewiß, „so werden sich die Arbeiter treffen".

EUPALINOS freilich muß sich damals wohl einfacherer Hilfsmittel bedient haben, als sie bei HERON beschrieben sind, denn das Zusammentreffen ist ihm nicht ganz geglückt. „Zwar ist nachweislich der samische Tunnel von beiden Seiten in Arbeit genommen (Nordtunnel etwa 575 m lang, Südtunnel 425 m), aber der Nordtunnel weicht beim Zusammenstoßen mit dem Südtunnel von dessen Richtungslinie um 5—10 m nach Westen ab, und es war deshalb eine kleine Ausbiegung nach Osten erforderlich. Es scheinen des EUPALINOS Messungen, wie übrigens auch sein Nivellement, nicht ganz exakt gewesen zu sein.

Sehen wir aber von den für jene Zeit entschuldbaren Ungenauigkeiten ab, so begreifen wir das Erstaunen des HERODOT (III, 60) der diesen Tunnel mit „unter die drei größten Werke aller Hellenen" rechnet. Das zweite Wunder hellenischer Welt", fügt SCHMIDT hinzu, „war für ihn der Hafendamm von Samos (beinahe 400 m lang) der wohl aus der gleichen Zeit wie der Tunnel stammt. Über eine derartige Anlage belehrt uns HERON, *Dioptra* 17, S. 244ff."

Von der Gestalt der „Groma" handelt die zweite der genannten Abhandlungen. Über die spezielle Einrichtung und die Verwendung dieses im allgemeinen ja wohl bekannten Instrumentes waren die Meinungen geteilt. „Man leitet die Groma von den Etruskern her; die Römer nannten sie auch „Stern" (stella, Winkelkreuz), wie die Griechen „asteriskos" (ἀστερίσκος Sternchen). Sie diente nicht nur zum Einvisieren einer be-

stimmten Linie, z. B. der Ostwestlinie bei Sonnenaufgang, sondern auch zur Bestimmung der auf dieser senkrechten Mittagslinie, also zum Abstecken rechter Winkel."

Schmidt war nun in der Lage, eine wirkliche, gut erhaltene Groma beschreiben zu können, die neuerdings bei den Limesgrabungen an den Tag gekommen war. Es wird die von H. Schöne herrührende Rekonstruktion mitgeteilt unter Hinweis auf das, was wir aus literarischen Quellen, aus Frontin, Nipsus, und Heron über diese „machinula" wissen.

Zwei weitere Abhandlungen in der Bibliotheca Mathematica beziehen sich auf Probleme der Physik, der Mechanik und der Maschinenlehre. *Physikalisches und Technisches bei Philon von Byzanz* (Biblioth. Mathem. $2_3$, 1901, 377—383) betitelt sich die eine. Mit Philon hat sich Schmidt, wie wir gesehen haben, wiederholt zu beschäftigen gehabt. In dem vorliegenden Aufsatze wird zunächst zusammengestellt, was uns von Philons Werken erhalten ist. Sodann werden an Hand der von R. Schöne 1893 veranstalteten Ausgabe des vierten und fünften Buches der *Mechanica syntaxis* verschiedene physikalische Mitteilungen Philons besprochen, die dem vierten Buche angehören. Sie betreffen die Lehre vom Hebel, die Geschwindigkeit frei fallender Körper, die Elastizität der Metalle, die Hygroskopie und die von Ktesibios erfundene Windbüchse.

*Zur Geschichte des Dampfkessels im Altertume* (Biblioth. Mathem. $3_3$, 1902, 337—341) nennt sich die andere Abhandlung Schmidts. „Neuerdings beschäftigt sich die Geschichte der 'Wärmekraftmaschinen' auch mit einem Heronischen Apparate in Form eines römischen Meilensteins (milliarium), der nach Heron, *Pneum.* II, 34 und Athenaeus III, 98 c von den Alten als Badeofen benutzt wurde und sich als Dampf- und Wasserkessel darstellt. Er erregt dadurch besonderes Interesse, daß er eines der ältesten Beispiele ist, in denen wir einer inneren Feuerung nach Art der Cornwall-Kessel, ferner quer durch die Feuerung laufenden Röhren nach Art der Gallowayschen Quersieder und schließlich einem dritten Rohre nach Art der Fieldröhre begegnen." Schmidt gibt nun eine ausführliche Beschreibung dieses Dampfkessels, dessen Rekonstruktion er schon in der Heron-Ausgabe begründet hatte. Er sah sich dazu veranlaßt, nochmals auf diese Rekonstruktion ausführlicher zurückgekommen, weil inzwischen verschiedene Werke über Wärmekraftmaschinen, wie z. B. das von A. Musil (Leipzig 1902) erschienen waren, in denen diese Verhältnisse ganz unrichtig wiedergegeben sind. Freilich würde Musil, der sich S. 3—6 seiner *Grundlagen der Theorie und des Baues der Wärmekraftmaschinen* mit den Heronischen befaßt, eine „Reihe von Irrtümern vermieden haben, wenn er die bereits 1899 und 1900 erschienenen Bände der neuen Heron-Ausgabe hätte benutzen wollen. Statt dessen geht er im Anschluß an Beck (*Beiträge zur Geschichte*

*des Maschinenbaues*, Berlin 1899) auf CARIOS elendes Machwerk vom Jahre 1688 zurück, eine Arbeit, die von Übersetzungsfehlern wimmelt, wie ich bereits im Supplemente zu HERON, *Op.* I S. 134 gezeigt habe".

Schon der Umstand, daß alle bekannten griechischen Handschriften der HERONischen *Pneumatik* bis auf eine der Renaissance angehören, hatte SCHMIDT frühzeitig dazu geführt, sich auch mit der wissenschaftlichen Literatur dieser einzigartigen Zeit zu beschäftigen. Und so kam er denn bald in Berührung mit dem „Faust der Renaissance", LEONARDO DA VINCI. In der Abhandlung *LEONARDO DA VINCI und HERON von Alexandria* (Biblioth. Mathem. $3_3$, 1902, 180—187) weist SCHMIDT zunächst darauf hin, daß „LEONARDO, dieser erste große Moderne, es nicht verschmäht hat, von den heutzutage so vielfach verachteten Alten sich anregen zu lassen und zu lernen". Das beweisen nicht nur LEONARDOS Zitate aus ARCHIMEDES, ARISTOTELES, EPIKUR, EUKLID, LUKREZ, PLATO, PLINIUS, POSIDONIUS, PYTHAGORAS und VITRUV, das geht auch aus dem Inhalte der Schriften LEONARDOS, insbesondere der in dem Codice Atlantico [1]) enthaltenen, deutlich hervor. „Ob LEONARDO den HERON kenne, schien zweifelhaft, nachdem sich meine Vermutung, daß er den Ambrosianus J 38 inf. geschrieben haben könne, als unerweislich herausgestellt hatte (s. S. 362). In dessen hat jetzt Herr PAUL MÜLLER-WALDE auf Fol. 95ᵛ des Codice Atlantico seinen Namen erwähnt gefunden: 'Erone de acque'." SCHMIDT weist nun an einer Reihe von Einzelheiten nach, daß LEONARDO HERONS *Pneumatik* gekannt und benutzt hat. Abgesehen von dem einfachen gebogenen Heber findet man bei LEONARDO den Glockenheber HERONS (*Pneum.* I, 3). Ferner benutzt er den Tantalusbecher (*Pneum.* I, 13) zur Konstruktion eines Bechers, der eine gewisse Ähnlichkeit mit unsern Vexierschoppen hat. Durch andere Hebervorrichtungen (*Pneum.* I, 4 und 5) ist LEONARDO zur richtigen Erkenntnis über das Gesetz der Ausflußgeschwindigkeit geführt worden. Ebenso augenfällig ist die Übereinstimmung zwischen HERON und LEONARDO bei der sich selbst regulierenden Lampe (*Pneum.* I, 34), und in LEONARDOS Türverschluß erkennt man die automatischen Tempeltüren HERONS (*Pneum.* I, 38) wieder. Andere Stellen bei LEONARDO weisen darauf hin, daß er auch PHILON gekannt hat.

„Mit den Übereinstimmungen auf physikalischem Gebiet sind aber die Beziehungen zwischen HERON und LEONARDO noch nicht zu Ende, sondern sie greifen auch auf das mathematische Gebiet über. Das Nivellement, welches wir Fol. 131ʳ im Cod. Atlant. finden, erinnert an HERONS *Dioptra.*" Erwähnenswert ist auch das lebhafte Interesse für das delische Problem,

1) Dieses herrliche Werk liegt nun „riprodotto e pubblicato della R. Accademia dei Lincei", seit einigen Monaten (Mitte 1905) in dem berühmten Verlage von Ulrico Hoepli in Mailand in prächtiger Ausgabe vollendet vor.

das LEONARDO mit PHILON und HERON teilt, sowie der Umstand, daß LEONARDO den HERONischen Gnomon kennt.

Der Beschäftigung mit LEONARDO DA VINCI ist auch die Abhandlung SCHMIDTS *Zur Textgeschichte der „Ochoúmena" des ARCHIMEDES* (Biblioth. Mathem. $3_3$, 1902, 176—179) entsprungen. „Die Schrift des ARCHIMEDES 'Über die schwimmenden Körper' ist nur lateinisch, nicht griechisch, in MOERBEEKS Übersetzung aus dem Jahre 1269 (ROSE, *ARCHIMEDES im Jahre 1269*, Deutsche Literaturz. 1884, S. 210—213; J. L. HEIBERG, *Neue Studien zu ARCHIMEDES*, Abh. z. Gesch. d Mathem. 5, 1890, S. 46ff) erhalten.[1]) Ihr erster Teil wurde erst 1543 von TARTAGLIA in Venedig herausgegeben, das zweite Buch sogar erst 1565 gedruckt. Spuren von dem Vorhandensein einer mittelalterlichen lateinischen Übersetzung (also wohl des WILHELM VON MOERBEEK), am Ende des 16. Jahrhunderts in Köln, hat CURTZE (Zeitschr. für Mathem. 28, 1883; Hist. Abt. S. 12) nachgewiesen. Aber schon vor der Drucklegung durch TARTAGLIA wurde MOERBEEKS Übersetzung benutzt, so von keinem Geringeren als LEONARDO DA VINCI."

Im Codice Atlantico finden sich nämlich Exzerpte aus den „Ochoúmena" des ARCHIMEDES, aus denen mit Sicherheit hervorgeht, daß LEONARDO die Übersetzung des WILHELM VON MOERBEEK, vielleicht dessen Originalexemplar, den Ottobonianus 1850 selbst, möglicherweise im Jahre 1502 (oder 1514?) benutzte. Einige ausgewählte Lesarten werden von SCHMIDT mitgeteilt.

Aus einer weiteren Notiz im Codice Atlantico „ergibt sich, daß ein vollständiger ARCHIMEDES in der Bibliothek des Herzogs von Urbino war. Von diesen Herzögen spricht man erst seit dem Jahre 1474. Als aber im Jahre 1499 CESARE BORGIA, Herzog des von LUDWIG XII. neugeschaffenen Herzogtums Valentinois in der Dauphiné, sich in den Besitz der Romagna setzte und ihr auch Urbino einverleibte, wurde der ARCHIMEDES entführt und befand sich zur Zeit von LEONARDOS Erkundung, also im Anfange des 16. Jahrhunderts, bei dem Bruder des Monsignore von S. GUSTA in Rom, wenigstens erklärte letzterer, ihn seinem in Sardinien wohnenden Bruder gegeben zu haben."

SCHMIDT prüft nun die Frage, ob dieser „vollständige ARCHIMEDES", von dem LEONARDO spricht, ein griechischer oder ein lateinischer gewesen sei, und kommt zu dem Schlusse, daß es höchst wahrscheinlich die lateinische Übersetzung des WILHELM VON MOERBEEK gewesen ist, die LEONARDO (trotz des Fehlens des Ψαμμίτης) als „ARCHIMEDE intero" bezeichnet hat. Vielleicht war es nun gerade jene Originalhandschrift,

1) Die griechische Vorlage, die MOERBEEK benutzte „und aus der er mehrere ihm unverständliche uns aber wertvolle Ausdrücke auf dem Rande notiert hat, scheint zur Zeit der päpstlichen Gefangenschaft in Avignon verloren gegangen zu sein".

der Ottobonianus 1850 der vatikanischen Bibliothek in Rom. Die wechselvollen Schicksale dieser bemerkenswerten Handschrift wären dann nach SCHMIDT folgende gewesen: „Die ARCHIMEDESübersetzung, 1269 entstanden, wäre also nach 1311 aus der päpstlichen Bibliothek abhanden gekommen, vielleicht um 1480 nach Urbino geraten, aber 1499 dort weggenommen (tolto). 1508 ist sie im Besitze 'ANDREAE CONERI' (s. HEIBERG, a. a. O., S. 3). Beim Monsignore von S. GUSTA würde sie wohl um 1502 oder um 1514 gewesen sein, da in diesen Jahren sich LEONARDO in Rom aufhielt. Die weiteren Schicksale sind bekannt, s. HEIBERG, a. a. O. S. 3, 4."

Auch die letzte Arbeit, die SCHMIDT veröffentlicht hat, gehört dem Arbeitsgebiete an, das man kurz mit dem Namen HERON bezeichnen kann. Sie ist betitelt *Aus der antiken Mechanik* und veröffentlicht in den Neuen Jahrbüchern für das klassische Altertum, Jahrg. 1904. Nach allgemeineren Betrachtungen über das, was uns aus dem Altertume überliefert worden und was verloren gegangen ist, preist SCHMIDT die Übersetzungstätigkeit der Araber. Es ist für uns ein Glück, daß dieses Volk nicht selber wissenschaftlich produktiver gewesen ist, denn sonst wäre seine rezeptive Tätigkeit vielleicht unterblieben. Die Leistung eines APOLLONIUS aber hätten die Araber doch nicht übertreffen können. „Außer vielem andern haben sie uns auch die Übersetzung zweier griechischer Schriften geschenkt, von denen uns anderweitig nur die Titel und spärliche Fragmente erhalten waren. Die Existenz dieser arabischen Übersetzungen war bis vor kurzem nicht einmal dem engeren Kreise der Arabisten bekannt; es ist also kein geringes Verdienst des französischen Gelehrten CARRA DE VAUX, durch seine unermüdliche Umsicht sie ans Licht gezogen zu haben, nämlich 1894[1]) die *Mechanik* HERONS von Alexandria, 1897 aber die *Pneumatik* PHILONS von Byzanz[2]), eines Schriftstellers aus der zweiten Hälfte des dritten Jahrhunderts, eines Nachahmers des großen Erfindergenies KTESIBIOS von Alexandria und eines Vorläufers des HERON von Alexandria."

Die *Pneumatik* PHILONS bildet einen Teil des großen, *Μηχανικὴ σύνταξις* betitelten Handbuches, aus dem SCHMIDT schon wiederholt Mitteilungen gemacht hatte (s. S. 372 und 378). In der vollständigen Ausgabe, die wir CARRA DE VAUX verdanken, lernen wir nun noch eine ganze Reihe sinnreicher automatischer Vorrichtungen kennen. SCHMIDT beschreibt die selbsttätige Waschvorrichtung, die auf KTESIBIOS zurückzugehen scheint, den intermittierenden Brunnen, ein Vexiergefäß (Weindieb),

1) In diesem Jahre erschien die Separatausgabe der Abhandlung, die CARRA DE VAUX 1893 (dem Entdeckungsjahre der Mechanik in der Leydener Handschrift) im Journal asiatique veröffentlicht hatte.

2) 1902 von CARRA DE VAUX als selbständige Schrift in Paris herausgegeben.

das Urbild der Taucherglocke und viele andere interessante Dinge. Hervorgehoben sei nur noch „ein ἐπίπυρον, dessen aus dem Innern aufsteigender Dampf für das Vögelgezwitscher benutzt wird, wie wir das aus Heron kennen. Sollte der Zusatz, den die Oxforder Hs. bietet, echt sein, so hätten wir hier das älteste Beispiel für den Dampf als bewegende Kraft, die Heronische Äolipile (Reaktionsdampfkugel) würde dann erst an zweiter Stelle kommen." Endlich hebt Schmidt auch noch hervor, daß „der 'Heronsball' seinen Namen mit Unrecht führt; wir müßten eigentlich Philonsball sagen, da diese Vorrichtung schon als Detail in einem Philonischen Apparate (Kap. 38) vorkommt".

An die Mitteilungen aus Philon schließt Schmidt solche aus Heron, und zwar aus der *Mechanik*, der *Katoptrik* und der *Dioptra*. Sie stammen natürlich alle aus der Heron-Ausgabe und sind von Schmidt zum Teil auch schon in früher besprochenen Arbeiten verwertet worden. Nur tritt hier mehr das philologisch-historische in den Vordergrund. So wird z. B. darauf hingewiesen, daß die von Heron, *Mech.* III, 9 beschriebene Vorrichtung die älteste Seilbahn ist, und nicht die von dem Florentiner Ingenieur Bonaiuto Lorini 1597 beschriebene. Der römischen Groma, von der in einem früheren Aufsatze die Rede war, wird als ein fein durchdachtes Instrument die griechische Dioptra gegenübergestellt und es wird über den uns schon bekannten Tunnel des Eupalinos und über den Aquaedukt von Saldae bei Algier berichtet. Den letzten Teil der inhaltsreichen und sehr lesenswerten Abhandlung bildet die Besprechung verschiedener archäologisch und mechanisch interessanter Vorrichtungen, von denen die antike Literatur berichtet: der *Σφενδόνη*, des *Καρχήσιον*, des *Ὡρολόγιον*, des Hirsches des Kanachos und verschiedener fliegender Automaten: Philons flatternder Vogel, Herons fliegendes Bild, der olympische Adler, die Taube des Archytas.

Wir wenden uns nun noch zu einer Abhandlung Schmidts, die einem ganz anderen Kreise angehört und unabhängig von den Heron-Studien entstanden ist. Der Aufsatz *Zu dem Berichte des Simplicius über die Möndchen des Hippokrates* (Biblioth Mathem. $4_3$, 1903, 118—126) knüpft an die Abhandlung *Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates* an, die ich 1902 in derselben Zeitschrift veröffentlicht hatte. Ich hatte darin nachzuweisen versucht, daß Simplicius[1]) als Mathematiker bisher ganz unrichtig beurteilt worden war und daß die Auffassungen von Bretschneider und Tannery unhaltbar seien. Obwohl

1) „. . . der treffliche Simplicius", sagt v. Wilamowitz (Kultur d. Gegenwart I, 8, S. 205), „der Aristoteles-Erklärer, dem die Welt nie genug für die Erhaltung der Bruchstücke von Parmenides, Empedokles, Anaxagoras, Melissos, Theophrast, Eudemus u. a. danken kann".

ich bei dieser Arbeit von meinem verehrten Kollegen, Herrn Professor H. HITZIG, in wirksamster Weise unterstützt worden war, so hatte ich doch, als Nichtphilologe, den Wunsch, daß die Ergebnisse meiner Untersuchung noch von einem auf diesem Spezialgebiete arbeitenden Fachgelehrten geprüft würden, und ich wandte mich deshalb an den Herausgeber des SIMPLICIUS, Herrn Professor DIELS. Dieser hatte die Freundlichkeit, mich mit SCHMIDT bekannt zu machen, der sich sofort mit der ihm eigenen Energie der Aufgabe annahm. Aus dem regen Verkehr, der sich alsbald entspann, ging zunächst meine Note *Zur Rehabilitation des SIMPLICIUS* (Biblioth. Mathem. $4_3$, 1903, 13—18) und sodann die genannte Abhandlung SCHMIDTS hervor. Es wird nicht zum wenigsten seinen Bemühungen zu verdanken sein, wenn demnächst dieser historisch so überaus wichtige Bericht des SIMPLICIUS in einwandfreier Form herausgegeben werden kann, in einer Form, die dann allerdings nicht unerheblich von der abweichen wird, in der ihn BRETSCHNEIDER und TANNERY hatten erscheinen lassen Eine Differenz war nur noch vorhanden in der Beurteilung der Quadratur des dritten Möndchens des HIPPOKRATES. Die freudige Zustimmung aber, die SCHMIDT kurz vor seinem Tode einer letzten Konjektur hat (s. S. 354) zuteil werden lassen, darf wohl als ein Beweis dafür gelten, daß nun auch noch diese letzte Stelle des SIMPLICIUSschen Berichtes in Ordnung gebracht worden ist. —

Fürwahr, es ist ein reiches Lebenswerk, das da in der stillen Studierstube des Helmstedter Gymnasiallehrers vollbracht worden ist. Und doch haben wir es noch nicht ganz kennen gelernt. Noch wäre zu berichten von kleineren Mitteilungen und Aufsätzen verschiedener Art, z. B. von dem hübschen Artikel in der Allgemeinen Zeitung *Zur Geschichte der Holzarchitektur in Niedersachsen*, oder von kleinen Bemerkungen zur zweiten Auflage von CANTORS *Vorlesungen*. Eines aber ist noch ganz besonders hervorzuheben: SCHMDTS umfassende und hervorragende Tätigkeit als Referent. Und auch hier soll nicht gesprochen werden von den vielen sorgfältigen Referaten, die er z. B. in der Deutschen Literaturzeitung, in der Berliner philologischen Wochenschrift u. a. hat erscheinen lassen, es sei nur hervorgehoben der umfangreiche *Bericht über griechische Mathematiker und Mechaniker* (1890—1901) im Jahresbericht über die Fortschritte der klassischen Altertumswissenschaft 108, 1901, 59—128. „Nicht ohne Bedenken", schreibt SCHMIDT bescheiden, „sind wir an diesen Bericht herangetreten, da wir keine öffentliche Bibliothek am Orte haben, welche einschlägige Schriften enthielte. Deshalb ist es uns unmöglich, für absolute Vollständigkeit einzustehen, wie wir auch manche Schriften aus demselben Grunde nicht haben einsehen können. Letztere haben wir mit * bezeichnet. . . ."

Trotz dieser Schwierigkeiten weist der Bericht nicht weniger als 230, zum Teil recht ausführliche Besprechungen auf; es sei nur hingewiesen auf No. 2 (CANTOR), 3 (GÜNTHER), 4 (ZEUTHEN), 17 (HULTSCH), 22 (MAX C. P. SCHMIDT), 23 (V. BRAUNMÜHL), 24 (HEIBERG), 29 (GERLAND), 35 (SUTER), 71—73 (HEIBERG und MENGE), 75 (HEIBERG), 94 (HEIBERG), 98 (HULTSCH), 107 (RUDIO), 116 (HULTSCH), 125 (R. SCHÖNE), 127 (CRÖNERT), 130 (HULTSCH), 137 (CARRA DE VAUX), 158 (ERMAN), 168 (MAAS), 177 (WERTHEIM), 178 (TANNERY), 190 (VAN PESCH), 193 (R. SCHÖNE), 208 (USSING), 215—216 (MORTET), 223 (BUBNOW) — wo die eingeklammerten Namen teils Autoren, teils Herausgeber bezeichnen. Und alle diese Besprechungen zeugen nicht nur von souveräner Beherrschung des Stoffes — die ist bei SCHMIDT selbstverständlich – sondern namentlich auch von ruhiger, vornehmer Sachlichkeit.

Gewissenhaftigkeit und Sachlichkeit, Schlichtheit und Ehrlichkeit waren die Grundzüge von SCHMIDTS Wesen und von seiner wissenschaftlichen Arbeit. Diese Grundzüge spiegeln sich auch in seiner Schrift. Es kam ihm nicht darauf an, durch schöngebaute Sätze zu blenden oder geistreich zu erscheinen auf Kosten der Wahrheit. Die Sache stand voran. Und darum war er auch kein Rechthaber und er erkannte gern die Arbeit anderer an, wenn sie ehrlichem Streben entsprungen war.

Ich schließe diesen Nachruf mit den Worten von DIELS, dem die Wissenschaft nicht genug dafür danken kann, daß er SCHMIDT einem seinen Fähigkeiten in so hohem Maße entsprechenden Arbeitsfelde zugeführt hat:

„Die hervorragende wissenschaftliche Leistung SCHMIDTS ist von allen Seiten anerkannt worden. Das Große daran ist, daß seit Menschengedenken kein Gelehrter sich gefunden hat, der mit so gleichmäßiger Sorgfalt das Philologische wie das Technische zugleich im Auge hatte und zur Geltung zu bringen wußte. Es ist ein Jammer, daß dieser Mann über der Last seiner geistigen Anstrengung zusammengebrochen ist".

---

## Verzeichnis der Publikationen von WILHELM SCHMIDT in chronologischer Folge.

**1893.**

1. *De FLAVII JOSEPHI elocutione observationes criticae. Pars prior.* Leipzig 1893. Diese Separatausgabe enthält auf 48 Seiten nur die vier ersten Paragraphen der eigentlichen Doktordissertation SCHMIDTS, die vollständig abgedruckt ist in den Jahrbüchern für klassische Philologie, herausg. v. A. FLECKEISEN. Suppl. XX, S. 341—550. Leipzig 1894.

**1894.**

2. *Das Prooemium der Pneumatik des HERON von Alexandria in lateinischer Übersetzung. Aus einer Münchener und zwei Mailänder Handschriften herausgegeben von Oberlehrer Dr. WILHELM SCHMIDT.* Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht des Herzoglichen Realgymnasiums in Braunschweig Ostern 1894. 4. [38 S.]

**1898.**

3. *Zur Geschichte des Thermoskops.* Abh. zur Gesch. der Mathem. 8, 1898, S. 161—173.

4. *Heron von Alexandria, Konrad Dasypodius und die Straßburger astronomische Münsteruhr.* Abh. zur Gesch. der Mathem. 8, 1898, S. 175—194 [mit einer Tafel].

5. *Heron von Alexandria im 17. Jahrhundert.* Abh. zur Gesch. der Mathem. 8, 1898, S. 195—214 [mit 2 Tafeln].

**1899.**

6. *Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia. Vol. I: Herons von Alexandria Druckwerke und Automatentheater, griechisch und deutsch herausgegeben von Wilhelm Schmidt. Im Anhang Herons Fragment über Wasseruhren, Philons Druckwerke, Vitruvs Kapitel zur Pneumatik. Mit einer Einleitung über die Heronische Frage und Anmerkungen.* Mit 124 Figuren. Leipzig 1899. [LXXII und 514 S.]

7. — — *Supplementheft: Die Geschichte der Überlieferung. Griechisches Wortregister.* Leipzig 1899. [182 S.]

8. *Heron von Alexandria.* Sonderabdruck aus den Neuen Jahrbüchern für das klassische Altertum, Geschichte und deutsche Literatur. Mit 39 Abbild. auf 3 Taf. Leipzig 1899 [15 S.]

**1900.**

9. *Zur handschriftlichen Überlieferung Herons von Alexandria.* Rheinisches Museum f. Philologie. $55_2$, 1900, S. 625—634.

10. *Heronis Alexandrini opera quae supersunt omnia. Vol. II, 1: Herons von Alexandria Mechanik und Katoptrik, herausgegeben und übersetzt von L. Nix und W. Schmidt. Im Anhange Excerpte aus Olympiodor, Vitruv, Plinius, Cato, Pseudo-Euklid.* Mit 101 Figuren. Leipzig 1900. [XLIV und 415 S.]

11. *Archimedes' Ephodikón.* Biblioth. Mathem. $1_3$, 1900, 13—14.

12. *Haben Vitruv und die römischen Feldmesser aus Heron geschöpft?* Biblioth. Mathem. $1_3$, 1900, 297—318.

13. *Sind die Heronischen Vielecksformeln trigonometrisch?* Biblioth. Mathem. $1_3$, 1900, 319—320.

**1901.**

14. *Zur Geschichte der Isoperimetrie im Altertume.* Biblioth. Mathem. $2_3$, 1901, 5—8.

15. *Physikalisches und Technisches bei Philon von Byzanz.* Biblioth. Mathem. $2_3$, 1901, 371—388.

16. *Bericht über griechische Mathematiker und Mechaniker (1890 — 1901).* Jahresber. über die Fortschr. der klass. Altertumswiss. 108, 1901, 59—128.

**1902.**

17. *Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik".* Biblioth. Mathem. $3_3$, 1902, 137—139.

18. *Noch einmal Archimedes' Ephodikón.* Biblioth. Mathem. $3_3$, 1902, 143—144,

19. *Zur Textgeschichte der „Ochoúmena" des Archimedes.* Biblioth. Mathem. $3_3$ 1902, 176—179.

20. *Leonardo da Vinci und Heron von Alexandria.* Biblioth. Mathem. $3_3$, 1902, 180—187.

21. *Zur Geschichte des Dampfkessels im Altertume.* Biblioth. Mathem. $3_3$, 1902 337—341.

**1903.**

22. *Über den griechischen Mathematiker Dionysodoros.* Biblioth. Mathem. $4_3$, 1903, 321—325.

23. *Nivellierinstrument und Tunnelbau im Altertume.* Biblioth. Mathem. $4_3$, 1903, 7—12.

24. *Zu dem Berichte des Simplicius über die Möndchen des Hippokrates.* Biblioth. Mathem. $4_3$, 1903, 118—126.

25. *Über die Gestalt der Groma der römischen Feldmesser.* Biblioth. Mathem. $4_3$, 1903, 234—237.

26. *Zu Herons Automatentheater.* Hermes, Zeitschr. f. klass. Philol. 38, 1903, 274—279.

27. *Zur Geschichte der Holzarchitektur in Niedersachsen.* Beilage z. Allgem. Zeit., 1903, No. 205.

**1904.**

28. *Aus der antiken Mechanik.* Neue Jahrbücher für das klassische Altertum, Geschichte und deutsche Literatur 1904, 329—351. (Mit drei Doppeltafeln.)

---

29. Zahlreiche Referate zu verschiedenen Zeiten und in verschiedenen Zeitschriften (Deutsche Literaturzeitung, Berliner philologische Wochenschrift u. a.).

# Sul corso di storia delle scienze matematiche nella r. università di Napoli.

Di F. Amodeo a Napoli.

Il corso ufficiale della storia delle matematiche, che io ho già iniziato dal 16 del mese di Dicembre 1905, con un discorso inaugurale intitolato: „I trattati delle sezioni coniche da Apollonio a Simson", è biennale, enciclopedico, e non speciale, e si estende dalle origini fino al principio del secolo XIX, con accenni anche alle conoscenze astronomiche dei diversi tempi. Le lezioni si fanno 3 volte per settimana e durano da un' ora ad un' ora e mezzo.

Per ora il corso è facoltativo per tutti gli studenti; ma spero che presto, anche in Italia, si persuaderanno che è necessario che si renda obbligatorio per gli aspiranti al dottorato in matematiche, e per gli alunni della Scuola di magistero. In questo primo anno io tratterò delle matematiche dai primi tempi fino alla fine del secolo XII, non senza però fare qualche digressione nei tempi più vicini a noi, quando l'opportunità si presenta, e quando i bisogni particolari degli studenti che assistono al corso lo richiedano.

L'anno prossimo tratterò da Leonardo da Pisa in poi.

Il carattere predominante, che io intendo dare al corso, è di far conoscere e studiare le opere dei più grandi matematici di ciascun' epoca nelle parti più geniali, e che maggiormente hanno contribuito al progresso della scienza.

Siccome però ciò non è possibile farlo egualmente per tutti gli autori, io presceglierò questo o quell' autore, una o un' altra teoria, secondo che se ne presenteranno le opportunità; e ciò contribuirà a dare ogni anno al corso un aspetto diverso.

La tela sulla quale le mie lezioni saranno abbozzate è data approssimativamente dal seguente schema di programma da me presentato alla Facoltà.

### Anno primo.

1. L'aritmetica e la geometria presso gli antichi Egiziani. Il papiro Rhind. Gli arpedonatti e la squadra egiziana.
2. L'aritmetica e la geometria presso gli Assiri ed i Babilonesi; documenti che ne attestano.
3. Fonti alle quali si attingono le notizie matematiche degli antichi Greci. I diversi sistemi di numerazione; la logistica greca. Preistoria dell' astronomia.
4. Scuola Jonica. Talete da Mileto e i suoi seguaci. Loro probabili conoscenze.
5. Scuola Pitagorica. Pitagora e Pitagorici. Loro cognizioni in aritmetica, in geometria ed in astronomia.
6. Matematici estranei alla scuola di Pitagora. I sofisti.
7. Pitagorei e Pitagoristi fino ad Archita da Taranto. I problemi della quadratura del cerchio e della duplicazione del cubo.
8. Scuola Ateniese. Platone e l'Accademia; suoi contemporanei. I Geometri dell' Accademia. Cognizioni matematiche di Aristotile.
9. Scuola di Cizico. Eudosso da Cnido. Menecmo e le sezioni coniche. Aristeo il vecchio; divinazione dei suoi libri fatta da Viviani.
10. Scuola di Alessandria. Euclide; esame delle sue opere. Eratostene e le sue contribuzioni. Apollonio Pergeo; esame delle sue opere.
11. Digressione nei tempi medioevali e moderni in riguardo alle ristampe, alla scoperta ed alle numerose divinazioni delle opere di Apollonio fatte da Memo, Commandino, Maurolico, Borelli, Viviani, Halley, Viète, Fermat, Descartes, Newton, Scorza, Fergola, Flauti, Zeuthen.
12. Archimede; esame delle sue opere, delle sue invenzioni, e dei suoi metodi di ricerca. Confronto di questi metodi con i fondamenti del calcolo infinitesimale.
13. Continuatori della scuola alessandrina. Contribuzioni di Nicomede, Diocle, Perseo e Zenodoro. Ipparco da Nicea e le sue opere astronomiche. Gemino da Rodi. Teodosio e Menelao e la loro „Sferica“.
14. Tolomeo e il suo *Almagesto*. Importanza del suo teorema sul quadrangolo inscritto. Digressione su Carnot e Fergola. Teone di Alessandria e Ipazia.
15. Diofanto. La sua aritmetica e le sue invenzioni algebriche.
16. Pappo. La sua Collezione matematica. Esame di quest' opera. Proclo, Marino, Simplicio, Eutocio, Sereno. Decadenza delle scuole greche ed alessandrina.

17. Le matematiche presso i Romani. Aritmetica, geometria ed agrimensura. BOEZIO.
18. L'aritmetica, la geometria, l'algebra e la trigonometria presso gli Indiani.
19. Le matematiche dei Cinesi.
20. Origine, sviluppo e tramonto delle matematiche presso gli Arabi.
21. Erudizione claustrale fino alla fine del XII secolo. GERBERT. Abbacisti ed Algoritmisti

**Anno secondo.**

1. Risveglio delle matematiche in Europa. LEONARDO DA PISA; il suo *Liber Abbaci* e gli altri scritti. NEMORARIO e le sue opere. Altri matematici del XIII secolo.
2. Matematici del XIV e XV secolo. CUSANUS, ALBERTI, LEONARDO DA VINCI, LUCA PACIOLO.
3. Matematici del XVI secolo. STIFEL, DEL FERRO, CARDANO, TARTAGLIA, FERRARI, VIÈTE.
4. Esame degli scritti di CARDANO e TARTAGLIA. Le equazioni di 3° e 4° grado. Digressione sulle risoluzioni posteriori fino al secolo XX.
5. Divinazione e scoperta delle opere classiche. GHETALDI, SNELLIUS, BACHET DE MÉZIRIAC, HARDY, HERIGONE, GIRARD, FERMAT, SCHOOTEN, VIVIANI, BORELLI.
6. KEPLER e le sue opere. MYDORGE, DESARGUES e le loro opere. PASCAL e le sue opere. DESCARTES e le sue opere. SCHOOTEN, WALLIS. La geometria nuova e la geometria analitica.
7. GALILEI; i suoi contemporanei; le sue opere; i suoi scolari. TORRICELLI.
8. La trigonometria, i logaritmi, la teoria dei numeri, la risoluzione geometrica delle equazioni nel secolo XVII. FERMAT e le sue opere. ROBERVAL. Tangenti e quadrature, maxima, serie, frazioni continue. CAVALIERI, HUYGENS.
9. I primi albori del calcolo infinitesimale. NEWTON, LEIBNIZ e i BERNOULLI. Esame delle opere di NEWTON e LEIBNIZ. Polemica NEWTON-LEIBNIZ. Risoluzione numerica delle equazioni. La gravitazione universale.
10. EULER, CLAIRAUT, D'ALEMBERT e le loro opere. Classificazione delle funzioni; le quantità negative e le immaginarie; le superficie di 2° ordine; curve a doppia curvatura; le perturbazioni del movimento dei pianeti; le equazioni generali dell' idrodinamica.

11. Lagrange e Monge e le loro opere. Le funzioni ellittiche; il calcolo delle differenze; il calcolo delle variazioni; le corde vibranti e la propagazione del suono; i problemi di massimi e minimi. La geometria descrittiva e la geometria differenziale.
12. Laplace, Carnot, Saccheri, Legendre, Ruffini, Fergola. Gli integrali ellittici, le equazioni differenziali; la teoria dei minimi quadrati, il calcolo delle probabilità; il problema dell' attrazione dell' ellissoide; l'accelerazione secolare della luna; le leggi di Laplace sui satelliti di Giove; il sistema cosmogonico. Le soluzioni negative dei problemi; la geometria delle trasversali e la geometria di posizione; le curvature; il problema di Cramer. Tentativi di un nuovo indirizzo geometrico. L'impossibilità della risoluzione algebrica delle equazioni di grado maggiore di 4.
13. Fourier, Gauss, Poinsot e le loro opere. Teoria delle congruenze; i poligoni regolari; sviluppi in serie; propagazione del colore; leggi del movimento di un solido; la determinazione delle orbite.
14. Lo stato delle matematiche al principio del secelo XIX. La geometria proiettiva, e la geometria non euclidea; meccanica fisica; teoria delle onde e delle interferenze; determinanti. Cauchy, Fresnel, Poncelet, Chasles, Plücker, Steiner, Möbius, Staudt, Bolyai, Abel, Jacobi, Arago, Herschel, Encke, Piazzi.

Per dare una indicazione più precisa sul modo come io intenda la trattazione del mio corso di storia delle scienze matematiche, mi permetto di aggiungere qui la fine del mio discorso inaugurale, ove si trova un riassunto del suo contenuto.

Abbiamo visto come Apollonio, a meno di un secolo e mezzo di distanza dall' invenzione delle coniche, aveva saputo formare una trattazione così completa delle proprietà di queste curve, che i suoi successori non seppero che aggiungervi poche cose e di lieve importanza, e come questo trattato fosse lasciato perire in parte, perchè ritenuto in seguito troppo superiore ai bisogni dello insegnamento, quando il livello degli studii discese col succedere dei Romani ai Tolomei in Egitto, col sopravvento della chiesa cristiana alla pagana, con la conquista di Costantinopoli da parte dei Turchi. Solo gli Arabi seppero vedere la necessità di studiare 3 altri libri di Apollonio e ne divennero in tal modo i fedeli custodi.

Siamo venuti quindi nel secolo 16° e abbiamo assistito ai primi tentativi di trasformazione della teoria per opera di Werner, Maurolico, Kepler; ciascuno dei quali cerca di dire nel più breve e più semplice

modo quello che gli occorre nell' applicazione che ha in mente di fare. Poi al tentativo di MYDORGE di trasformare tutta l'opera, che allora si conosceva di APOLLONIO, compresi gli argomenti che aveva cercato di divinare, e di formare un organismo nuovo che riunisse gli sforzi già fatti da suoi predecessori.

Ma nello stesso anno assistiamo contemporaneamente all' esplosione di un' anima ribelle (DESARGUES), che s'invade della necessità delle arti, e cerca con una potenzialità meravigliosa, che io non esito di mettere al di sopra di quella di APOLLONIO, tutto un organismo nuovo, una geometria completa basata su tre concetti; *la proiezione centrale*, *l'involuzione*, *e la polarità*. È certamente da rimpiangere che egli abbia lasciato soltanto un abbozzo di questa sua meravigliosa creazione, che in ambiente più sereno e meno ostinato, quello era tale lievito che non avrebbesi dovuto in alcun modo lasciarlo estinguere.

Ma pur troppo si estinse e con esso perì quell'altra magica creazione del suo giovane ammiratore BLAISE PASCAL. E di queste due creazioni non restarono che i ricordi nei due teoremi: di PASCAL sull' esagono, di DESARGUES sul quadrangolo, inscritti nella conica, e di nuovo APOLLONIO attrae a sé gl' ingegni.

DE LA HIRE, LE POIVRE, NEWTON gettavano intanto nuovi semi che dovevano far nascere l'idea che era possibile trasformare una figura in un'altra, punto per punto, senza alterare le sue essenziali proprietà. L'HOSPITAL gettava altri semi mostrando che una figura si poteva trasformare per mezzo della polarità da punto in retta, e che le coniche tutte si potevano costruire con la sola riga, spezzando l'ultimo anello della catena che con l'opera APOLLONIANA avvinceva i cervelli, facendo costruire le coniche con risoluzioni di secondo grado, mentre la loro costruzione era un problema di primo grado. Questo era il gran riscatto della concezione greca delle coniche, ed è strano che non si sia abbastanza fatto attenzione a ciò. APOLLONIO per costruire le coniche aveva bisogno del cono, quasi un tornio che dovesse inciderle sul piano; MAUROLICO e gli altri, fecero vedere che il cono si poteva eliminare e bastava il compasso e la riga per costruire le coniche punto par punto; L'HOSPITAL mostrò che bastava la sola riga.

Finalmente sorge SIMSON e fa vedere la potenzialità del teorema di PASCAL, la potenzialità del teorema di DESARGUES e la sua propria, giungendo a stabilire che si poteva anche tener conto dei punti d'incontro immaginarii della conica con una retta del suo piano. A parte dunque i nomi, tutti i concetti della nuova geometria erano stabiliti. Però tutte queste idee non furono intese completamente dai geometri del tempo, né credo (fatte eccezioni di DESARGUES, PASCAL e SIMSON) che i loro autori

stessi videro, con la loro mente prodigiosa, tutta la tendenza del nuovo indirizzo che con essa si manifestava. A noi importa di aver fatto notare che ormai fin dal 1735 la geometria conteneva tutti in sé i germi che tanto sviluppo ebbero con BRIANCHON, GERGONNE, PONCELET, CHASLES, MÖBIUS, STEINER nella prima metà del secolo 19°; senza di che mancherebbe un anello della legge armonica dell' evoluzione, dalle concezioni precedenti a quelle che si manifestarono dopo il 1800, con opere troppo sviluppate e troppo complete.

Ed ora io pongo termine a questo mio discorso disadorno. Nello inaugurare questa cattedra io ho voluto dare un esempio di ciò che io intento per trattazione storica delle matematiche scegliendo un argomento nel quale fosse possibile di poter essere inteso da tutti, nei piccoli dettagli, in cui, per l'indole della materia, avrei dovuto necessariamente entrare.

Ognuno ora può formarsi un' idea della lunga serie di temi analoghi che in questo ramo dello scibile si possono utilmente prendere a trattare; e si potrà convincere che, a voler essere uno storico coscenzioso, bisogna tutte rileggere e studiare le opere di cui s'imprende a parlare, e quindi argomentare quanto ardua è l'impresa, e che ricca miniera di lavori è riserbata a chi vorrà dedicarsi a questi studii.

La storia delle matematiche è ancora in abbozzo, perché manca lo studio preparatorio che deve costituire le sui basi granitiche. Se si toglie lo studio delle matematiche greche dell' antichità, che è stato fatto con coscienza e profondamente; per tutti gli altri periodi manca ancora la conoscenza completa di tutte le opere che si sono pubblicate, e che giacciono perdute nelle biblioteche; e ciò non sarà possibile, se prima non si faranno gli studi bibliografici di ogni regione e non si verrà in chiaro di tutte le opere che sono state dimenticate o trascurate.

Né si creda che questo lavoro è infecondo; esso non è studio di teorie morte; parché lo storico non deve perdere il tempo a leggere e compitare dimostrazioni antiquate o noiose di teoremi che ora si dimostrano in poche parole, ma deve andare in cerca delle idee nuove, che ogni autore ha create e incise nei suoi libri, e quelle seguire nel loro sviluppo.

In tal modo non si forma un ingombro mentale di nessum profitto, ma si giunge all' alto fine di formare la conoscenza dell' evoluzione umana nella sua più pura estrinsecazione.

E se voi, giovani del Mezzogiorno, portate ancora nel sangue il ricordo di una lunga e dispotica dominazione, che qui impediva che arrivassero con i libri le manifestazioni del pensiero delle altre nazioni, ora che vi

vedete circondati da una eletta schiera di maestri, che si apprestano colle loro opere a dare futuro e non lieve lavoro agli storici dell' avvenire, ora voi avete più degli altri il dovere di ritemprarvi nel rigore della scienza, e di formare nella scuola, coll' esempio dei grandi uomini passati e presenti, il vostro carattere scientifico morale, e provare al mondo che il lungo servaggio di questa regione non ha fatto degenerare il cervello dei discendenti della scuola di PITAGORA, ma lo fece solamente assopire, e che nel letargo si accumularono le energie intellettuali, che voi ora, al pari dei vostri maestri, saprete sviluppare e disciplinare a vantaggio e decoro di tutta l'Italia.

# Kleine Mitteilungen.

## Kleine Bemerkungen zur zweiten Auflage von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik".

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen".
BM = Bibliotheca Mathematica.

**1:12**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 265. — **1:15**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 323. — **1:22, 29, 34**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 265—266. — **1:36, 64**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137. — **1:103**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1:135**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137. — **1:144, 155, 169, 171**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 137—138. — **1:189—190**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 101. — **1:192, 193**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 101—102. — **1:195**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 56; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 102. — **1:196—197**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 102—103. — **1:198**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 103. — **1:202**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266. — **1:207**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 283. — **1:225, 234**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 138. — **1:255**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 238. — **1:272**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 396. — **1:283**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1:284, 321**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 266—267. — **1:335**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 305. — **1:370**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 319. — **1:383**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:386**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 407. — **1:395**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 323. — **1:400**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:429**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 324. — **1:432**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:434—435**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 396—397. — **1:436**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 138. — **1:437, 440**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:457**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 238. — **1:463**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139, 324. — **1:466**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 397. — **1:467, 469**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267. — **1:475**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267—268; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 283. — **1:476**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1:508**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 68. — **1:510**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 314. — **1:519—520**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **1:537, 540, 542**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1:618**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 306—307. — **1:622**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143.

---

**1**:638. In einem kürzlich erschienenen Artikel *Sulla matematica degli antichi Cinesi* (Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **8**, 1905, 97—102) teilt Herr Vacca mit, daß das chinesische Original des Buches *Tcheou pei* in der Tat genau die Figur enthält, die Herr Cantor nach den ziemlich unklaren Angaben von E. Biot rekonstruiert hat. Herr Vacca gibt auch nach dem Originale selbst eine neue Übersetzung der betreffenden Stelle, woraus hervorzugehen scheint, daß dort der Satz $3^2+4^2=5^2$ bewiesen worden ist, eben um dadurch ein Mittel zur Herstellung eines rechten Winkels zu bekommen. Freilich wird in der Übersetzung des Herrn Vacca das Wort „rettangolo" dreimal (S. 98 Z. 24 zweimal, Z. 31 einmal) angewendet, wo ich der Deutlichkeit halber „angolo retto" oder „squadra" setzen möchte. G. Eneström.

---

**1:641,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:661,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1:662,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:663,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 405. — **1:671,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499. — **1:673,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 407—408; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 307. — **1:675,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 408. — **1:687—689,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 143—144; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 205—206. — **1:694,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 284; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 103. — **1:704, 706, 708, 714,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 499—500. — **1:723,** siehe BM $\mathbf{6}_3$. 1905, S. 307. — **1:735, 736, 744, 748,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 500. — **1:749,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268. — **1:752,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 104. — **1:753,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 408—409. — **1:754,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 409; $\mathbf{6}_3$. 1905, S. 104, 308. — **1:756,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 500; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 308. — **1:757, 767,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 500—501. — **1:794,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 139. — **1:804, 805, 807, 808, 812, 823, 852,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 268—269. — **1:853,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501. — **1:854,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 324; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 206; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 104. — **1:855,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501. — **1:856,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 309.

---

**2:7,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351. — **2:8,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 309. — **2:10,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2:14—15,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 200; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 208—209. — **2:20,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **2:25,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 274. — **2:30,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 105. — **2:31,** siehe BM $\mathbf{2}_3$. 1901, S. 351—352; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239—240; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 309—310. — **2:32,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 105. — **2:34,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 310. — **2:37,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 105. — **2:38,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2:39,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 209. — **2:41,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2:51,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 106. — **2:53,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 201. — **2:57,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2:59—60,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 310—311. — **2:63,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 206. — **2:70,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 417. — **2:73, 82, 87, 88,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502—503.

---

2 : 88. Die Bemerkung, daß Sacroboscos Rechenbuch eine Sammlung von Regeln ohne Zahlenbeispiel bringt, ist im allgemeinen zutreffend. Ausnahmsweise findet sich bei der Erwähnung der komplementären Multiplikationsregel $ab = 10a - a\ (10-b)$ (siehe Curtzes Ausgabe, Kopenhagen 1897, S. 8) ein Zahlenbeispiel, nämlich $4 \cdot 8 = 4 \cdot 10 - 4(10-8) = 40 - 8 = 32$. Beiläufig sei bemerkt, daß das *Carmen de algorismo* zwar die Regel aber kein Zahlenbeispiel bietet (siehe Halliwell, *Rara mathematica*, second edition, London 1841, S. 77). — Auch im Kapitel „Progressio" finden sich Zahlenbeispiele, aber dies beruht natürlich darauf, daß Sacrobosco, wie Herr Cantor S. 89 richtig hervorhebt, nur spezielle arithmetische Reihen in Betracht zieht. G. Eneström.

---

**2:89, 90,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503. — **2:91—92,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 409—410.

---

2 : 92. Herr Cantor bemerkt, daß das in einer französischen Geometrie aus dem 13. Jahrhundert vorkommende Wort „orneure" leicht aus „inauratura", welcher Term Kugeloberfläche bedeutet, entstehen konnte. Daß „orneure" in der Tat gleichbedeutend mit „inauratura" ist, dürfte daraus hervorgehen, daß die Stelle, wo jenes Wort vorkommt, eine *wörtliche* Übersetzung eines bekannten Passus der *Geometria* Gerberti (siehe Gerberti *Opera mathematica*, ed. N. Bubnow, Berlin 1899, S. 360) ist, wie aus der folgenden Zusammenstellung ersichtlich wird.

| Geometria Gerberti. | Bullett. d. bibliogr. d. sc. matem. **15**, 1882, S. 58. |
| --- | --- |
| Circuli inauraturam sic quaeras. Diametrum circuli in se ductum vigesies bis multiplica. Effectae summae septimam accipias, et haec circuli erit inauratura; quod idem esset, si per diametrum circulum multiplicares. | Se tu ueus trouuer lorneure du cercle multeplie le dyametre par soi et cele somme multeplie par .22. et cele somme deuise par .7. la denominations fera lorneure du cercle. ... En autre maniere le pues prouer se tu multeplies la cironference par sen dyametre. |

Ob dagegen „circuli inauratura" wirklich *Kugeloberfläche* bedeutet, dürfte noch nicht endgültig festgestellt sein. Wenigstens ist M. Curtze (Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **7**, 1895, S. 141) durch das Studium verschiedener Handschriften der Münchener Staatsbibliothek zu der Ansicht gelangt, der Term „circuli inauratura" bezeichne nicht die Kugeloberfläche (die „spherae inauratura" heißen würde, und schon früher in der *Geometria Gerberti* [ed. Bubnow, S. 347] berechnet worden ist), sondern den Inhalt des Kreisringes zwischen dem Kreise vom einfachen und dem vom doppelten Radius, welcher Inhalt im Mittelalter fälschlich als das Vierfache des Grundkreises berechnet wurde. Auffälligerweise hat meines Wissens keiner der Verfasser, die sich nach 1895 mit dieser Frage beschäftigt haben (V. Mortet, *Un nouveau texte des traités d'arpentage et de géométrie d'Epaphroditus et de Vitruvius Rufus*, Paris 1896, S. 39; N. Bubnow, a. a. O. S. 360; M. Cantor, a. a. O.; V. Mortet, *Note historique sur l'emploi de procédés matériels et d'instruments usités dans la géométrie pratique au moyen âge*, Comptes rendus du II[me] congrès intern. de philosophie, Genève 1904, 1905, S. 17 des Sonderabzuges) die Curtze'sche Erklärung erwähnt, obgleich ihnen dieselbe ohne Zweifel bekannt war. G. Eneström.

**2 : 97,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 406. — **2 : 98—99,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 269—270; **6**$_3$, 1905, S. 106—107. — **2 : 100,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140. — **2 : 101,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 325.

2 : 101. Über Campanus als Herausgeber und Kommentator älterer mathematischer Werke sind die Angaben von A. A. Björnbo in den Abhandl. zur Gesch. der mathem. Wiss. **14**, 1902, S. 152—154 zu vergleichen. Nach Björnbo hat Campanus die Arbeiten des Menelaos und des Theodosios über Sphärik kommentiert, wahrscheinlich auch das *Planisphaerium* des Jordanus mit erläuternden Zusätzen versehen. — Eine kleine Schrift *De figura sectore* wird gewöhnlich dem Campanus beigelegt; diese Schrift, von der viele Handschriften bekannt sind, wurde im Jahre 1518 zweimal herausgegeben, und ein Abdruck findet sich in der Abhandlung von M. Steinschneider, *Intorno a Nasawi ed Abu Sahl el-Kuhi, matematici arabi comentatori del Liber assumptorum attribuito ad Archimede. Lettera III a D. B. Boncompagni* (Roma 1864), S. 36—37. G. Eneström.

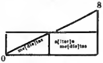
**2 : 104—105,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503; **4**$_3$, 1903, S. 397—398. — **2 : 111,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352. — **2 : 116,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 406. — **2 : 117—118,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 107, 311. — **2 : 122,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503—504.

**2**:122. Über die von Herrn I. TIMTCHENKO (BM $1_3$, 1900, S. 503—504) kurz beschriebene Ausgabe von SUISSETS *Calculationes* (von Herrn CANTOR „Calculator" genannt) sei noch folgendes bemerkt.

Die Ausgabe ist undatiert; daß sie aber spätestens im Jahre 1484 gedruckt wurde, ist von Herrn TIMTCHENKO festgestellt worden. In der Tat ist das Buch nach PROCTOR (*Index to the early printed books in the British Museum*, 6805) in Padua von einem Drucker N. T. S. P., dessen vollständiger Name unbekannt ist, gedruckt worden; und da aus dieser Offizin nur drei Drucke, diesen eingerechnet, bekannt sind, zwei davon aber aus dem Jahre 1477 herrühren, ist wohl als wahrscheinlich anzunehmen, daß auch dies dritte Werk um dieselbe Zeit hergestellt wurde, um so mehr als die Typen bei allen drei Werken identisch sind.

Diese Ausgabe ist auch von älteren Biographen beschrieben worden (s. HAIN, *Repertorium*, 15136 [HAIN hat das unbedruckte erste Blatt übersehen und infolgedessen die Zahl der Blätter unrichtig als 85 statt 86 angegeben] und FR. DE LICTERIIS, *Codicum saec. XV impressorum qui in regia bibliotheca Borbonica adservantur catalogus* T. 3, Neapoli 1833, pag. 171).

Die von Herrn CANTOR wiedergegebenen Figuren finden sich nicht in der ersten Ausgabe. In dem von mir benutzten, Herrn G. MITTAG-LEFFLER gehörigen Exemplar dieses, wie es scheint, sehr seltenen Buches findet sich aber an derselben von Herrn CANTOR zitierten Stelle („de difformibus") im Rande die folgende, von einem frühen Benutzer herrührende Zeichnung:




Noch ein zweiter Wiegendruck dieses Werkes ist bekannt; im Jahre 1498 wurde es von Franciscus Girardengus in Pavia gedruckt (siehe PROCTOR 7078). Der emendator heißt hier JOHANNES TOLLENTINUS Veronensis (vgl. RICCARDI, *Biblioteca matematica italiana* 1:2, Sp. 532). COPINGER (*Supplement to HAINS Repertorium*, 15138) führt nach MAITTAIRE (*Annales typographici ... ad annum 1664*. Ed. nova, Amstelodami 1733) noch eine Ausgabe desselben Druckers vom Jahre 1497 an. Vermutlich ist diese Edition, sowie auch vielleicht die von HAIN (*Repertorium*, 15137) erwähnte, angeblich in Pavia 1488 gedruckte, von ihm selbst aber nicht eingesehene Edition, mit der Ausgabe von 1498 identisch.

Stockholm. C. GRÖNBLAD.

---

**2:126**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 210. — **2:127**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2:128**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2:132**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 515—516. — **2:143**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2:155**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 410—411. — **2:157, 158**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2:160—162**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 311—312. — **2:163**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 312. — **2:164**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 313. — **2:166**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2:175**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2:206**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 313. — **2:210**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352—353. — **2:218**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 284. — **2:219**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353.

---

**2**:222. Herr CANTOR erwähnt hier „ein 1490 bei LOTTER in Leipzig gedrucktes Buch, welches den Titel *Algorithmus linealis* führt, vielleicht das

gleiche Werk, welches . . . sich auf Appuleius beruft". — Daß diese Datierung der ersten Ausgabe des Lotterschen *Algorithmus* auf einer falschen Lesung des Druckvermerkes beruht, hat Wappler bemerkt (Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **5**, 1890, S. 154; vergl. Hain, *Repertorium*, 830 und jetzt auch Proctor, *Index to the early printed books in the British Museum*, 3095). Eine jüngere von Lotter gedruckte Ausgabe dieses Buches wurde nicht früher als 1500 hergestellt (Hain 829; Brunet, *Manuel*, Ed. 5, T. 1, 180).

Nach J. Franck (*Allgemeine deutsche Biographie*, Art. Lotter) ist Melchior Lotter d. Ä. erst seit dem Jahre 1491 als Drucker in Leipzig nachweisbar; nach der älteren Angabe von Falkenstein, *Geschichte der Buchdruckerkunst*, zitiert von Wappler, l. c. S. 154, Anm. 1, sogar erst seit dem Jahr 1497. Die von Hain angeführten, angeblich älteren Drucke dieser Offizin, welche man bei Burger, *The printers and publishers of the XV. century* (London 1902), S. 483, zusammengestellt findet, sind mit einer Ausnahme (No. 9036, gedruckt im J. 1496), von Hain selbst nicht eingesehen worden. Jedenfalls muß man sich also damit begnügen, jenen Lotterschen Druck in die 90er Jahre des 15. Jahrhunderts zu verlegen.

In dieselbe Zeit ist ein anderer, von dem in Leipzig seit 1492 tätigen Martin Landsberg (Herbipolensis) gedruckter *Algorithmus linealis* anzusetzen (14 Blätter 4°; auch undatiert; Hain 828, Proctor 2960; noch eine undatierte um jene Zeit von Martin Landsberg mit denselben Typen gedruckte Ausgabe wird von Proctor [2961] erwähnt). Über diesen *Algorithmus* handelt Wappler, l. c. S. 152 und in seinem Programm: *Zur Geschichte der deutschen Algebra im 15. Jahrhundert* (Zwickau 1887) S. 9, wo er wahrscheinlich macht, daß Johannes Widmann der Verfasser dieses anonymen Buches sei.

Die Berufung auf Appuleius findet sich sowohl in dem Landsbergschen wie in dem Lotterschen *Algorithmus* (s. Wappler, l. c. S. 152, 153). Derjenige *Algorithmus linealis*, aus dem Herr Cantor **1**: 524 nach Friedlein, *Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des christlichen Abendlandes* (Erlangen 1869) die Anfangsworte zitiert, ist der Landsbergsche.

Stockholm. C. Grönblad.

---

**2**: **229**, **242**, **243**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 504—505.

---

**2**: 243. Aus den Worten: „Das Zeichen der Unbekannten . . . mag sich als *d* . . . deuten lassen" scheint es, als ob Herr Cantor das Zeichen für *x* in der lateinischen Dresdener Algebra als eine Verstümmelung des Anfangslautes des Wortes „Ding" betrachtet. Aber, so viel ich weiß, wird das betreffende Zeichen sonst immer als ein *r*, d. h. als der Anfangslaut von „res" oder „radix" betrachtet. G. Eneström.

---

**2**: **253**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 353. — **2**: **273**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 505. — **2**: **274**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 325. — **2**: **281**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 411. — **2**: **282**, **283**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 506; **2**$_3$, 1901, S. 353—354. — **2**: **284**, **286**, **287**, **289**, **290**, **291**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 506—507. — **2**: **296**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 354. — **2**: **313**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2**: **317**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 69.

---

**2 : 322.** Herr Cantor gibt an, daß Luca Paciuolo gelegentlich Gleichungen mit zwei Unbekannten behandelt und die zweite „quantita" nennt. Es wäre vielleicht nicht ohne Interesse hinzuzufügen, daß Paciuolo auch den Namen „quantita sorda" erwähnt und als *Zeichen* dieser Größe 1 $q^a$ benutzt. Die Art, die zweite Unbekannte durch 1 $q$ zu bezeichnen, wird noch von Clavius in seiner *Algebra* (1609), S. 72 erwähnt, und ich halte es für sehr möglich, daß das $\varphi$, das in den Ausgaben der Descartesschen Abhandlung *De solidorum elementis* vorkommt (siehe Biblioth. Mathem. 1890, S. 44), eine Verstümmelung von $q$ ist.

G. Eneström.

---

**2 : 325,** siehe BM $6_3$, 1905, S. 313—314. — **2 : 328,** siehe BM $3_3$, 1902, S. 140; $4_3$, 1903, S. 285. — **2 : 334,** siehe BM $1_3$, 1900, S. 507.

---

**2 : 351.** Es wäre nicht ohne Interesse hier zu erwähnen, daß Chuquet am Ende des 1. Teiles des *Triparty* (zwischen „la rigle de deux positions" et „la rigle des nombres moyens") auch unbestimmte Gleichungen 1. Grades löst. Die drei Beispiele, die er behandelt, sind:

1) $x + y + z = 12,\ 2x + y + \frac{1}{2}z = 12,$ Lösung: $x = 2,\ y = 6,\ z = 4;$
2) $x + y + z = 12,\ 8x + 5y + 3z = 60,$ „ $x = 4,\ y = 2,\ z = 6;$
3) $x + y + z = 12,\ 4x + 3y + 2z = 36,$ „ $x = 5,\ y = 2,\ z = 5.$

Chuquet wendet wesentlich dieselbe Methode wie Leonardo Pisano an (vgl. Biblioth. Mathem. $3_3$, 1902, S. 360); um also das Beispiel 3) zu lösen, eliminiert er $z$, bekommt dadurch die Gleichung $2x + y = 12$ und zerlegt 12 in zwei Teile, so daß der eine durch 2 und der andere durch 1 teilbar ist. Chuquet weiß auch, daß Probleme der fraglichen Art viele Lösungen haben; er nennt die Methode „De apposicion et remocion", und hebt ausdrücklich hervor, daß sie „science de petite recommandacion" ist, weil sie auf sukzesivem Probieren beruht.

Auch im 3. Teile des *Triparty* (S. 176—177 des Sonderabzuges) behandelt Chuquet im Vorübergehen eine unbestimmte Aufgabe ($x + y = 3z,\ x + z = 5y$), aber hier sucht er nicht ganzzahlige Werte zu finden, und setzt darum sofort für eine der Unbekannten eine Zahl ein, so daß die Aufgabe nicht mehr unbestimmt ist.

Bemerkt sei, daß die von Chuquet angeführten Beispiele sich auf abstrakte Zahlen (also nicht Vögel wie bei Leonardo oder eine Gesellschaft von Männern, Frauen und Jungfrauen wie bei den deutschen Cossisten) beziehen, und daß der Name „regula cecis" Chuquet unbekannt zu sein scheint. Woher Chuquet die Benennung „apposicion und remocion" entnommen hat, ist mir unbekannt.

G. Eneström.

---

**2 : 353,** siehe BM $1_3$, 1900, S. 507; $4_3$, 1903, S. 87.

---

**2 : 355.** Herr Cantor betrachtet die Chuquet'sche Exponentenbezeichnung als einen „ungeheueren Fortschritt", und aus den Worten: „dadurch steigt unsere Bewunderung der bei Chuquet allein sich zeigenden negativen Exponenten" scheint hervorzugehen, daß Herr Cantor die Einführung von negativen Exponenten ganz besonders als einen ungeheueren Fortschritt betrachtet. Meines Erachtens repräsentiert die Chuquetsche Bezeichnungsweise gewiß einen Fort-

schritt, aber ich erlaube mir darauf aufmerksam zu machen, daß lange Zeit vor Chuquet eine ähnliche Bezeichnung auf einem verwandten Gebiete gebräuchlich war, ich meine das in gewissen astronomischen Tafeln angewendete Sexagesimalsystem, dessen Grundeinheit der Tag war, und worin sowohl höhere als niedrigere Einheiten in beliebiger Anzahl vorkommen. Ja sogar das Chuquetsche $1^{1\tilde{m}}$ (d. h. $x^{-1}$) findet sich in diesem System fast genau wieder, denn $60^{-1}$ wurde durch $1^{\ddot{m}}$ bezeichnet (vgl. A. Wegener, *Die astronomischen Werke Alfons X*; Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, S. 179). G. Eneström.

---

**2** : 357. Meiner Ansicht nach ist es wahrscheinlicher, daß das Sexagesimalsystem gewisser astronomischer Tafeln (siehe die vorangehende Bemerkung) der Keim war, aus welchem Chuquets positive und negative Exponenten entstanden sind. G. Eneström.

---

**2** : 358, 360, siehe BM $4_3$, 1903, S. 87. — **2** : 371, siehe BM $6_3$, 1905, S. 314.

---

**2** : 379. In betreff der Werke des Charles de Bouvelles zitiert Herr Cantor einen Aufsatz von Fontès, und in der Tat hat er hier unter Bezugnahme auf diesen Aufsatz eine Angabe der ersten Auflage der *Vorlesungen* berichtigt, aber auch andere bei Fontès vorkommende Notizen verdienen vielleicht beachtet zu werden. Vom bibliographischen Gesichtspunkte aus ist es von Interesse zu erwähnen, daß die *Geometrici introductorii libri sex* nicht als selbständige Schrift erschienen, sondern Bestandteil eines Sammelwerkes sind, das mit Boethii *Arithmetica* beginnt; dies Sammelwerk ist von Riccardi in der Biblioth. Mathem. 1894, S. 73—75 ausführlich beschrieben, und Riccardi zitiert eine neue Titelausgabe von 1510. Von dem *Livre singulier et utile touchant l'art et pratique de géométrie* erwähnt Fontès neue Auflagen von 1547, 1551, 1555, 1556, 1557, 1566 (2 Ausgaben); dagegen hatte Fontès die von Chasles zitierte Auflage von 1608 nicht auffinden können, und in betreff derselben wies er darauf hin, daß es eine Ausgabe des *Livre singulier* gibt, die auf dem Titelblatt als Druckjahr MDCVIX (!) trägt. Übrigens dürfte es noch nicht festgestellt sein, ob die französische Schrift von 1542 wirklich als eine Übersetzung der *Geometrici introductorii libri sex* angesehen werden soll. Daß Bouvelles selbst jene eher als eine Bearbeitung der lateinischen Arbeit betrachtete, scheint aus dem von ihm gewählten Titel hervorzugehen. G. Eneström.

---

**2** : 380. Hier zitiert Herr Cantor ganz beiläufig eine „lateinische Ausgabe von 1557" des *Livre singulier*, da aber S. 379 keine neuen Auflagen der lateinischen Arbeit vom Jahre 1503 erwähnt werden, weiß man eigentlich nicht, wie man diese Angabe verstehen soll. In Wirklichkeit muß, wie auch Fontès andeutet, diese angebliche „lateinische Ausgabe" als eine besondere Schrift angesehen werden. Der Titel lautet: *Caroli Bovilli samarobrini Geometricvm opvs dvobvs libris comprehensvm.* Lutetiae, Apud Federicum Morellum, in uico Bellouaco, ad insigne Mori. M.D.LVII. Cvm privilegio regis" (8°, 102 Bl.). Freilich war Bouvelles 1557 gestorben, aber sein Vorwort ist vom Februar 1552 und das „Privilegium" vom Februar 1553 datiert. Im

Vorworte erwähnt er gar nicht seine früheren geometrischen Arbeiten, und es ist nicht leicht zu verstehen, warum ein zweiundachtzigjähriger Greis (BOUVELLES war 1470 geboren) sich entschließt, eine neue Schrift herauszugeben. Das *Geometricum opus* enthält, wie der Titel angibt, zwei Bücher, das erste über ebene, das zweite über körperliche Figuren, und am Ende (Bl. 92$^b$—101$^a$) findet sich eine „additio novarum et recentium inventionum, quas antiqui nesciere", wo u. a. die Kreisquadratur gelehrt wird. Die Konstruktionen, die dabei angegeben werden, entsprechen den Gleichungen

$$\frac{\pi d}{4} = \sqrt{\left(\frac{d}{4}\right)^2 + \left(\frac{3d}{4}\right)^2}, \quad \pi d = \sqrt{d^2 + 9d^2}, \quad \frac{\pi d}{3} = \sqrt{\left(\frac{d}{3}\right)^2 + d^2},$$

$\frac{2\pi r}{4} = \sqrt{2r^2 + \frac{r^2}{2}}$, so daß in jedem Falle $\pi$ gleich $\sqrt{10}$ gesetzt wird. Hier beruft sich BOUVELLES (Bl. 93$^a$) auf „vulgaris Geometria nostra prelo expressa", woraus hervorgeht, daß er das *Geometricum opus* als eine besondere Arbeit betrachtet. G. ENESTRÖM.

**2 : 381**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2 : 385**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 81; **4**$_3$, 1903, S. 207. — **2 : 386**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507; **5**$_3$, 1904, S. 306. — **2 : 395**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507—508. — **2 : 399**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 107—108. — **2 : 401, 405, 425**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2 : 427**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 314—315. — **2 : 429**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 201—202. — **2 : 430**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 145. — **2 : 440**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 285. — **2 : 442**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 325. — **2 : 449**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140. — **2 : 454**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 242. — **2 : 474, 480**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140—141. — **2 : 481**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 508. — **2 : 482**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 508; **2**$_3$, 1901, S. 354; **3**$_3$, 1902, S. 240.

**2** : 482. Der von CARDANO erwähnte GABRIEL DE ARATORIBUS ist wahrscheinlich der „signor CABRIO DA CARAUAZZO ARATORE" in Milano, an den L. FERRARI im Februar 1547 ein Exemplar seines ersten „Cartello" gegen TARTAGLIA sandte (siehe S. 6 der Reproduktion dieser Flugschrift in der Ausgabe von E. GIORDANI, Milano 1876). Ich habe in der Biblioth. Mathem. **1**$_3$, 1900, S. 516 eine Anfrage über GABRIEL DE ARATORIBUS veröffentlicht, aber bisher keine Antwort bekommen. Vielleicht wird es leichter sein, Aufschlüsse über CARAUAZZO aufzufinden. G. ENESTRÖM.

**2 : 484**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 486, 489, 490**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2 : 497**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509; **4**$_3$, 1903, S. 87. — **2 : 509**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270, 509. — **2 : 510**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2 : 512**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 514, 516, 517**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2 : 530**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 354—355; **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 532, 535, 541, 548, 549**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509—510.

**2** : 549. PENAS griechisch-lateinische Ausgabe der Sphärik des THEODOSIUS erschien (wenigstens vollständig) 1558 (nicht 1557). Das im Anfang des Buches abgedruckte königl. Privilegium ist zwar „3. Id. Jun. 1557" datiert, das den beiden getrennt paginierten Teilen gemeinsame Titelblatt aber trägt die Jahreszahl 1558, und die besondere Vorrede zum lateinischen Teil ist „3. Non. Mart. 1558" datiert.

Stockholm. C. GRÖNBLAD.

**2 : 550,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 355. — **2 : 554,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510. — **2 : 555, 565, 567, 568,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 285—286. — **2 : 569,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S 510. — **2 : 572—573,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 576,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 355—356. — **2 : 579,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 145. — **2 : 580—581,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 207. — **2 : 582,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510. — **2 : 583,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 356. — **2 : 585,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 69—70. — **2 : 592,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2 : 594,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270. — **2 : 597,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2 : 599—600,** siehe BM $\mathbf{2}_3$. 1901, S. 146. — **2 : 602,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270. — **2 : 603—604,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270—271; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 108. — **2 : 611,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 356—357. — **2 : 612,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2 : 613,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 306. — **2 : 614,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 617, 619,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 108—109. — **2 : 620,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141.

---

2 : 621. Möglicherweise könnte man hier einige Zeilen über J. Peletier, der von Herrn Cantor nur als Geometer erwähnt wird, einschalten. Im 2. Bande der *Vorlesungen* werden an verschiedenen Stellen (S. 353, 482, 524, 541) historische Notizen über Rationalmachen von Brüchen mit zweigliedrigem Nenner mitgeteilt, und aus diesem Grunde könnte es angebracht sein zu bemerken, daß Peletier in seiner Arbeit *De occulta parte numerorum quam algebram vocant libri duo* (Paris 1560) ein Kapitel (Blatt $48^b$—$49^b$) „De trinomiis quaedam obiter" eingefügt hat, wo er, wie es scheint, ohne den 3. Traktat der 8. Distinktion der *Summa* des Paciuolo zu kennen, Rationalmachen von Brüchen mit dreigliedrigem Nenner lehrt (vgl. Klügel, *Mathematisches Wörterbuch* I [1803], S. 43). Sein Verfahren wendet er auf das Beispiel $\frac{100}{3+\sqrt{9}+\sqrt{16}}$ an, indem er bemerkt, daß das Resultat natürlich gleich 10 sein muß. Zuerst erweitert er den Bruch mit $3+\sqrt{9}-\sqrt{16}$ und bekommt also $\frac{100\,(3+\sqrt{9}-\sqrt{16})}{(3+\sqrt{9})^2-16} = \frac{100\,(3+\sqrt{9}-\sqrt{16})}{\sqrt{324}+2}$; dann erweitert er mit $\sqrt{324}-2$ und bekommt dadurch einen Bruch mit dem rationalen Nenner 320, worauf er nachweist, daß dieser Bruch wirklich gleich 10 ist. Das Verfahren gilt freilich nicht für Nenner, wo Wurzeln vorkommen, deren Index nicht von der Form $2^n$ ist, aber jedenfalls zeugt es von einer gewissen Übung, algebraische Ausdrücke zu behandeln, und darum verdient es vielleicht erwähnt zu werden. G. Eneström.

---

**2 : 621, 623,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146—147. — **2 : 632,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 109. — **2 : 634, 637,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 315—316. — **2 : 638,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 147. — **2 : 642, 643,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271.

---

2 : 644. Der Ansicht des Herrn Cantor, daß J. Bürgi mit vollem Bewußtsein die zitierte Gleichung auf Null gebracht hat, kann ich nicht beistimmen; im Gegenteil scheint es mir aus der betreffenden Stelle in Keplers *Opera* deutlich hervorzugehen, daß Bürgi nur auf Grund der Art des zu lösenden Problems dazu kam, eine Gleichung aufzustellen, deren rechtes Glied *tatsächlich* gleich Null war. Bürgi wollte ermitteln, wie groß die Sehne von $\frac{1}{7}$ eines Kreisbogens mit gegebener Sehne war, und leitete dabei eine gewisse Gleichung her, deren rechtes Glied die gegebene Sehne repräsentierte. Dann nahm er in Betracht den besonders interessanten Fall, daß der Kreisbogen gleich der ganzen Peripherie

ist, und da die gegebene Sehne in diesem Falle = 0 ist, erhielt er natürlich eine Gleichung von der Form $f(x) = 0$. Daß er diese als Normalform oder wenigstens als eine vorteilhafte Form betrachtete, geht aus dem KEPLERschen Berichte gar nicht hervor; vielmehr gibt KEPLER etwas weiter unten (S. 105) die BÜRGIsche Gleichung für die Fünfteilung der Peripherie unter der Form

$$5^{\mathrm{I}} - 5^{\mathrm{III}} + 1^{\mathrm{V}} \text{ aequalem subtensae nulli,}$$

wo also ausdrücklich hervorgehoben wird, daß das rechte Glied nicht die abstrakte Null, sondern die zur Null gewordene Sehne des Kreisbogens repräsentiert. Meines Erachtens muß man also sagen, daß BÜRGI zufälligerweise auf Gleichungen geführt wurde, deren rechtes Glied tatsächlich = 0 war. G. ENESTRÖM.

---

**2 : 655**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357. — **2 : 656**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 286. — **2 : 659, 660**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 147—148.

---

2 : 661. Der erste Vorname des BORELLI war GIOVANNI (nicht GIACOMO).

---

**2 : 665**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271. — **2 : 669**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 203.

---

2 . 670. Da Herr CANTOR in seinen *Vorlesungen* nur ausnahmsweise den Titel irgend einer der zahlreichen von J. FAULHABER verfaßten Schriften angegeben hat, ist eine Ergänzung der bibliographischen Angaben über diesen Rechenmeister nicht angebracht. Nur eine Schrift möchte ich hier nennen, freilich nicht wegen des dürftigen mathematischen Inhalts, sondern weil sie einige Aufschlüsse über deutsche Rechenmeister enthält. Der Titel dieser Schrift besteht aus mehr als 100 Wörtern und beginnt: *Newer Arithmetischer Wegweyser zu der Hochnutzlichen freyen Rechenkunst.* Die erste Auflage (ich besitze selbst ein Exemplar derselben) wurde 1614 zu Ulm „durch Johann Meder“ gedruckt (77 Seiten 8°), und neue Auflagen erschienen nach L. F. OFTERDINGER (*Beiträge zur Geschichte der Mathematik in Ulm bis zur Mitte des XVII. Jahrhunderts*, Ulm 1867, S. 9) 1615, 1675, 1691, 1708, 1736, 1762. Am Anfange der Schrift findet sich ein Verzeichnis der „Authores, welche nach einander hierinnen angezogen werden, so zum thail noch bey Leben“, und die meisten dieser Autoren werden „Rechenmaister“ genannt. Ich führe hier die Rechenmeister auf, die weder in den *Vorlesungen* noch in F. UNGERS Arbeit *Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung* (Leipzig 1888) erwähnt werden: RUDOLPH KATTEN (Osnabrück), JOHANN PODTLER (Passau), PASSCHIER GOESSENS (Hamburg), ESAIAS WEBER (St. Gallen), GEORG HÖFLIN (Straßburg), WILHELM SCHEY (Solothurn), HENRICUS ROSELEN (Cölln), JOHANN JACOB ROTH (Basel), CHRISTOFF FABIUS BRECHTEL (Nürnberg), WOLFFGANG HOBEL (Nürnberg). G. ENESTRÖM.

---

**2 : 674**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88. — **2 : 683**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2 : 693**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 287. — **2 : 700, 701, 703, 704, 705**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271—273. — **2 : 715**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 412.

---

**2** : 716. Die Titelangabe des hier erwähnten Werkes von Léotaud rührt wahrscheinlich von Southwell (Sotwel), *Bibliotheca scriptorum societatis Jesu* (1676) her, soll aber nach Backer-Sommervogel, *Bibliothèque de la compagnie de Jésus* (s. v. Léotaud) unrichtig sein, wie auch das von Southwell und Montucla angegebene Druckjahr 1653. In der Tat trägt das mir vorliegende Exemplar den Haupttitel: *Examen circuli quadraturæ hactenus editarum celeberrimæ, quam . . . Gregorius a Sancto Vincentio, Societatis Jesu, exposuit. Authore Vincentio Leotaudo . . . Cuius opera e tenebris fimul emergit perelegans et peramœna Curvilineorum contemplatio olim inita ab . . . Artusio De Lionne* . . . Lugduni 1654. Der mit einer Gravure versehene Vortitel besagt: *Curvilineorum amoenior contemplatio. Necnon examen circuli quadraturæ a R. P. Greg. a S. Vincentio Soc. Jesu propositæ.*

Den ersten Teil („Pars prima") dieses Buches bildet die von Herrn Cantor 2 : 897 erwähnte Schrift des Bischofs de Lyonne, die, wie ersichtlich, in den Titeln an erster resp. zweiter Stelle vorkommt.

Stockholm. C. Grönblad.

---

**2** : 719, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357. — **2** : 720, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 287.

---

**2** : 720. Hier wird erwähnt, daß W. Oughtreds *Clavis mathematica* von 1631 im Jahre 1652 in neuem Abdrucke erschien. Nach der von Herrn Cantor zitierten Arbeit von W. W. R. Ball wurde indessen eine neue Auflage schon 1648 herausgegeben, so daß der Abdruck von 1652 die dritte Auflage ist; diese hat J. Wallis durchgesehen und verbessert. Eine vierte Auflage besitze ich selber; der Titel dieser Auflage lautet: *Guilelmi Oughtred Aetonensis, quondam Collegii Regalis in Cantabrigia Socii, Clavis mathematicae denvo limata, sive potius fabricata. Cum aliis quibusdam ejusdem Commentationibus, quae in sequenti pagina recensentur. Editio quarta auctior & emendatior.* Oxoniae, Lichfield 1667. Von den im Titel angedeuteten Anhängen haben drei besondere Titelblätter mit den Druckjahren 1662, 1663 und 1663. Eine fünfte Auflage von 1693 beschreibt Kästner ausführlich in seiner *Geschichte der Mathematik* III (1799), S. 40—41. Eine englische Übersetzung: *The key of the mathematicks* wurde 1647 in London veröffentlicht. Nach Oughtreds Vorwort zur 3. Auflage rührt diese Übersetzung wesentlich von Robert Wood her. Es verdient vielleicht noch hinzugefügt zu werden, daß der Titel der ersten Auflage nicht mit den Worten *Clavis mathematica*, sondern mit *Arithmeticae in numeris et speciebus institutio* beginnt, so daß man leicht verleitet werden kann, diese als eine andere Schrift als die *Clavis mathematica* anzusehen, wenn man ein unvollständiges Zitat des Titels findet. G. Eneström.

---

**2** : 721. Wie Herr Cantor bemerkt, dürfte es vergebliche Mühe sein ausfindig machen zu wollen, warum Oughtred gerade das Kreuz als Multiplikationszeichen wählte. Ougtred selbst gibt gar keinen Grund an, sondern sagt nur (S. 10 der 4. Ausgabe): „multiplicatio speciosa connectit utramque magnitudinem propositam cum notâ *in* vel ×." — In betreff der Bemerkung: „Der einfache Punkt zwischen den beiden in Verhältniß gestellten Größen mußte allerdings später einem Doppelpunkte weichen, nachdem im XVIII. Jahrhunderte durch Christian von Wolf der einfache Punkt das häufigste Multiplikationszeichen geworden

war", mag darauf hingewiesen werden, daß der Doppelpunkt schon von OUGHTRED selbst im Jahre 1657 benutzt worden ist (siehe W. W. BEMAN, L'intermédiaire d. mathém. **9**, 1902, S. 229). Unter den ersten Verfassern, die sich dieser Bezeichnungsweise bedienten, ist JAMES GREGORY zu nennen (siehe seine *Exercitationes geometricae*, London 1668, S. 3 Z. 7: „dico $a : 2\,Q :: C : E$").

G. ENESTRÖM.

---

**2 : 721**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2 : 742**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142. — **2 : 746**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2 : 747**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 173; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 225. — **2 : 749**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88. — **2 : 766**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 412—413 — **2 : 767**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148, 357—358. — **2 : 770**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 208. — **2 : 772, 775**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 358—359. — **2 : 777**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 204. — **2 : 783**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88—89. — **2 : 784**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148.

---

2 : 787. In betreff der Angabe, daß GIRARD die Klammern als Zeichen der Zusammengehörigkeit verschiedener Ausdrücke zum Zwecke der Ausführung einer neuen Operation einführte, bemerke ich, daß das Wort „einführte" meines Erachtens weniger passend ist. Klammern sind schon von CLAVIUS (*Algebra*, Genève 1609) beim Ausziehen von Wurzeln aus zusammengesetzten Ausdrücken benutzt worden. CLAVIUS sagt nämlich (a. a. O. S. 78): „ut significemus, illud [= signum radicale] ad totum numerum compositum referri, includemus numerum compositum inter duas parentheses, hoc modo, $\sqrt{}ʒ\,(22 + \sqrt{}ʒ\,9)$" [d. h. $\sqrt{(22 + \sqrt{9})}$]. Freilich ging GIRARD einen Schritt weiter, insofern als er Klammern nicht nur wie CLAVIUS, sondern auch als Multiplikationszeichen benutzte; auf der anderen Seite kommt diese Anwendung von Klammern, so viel ich sehen kann, in der ganzen *Invention nouvelle en algebre* nur an drei Stellen vor (Blatt $C_3^v$, $D_3^r$, $F_4^v$). Meines Wissens fand diese Anwendung keine Nachfolgung, und als LEIBNIZ und die Brüder BERNOULLI um die Wende des 17. Jahrhunderts die Klammern als Multiplikationszeichen benutzten, waren sie sicherlich nicht von GIRARD beeinflußt. G. ENESTRÖM.

---

2 : 791. Bei der Erwähnung der von HARRIOT benutzten Zeichen könnte hinzugefügt werden, daß in der *Artis analyticae praxis* der Multiplikationspunkt, so weit bekannt ist, zum erstenmal vorkommt (siehe z. B. S. 82: $aaa - 3.\,bba = + 2.\,ccc$). Indessen scheint diese Neuerung keine Beachtung gefunden zu haben, auch nicht von der Seite des J. WALLIS, der sonst ein großer Verehrer von HARRIOT war, und als LEIBNIZ am Ende des 17. Jahrhunderts den Multiplikationspunkt in Anwendung brachte (vgl. J. TROPFKE, *Geschichte der Elementar-Mathematik* **1**, Leipzig 1902, S. 136), hatte er vielleicht keine Ahnung davon, daß die Bezeichnungsweise schon früher von HARRIOT benutzt worden war. G. ENESTRÖM.

---

**2 : 793—794**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 316—317.

---

2 : 793—794. In betreff der von DESCARTES vor der Herausgabe seiner *Géométrie* benutzten algebraischen Zeichen sei noch folgendes bemerkt. In seinem Briefe an ISAAK BEECKMANN vom 26. März 1619 (siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 316) benutzt DESCARTES neben dem Zeichen ꝛe für $x$ noch ʒ für $x^2$ und

*n* für „numerus absolutus". Aber dieselben drei Zeichen wendet auch Clavius in seiner *Algebra* (1609) an (der Umstand, daß Clavius *N* und nicht *n* schreibt, hat natürlich keine Bedeutung), und da noch dazu einige Ausdrücke bei Descartes mit Redewendungen bei Clavius übereinstimmen, kann man nicht umhin anzunehmen, daß jener seine Zeichen aus der zitierten *Algebra* entnommen hatte. Nun sagt Clavius ausdrücklich (a. a. O. S. 7): „secundus character ꝛ habet appellationem Radicis, vel Rei", und es ist durchaus unmöglich, daß Descartes das Zeichen irrig als $x$ lesen konnte. Daß Descartes nicht zufälligerweise 1619 die cossischen Zeichen benutzte, geht daraus hervor, daß Isaak Beeckmann im Oktober 1628 in seinem Tagebuche diese Zeichen anwendete, als er einige mündliche Mitteilungen des Descartes unmittelbar notierte. Übrigens hat es sich jetzt herausgestellt, daß sich Descartes auch in Aufsätzen aus seiner Jugendzeit, die erst in unseren Tagen von Foucher de Careil herausgegeben worden sind, der cossischen Zeichen für $x$, $x^2$ und $x^3$ bediente. In der von Leibniz genommenen Abschrift des Traktates *De solidorum elementis* sind die Zeichen leicht erkenntlich, obgleich Foucher de Careil, der kein Mathematiker war, statt derselben die Ziffern 4, 3 und 4 setzte (siehe E. de Jonquières, Bibliotb. Mathem. 1890, S. 52). Wenn Tropfke (*Geschichte der Elementar-Mathematik* I, S. 150) sagt: „der Schritt, es [nämlich das Zeichen ꝛ] schließlich als $x$ zu lesen, konnte, da es niemals als Wort geschrieben wurde, nicht ausbleiben", so verstehe ich seine Argumentation nicht. Wie aus der oben zitierten Stelle der *Algebra* von Clavius hervorgeht, wurde das Zeichen ꝛ noch am Anfange des 17. Jahrhunderts „radix" oder „res" genannt, und man hatte gewiß gar keinen Anlass, es als $x$ zu lesen. Meines Wissens gibt es nur einen Beleg dafür, daß ꝛ einmal als $x$ gelesen worden ist, nämlich die Bemerkung von Curtze (Abhandl. zur Gesch. der mathem. Wiss. **13**, 1902, S. 473), daß in einem Manuskripte aus dem Jahre 1545 das Zeichen für „res" geradezu ein geschriebenes deutsches $x$ ist, aber wie Curtze selbst (a. a. O. S. 437) hervorhebt, ist dies Manuskript nicht die Originalhandschrift des betreffenden Traktates, und der Umstand, daß ein unkundiger Abschreiber ein ihm unbekanntes Zeichen falsch wiedergibt, beweist gar nicht, daß auch nur *ein* Mathematiker des 16. Jahrhunderts dies Zeichen so gelesen hat.

Ich glaube also die folgenden zwei Sätze aufstellen zu können:

1. Descartes hat das ꝛ früherer deutscher Werke nicht erst bei Faulhaber in Ulm kennen gelernt;
2. Er hat dies Zeichen nie irrig als $x$ gelesen, und hat noch dazu aus der *Algebra* von Clavius gelernt, daß es „radix" oder „res" bedeutet.

G. Eneström.

---

**2**:**795**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 317. — **2**:**797—798**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 307; **6**$_3$, 1905, S. 317. — **2**:**799**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 307. — **2**:**802**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 208. — **2**:**812**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 37. — **2**:**820**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148; **5**$_3$, 1904, S. 307. — **2**:**825**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148. — **2**:**832**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 203—204; **6**$_3$, 1905, S. 211. — **2**:**840**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148—149. — **2**:**843**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 328. — **2**:**850**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 109—110. — **2**:**856, 865**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149. — **2**:**876, 878, 879**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511. — **2**:**891**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273.

---

**2**:897. Über die Schrift des Bischofs de Lyonne: *Curvilineorum contemplatio* siehe oben die Bemerkung zu **2**:716.

---

**2:898,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 37, 208. — **2:901,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511. — **2:919,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 204. — **2:VIII** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142. — **2:IX, X** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511—512.

---

**3:9,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359. — **3:10,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 518; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 211. — **3:11,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3:12, 17,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512. — **3:22,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3:24,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3:25,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209, 399. — **3:26,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359.

---

3:39. Es ist nicht unwahrscheinlich, daß der Oberst Titel, der als E. Weigels Gönner genannt wird, mit Basilius Titel identisch ist. In einem Briefe an Leibniz vom 20. November 1682 (abgedruckt in der Abhandlung von C. Reinhardt, *Beiträge zur Lebensgeschichte von Ehrenfried Walther von Tschirnhaus*, Meissen 1903, S. 28) schreibt nämlich Tschirnhaus: „In Leipzig habe angenehme conversation gehabt mit . . . Hrn. Obristen Tittel der versichert gar fein in analyticis erfahren . . . . ein Man von starcker force der gesundheit, obschon das er bey 70 jahre fast". Daß dieser mit Basilius Titel identisch ist, kann wohl kaum bezweifelt werden, da nicht anzunehmen ist, daß es 1682 in Leipzig zwei Offiziere Titel gab, die Mathematiker waren. Auf der anderen Seite war dieser Titel viel älter wie Weigel, und konnte also sehr wohl dessen Gönner gewesen sein. Dagegen geht Reinhardt meines Erachtens zu weit, wenn er (a. a. O., S. 28 Anm. 2) ohne weiteres als abgemacht betrachtet, daß Tschirnhaus' Freund mit Basilius Titel identisch ist. G. Eneström.

---

**3:45—48, 49, 50,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512—513. — **3:70,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 360. — **3:82,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 308. — **3:100,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149. — **3:102,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 318. — **3:112,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209—210; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 318. — **3:116,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3:117,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 518. — **3:123,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 399. — **3:124,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 407—408; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 400. — **3:126,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 288 — **3:131,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 210. — **3:151,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326. — **3:167, 172—173,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 400. — **3:174,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149—150 — **3:183,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 432. — **3:188,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 241. — **3:201,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3:207,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 519. — **3:215,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150. — **3:218,** siehe BM $\mathbf{1}_3$. 1900, S. 513. — **3:220,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326. — **3:224,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3:225, 228,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150. — **3:230,** siehe BM $\mathbf{6}_3$. 1905, S. 211—212. — **3:232,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 212. — **3:244—245,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 205, 413. — **3:246,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151. — **3:250,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3:303,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 155. — **3:330—331,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 241—242. — **3:337,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 206. — **3:370—371,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 308. — **3:382,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 213. — **3:384,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 319. — **3:408,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 213. — **3:447, 455,** siehe BM $\mathbf{2}_3$. 1901, S. 151. — **3:473,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 154—155; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 401 — **3:477, 479,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S 151—152. — **3:497, 498,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309. — **3:507,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 71—72. — **3:521,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3:535,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 401. — **3:536,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 206. — **3:560,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 319—321. — **3:565,** siehe BM $\mathbf{3}_3$. 1902, S. 326—327. — **3:571,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 72. — **3:578,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309. — **3:586, 609,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309—310. — **3:614,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 89—90. — **3:616,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 214.

---

**3** : 616. Die in einer früheren Bemerkung (BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 214) vorkommenden Angaben sind auf folgende Weise zu ergänzen. In *A discourse of combinations, alternations and aliquot parts*, der als Anhang der *Treatise of algebra* (1685) des Wallis gedruckt ist, wird S. 122 der Satz von der Anzahl der Divisoren einer Zahl und S. 123 der Satz von der Divisorensumme angegeben. Der erste Satz lautet:

> If a number be made, by continual multiplication of how many soever prime numbers (different each from other) or of any powers of such primes: the number of divisors of such compound number is compounded (by continual multiplication) of the exponents of the degrees of such primes or their powers so compounded, increased (each of them) by 1.

Wesentlich dieselbe Regel hat schon F. van Schooten im 5. Buche (1657) seiner *Exercitationes mathematicae*; in der holländischen Ausgabe von 1660 steht die Regel auf Seite 352. — Den zweiten Satz drückt Wallis weitschweifiger aus, aber sein Inhalt ist, daß die Summe der Divisoren der Zahl $a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \ldots$ gleich $(1 + a + \ldots + a^{\alpha})(1 + b + \ldots + b^{\beta})(1 + c + \ldots + c^{\gamma}) \ldots$ ist.

G. Eneström.

**3 : 636—637,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3 : 646—647,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 206—207. — **3 : 652,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 207. — **3 : 660,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3 : 667,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441—442; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 207—208, 310.

**3** : 682. Der Angabe, daß A. G. Kästner 1745 in einem Programme den Binomialsatz behandelte, kann hinzugefügt werden, das Kästner 13 Jahre später in einer anderen Schrift (*Theorema binomiale universaliter demonstrat praelectionesque suas indicat A. G. Kaestner*, Göttingen 1758, 4°, 14 S.) auf denselben Gegenstand zurückkam. Hier zog er auch in Betracht den Fall, in dem der Exponent nicht ganzzahlig und positiv ist. Für diesen Fall benutzte er die gewöhnliche Herleitung der Koeffizienten der Binomialreihe durch Differentiation, und nannte als seine Vorgänger J. Colson und L. Euler, aber nicht C. Maclaurin.

G. Eneström.

**3 : 686,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 208. — **3 : 689, 695,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 442. — **3 : 736,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 111. — **3 : 750, 758,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446. — **3 : 759,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 208. — **3 : 760, 766,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446—447. — **3 : 774, 798,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 442—443. — **3 : 819,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 321. — **3 : 845,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327—328. — **3 : 848, 881,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901. S. 443. — **3 : 882,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 414. — **3 : 890,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 401. — **3 : 892,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 143. — **3 : IV** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443.

## Vermischte historische Notizen.

**Zur Geschichte der natürlichen Geometrie.** In dem verdienstvollen Bericht von Wölffing *Über den gegenwärtigen Stand der Lehre von den natürlichen Koordinaten* (Biblioth. Mathem. $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 142—159) vermisse ich die Arbeiten zweier ungarischer Mathematiker, die, wenn sie auch keinen weiteren Einfluß auf die Entwickelung dieser Disziplin hatten, doch in einer so ausführlichen Studie erwähnt zu werden verdient hätten. Es sind dies die Preis-

schriften des KÁROLY TAUBNER und VILMOS FEST mit dem Titel: *Az elsö és másodrendü görbék' összrendeskre átvitele 's föbb tulajdonságaik* [Die Transformation der Kurven erster und zweiter Ordnung in (kertesische) Koordinaten und ihre wichtigeren Eigenschaften], Budán 1844, als erster Band von den mathematischen Preisschriften, welche von der ungarischen Akademie der Wissenschaften herausgegeben wurden. Da diese Werke ziemlich schwer zugänglich sind, gebe ich hier ihren Inhalt kurz an. TAUBNER betrachtet zuerst sämtliche Formen, in welche die allgemeine Gleichung zweiten Grades in $(s, \varphi)$ durch Verschiebnng des Anfangspunktes und durch Drehung der Anfengsrichtung, also mittels der Transformation $s_1 = s + s_0 \quad \varphi_1 = \varphi + \varphi_0$ (wo $s_0$, $\varphi_0$ beliebige reelle Konstante sind) überführt werden können. Er findet 17 Kurventypen, deren Diskussion bezüglich Gestalt, singulärer Punkte und Krümmungsverhältnisse einem kleinen Exkurse folgt, welcher die gegenseitigen Transformationsformeln der kartesischen und natürlichen Koordineten enthält. — In der FESTschen Arbeit finden wir manche Anklänge an neuere Gedenken. So sieht er in der Darstellung der Kurve in $(s, \varphi)$-Koordinaten deren Entstehung durch Schiebung und Drebung (LIE), ferner interpretiert er die Gleichungen ersten und zweiten Grades anelog in kertesischen und natürlichen Koordineten. Er findet vier Haupttypen der Kurven zweiten Grades und zwar

$$\varphi = as^2 \qquad s = a\varphi^2 \qquad s^2 + \varphi^2 - \varphi = 0 \qquad s\varphi = a.$$

Schließlich bestimmt auch er die Transformationsformeln für die zwei Systeme.

Budapest. ERNST SÓS.

## Anfragen und Antworten.

**125. Über die Entdeckung des Zusammenhanges zwischen den Wurzeln einer Gleichung und der Gleichungskonstante.** Den Satz, daß das Produkt der Wurzeln einer Gleichung = der Gleichungskonstante ist, hat VIÈTE gewiß gekannt, wenn auch die Schrift, in der er den Zusammenhang zwischen den Wurzeln einer Gleichung und deren Koeffizienten behandelte, verloren gegangen ist (vgl. VIÈTE, *Opera omnia*, ed. F. VAN SCHOOTEN, S. 158). Aus einer Bemerkung von KLÜGEL (*Mathematisches Wörterbuch* **1**, Leipzig 1803, S. 42—43) könnte man folgern, daß der Satz schon älteren Ursprungs wäre; KLÜGEL gibt nämlich an, der französische Arzt und Mathematiker J. PELETIER habe bemerkt, „daß die rationalen Wurzeln einer Gleichung unter den Factoren des gegebenen Gliedes anzutreffen sind", was ja darauf hindeutet, daß PELETIER entweder den Satz kannte, oder wenigstens einen wesentlichen Schritt zu dessen Entdeckung gemacht hatte.

Dies ist aber nicht der Fall. Freilich findet sich in der von KLÜGEL zitierten Schrift *De occulta parte numerorum quam algebram vocant* (die übrigens 1560 und nicht 1558 wie KLÜGEL angibt, erschien) eine Stelle (Blatt $12^b$), wo PELETIER erwähnt, daß die Wurzel der Gleichung $x^2 = 10x + 24$ ein Faktor des letzten Gliedes sein muß, und durch Probieren erhält PELETIER den Wert 12, aber aus dem, was er sonst sagt, ersieht man, daß er keine Ahnung von dem Zusammenhange zwischen den Wurzeln und der Gleichungskonstante hatte. Um dies zu zeigen, zitiere ich einige Zeilen des Blattes $13^a$, und führe dabei die modernen Symbole neben die PELETIERschen ein:

Sit 1 ℭ aequalis 3 q *p.* 50 [$x^3 = 3x^2 + 50$]. Scio in 50 latère summam aliquam quadratorum exactè: omnis enim cubus quadratis constat. Quum igitur in 50 nullus numerus exactè contineatur quadratus praeter 25: statim colligo 5 esse radicem numeri propositi, 3 q *p.* 50 [$3x^2 + 50$].

Aber der Umstand, daß die Gleichungskonstante einen quadratischen Faktor enthält, hat ja für das Auffinden der rationalen Wurzeln keine Bedeutung, sofern nicht zwei Wurzeln numerisch gleich sind, was hier nicht der Fall ist, da die Wurzeln 5, $-1 + 3i$, $-1 - 3i$ sind. Offenbar gilt die Peletiersche Regel nur für Gleichungen von der Form $x^3 = (a - b)x^2 + a^2b$ ($a$ und $b$ rationale Zahlen) und übrigens hätte Peletier auch den quadratischen Faktor 1 in Betracht ziehen sollen.

Gibt es irgend einen Mathematiker vor Viète, der den Zusammenhang zwischen den Wurzeln einer Gleichung und der Gleichungskonstante erkannt hat?

G. Eneström.

---

**Bemerkung zur Anfrage 124 über zwei ältere Benennungen der fünften Potenz einer Größe.** Meine Angabe, daß die Form „surdesolidum" zuerst in der Schootenschen Übersetzung von Descartes' *Géométrie* vorkommt, muß modifiziert werden. In der Tat wird diese Form schon von Stifel (*Arithmetica integra*, Nürnberg 1544, Bl. 31) benutzt; sie kommt etwas später auch bei Clavius (*Algebra*, Genève 1609, S. 8) vor. Indessen hat dieser Umstand für meine Frage keine Bedeutung, denn ich bin überzeugt, daß Stifel das Wort „surdesolidum" anwendete, nur weil ihm der ältere Ausdruck „sursolidum" unverständlich war. Aus demselben Grunde rühren sicherlich auch die Modifikationen des Ausdruckes her, deren sich Ramus und Peletier bedienten. Ramus nennt nämlich die fünfte Potenz „solidus" (*Arithmeticae libri duo et geometriae septem et viginti* ed. L. Schonerus, siehe die Auflage Frankfurt a. M. 1627, S. 175) und Peletier „supersolidus" (*De occulta parte numerorum quam algebram vocant*, Paris 1560, Bl. 1[b]). G. Eneström.

---

**Antwort auf die Anfrage 108 über den Ursprung des Termes „ratio subduplicata".** Ich bin jetzt geneigt anzunehmen, daß dieser Term von J. Wallis herrührt. Wenigstens ist seine Arbeit *Mathesis universalis sive arithmeticum opus integrum* (Oxonii 1657, 4°) die älteste Schrift, wo ich den Term angetroffen habe, und zwar wird er im 30. Kapitel („De rationum compositione sive continuatione et imminutione. Ratio duplicata, triplicata, etc. Item subduplicata, subtriplicata, etc. Et subduplicatae-triplicata, etc.") auf folgende Weise (S. 264) definiert: „Rationis $\frac{Aq}{Bq}$, ratio subduplicata est $\frac{A}{B}$. Ipsius autem $\frac{A}{B}$ rationis, ratio subduplicata est $\sqrt{\frac{A}{B}}$."

Daß Wallis selbst den Term eingeführt hat, sagt er gar nicht, sondern führt das Wort „subduplicata" schon vor der Definition (siehe S. 263) an, als ob es etwas bekanntes war, und ich vermutete zuerst, daß der Term bei Viète nachgewiesen werden konnte, aber in seinen *Opera* suchte ich denselben vergebens, und, wie gesagt, erst in Wallis Arbeit vom Jahre 1657 habe ich den Ausdruck „ratio subduplicata" aufgefunden. G. Eneström.

# Rezensionen.

**Generalregister zu Band 1—50 der Zeitschrift für Mathematik und Physik.** Bearbeitet von **E. Wölffing.** Leipzig, Teubner 1905. 8°, XII + 308 S. — 15 Mark.

Durch seine in der Zeitschrift für Mathematik und Physik veröffentlichten „Abhandlungsregister" und besonders durch seinen *Mathematischen Bücherschatz* (1903) hat sich Herr Wölffing schon früher als einen fleißigen und interessierten Arbeiter auf dem Gebiete der mathematischen Bibliographie dokumentiert. Wenn die letzte Schrift von den sachkundigen Rezensenten weniger günstig beurteilt wurde, so war der Grund dazu in erster Linie, daß Herr Wölffing teils die mathematische Literatur nicht genug kannte, um das von ihm gesammelte Material kritisch behandeln zu können, teils zu wenig Zeit zur Verfügung hatte, um eine wirklich druckreife Arbeit herzustellen. In betreff seiner neuen bibliographischen Schrift liegt die Sache viel günstiger, denn das Material dazu ist ja wesentlich in den 50 Jahrgängen der Zeitschrift für Mathematik und Physik enthalten und braucht eigentlich weder ergänzt noch berichtigt zu werden.

Das Hauptregister, das 226 zweispaltige Seiten umfaßt, hat eine sachliche Einteilung, die mit „Mathematik im allgemeinen" beginnt und mit „Physikalischen Belustigungen" endet. Hinsichtlich der reinen Mathematik ist die Einteilung wesentlich dieselbe wie im *Mathematischen Bücherschatz*. Unter die einzelnen Stichwörter sind nicht nur die Originalartikel, sondern auch die Bücherbesprechungen angeordnet, die ersten alphabetisch nach den Verfassern der Artikel und die letzten am Schluß des Stichwortes alphabetisch nach den Verfassern der besprochenen Schriften. Überall sind Bandzahl (mit fetten Ziffern) sowie erste und letzte Seitenzahl des Artikels (bezw. der Rezension) angegeben; die Titel der besprochenen Schriften sind mit Sternen versehen, und nach den Titeln derselben sind die Rezensenten genannt. Vor dem Hauptregister findet sich teils ein alphabetisches Verzeichnis der Rezensenten mit Angabe der *Bände*, wo ihre Besprechungen vorkommen, teils ein alphabetisches „Inhaltsverzeichnis" mit Verweisen auf die Seiten des Hauptregisters. Nach dem Hauptregister bringt Herr Wölffing ein Autorenregister (81 zweispaltige Seiten), das auch Verweise auf das Hauptregister enthält und noch dazu biographische Notizen in betreff der Autoren sowohl der Originalartikel wie der besprochenen Schriften bietet.

Mit dem Plane des Hauptregisters bin ich wesentlich einverstanden, und besonders damit, daß die sonst in den Generalregistern nicht selten vorkommende Zusammenstellung der Inhaltsverzeichnisse der einzelnen Bände von Herrn

Wölffing als unnötig betrachtet worden ist. Dagegen erlaube ich mir einige Bemerkungen in betreff der drei anderen Register. Wie schon gesagt, beziehen sich die Verweise des Rezensentenregisters auf die *Bände* der Zeitschrift für Mathematik und Physik, und um ein Beispiel zu wählen, steht nach Dedekind die Zahl 18, was also bedeutet, daß Dedekind im 18. Bande eine oder mehrere Schriften besprochen hat. Nun kommt es ja nicht selten vor, daß hervorragende Mathematiker Rezensionen schreiben, die den Wert von Originalartikeln besitzen, und für einen Benutzer des Generalregisters, der sich mit Dedekinds wissenschaftlicher Wirksamkeit beschäftigen will, kann es darum von Interesse sein, zu wissen, welchen Gegenstand die von Dedekind besprochene Schrift behandelt. Aber merkwürdigerweise gibt weder das Rezensentenregister noch das Autorenregister (wo Dedekind gänzlich fehlt), irgend eine Möglichkeit Aufschluß hierüber zu bekommen, und um den Aufschluß zu haben, muß man das Hauptregister Seite für Seite durchlaufen, bis man nach dem Titel einer besprochenen Schrift den Namen Dedekind entdeckt. Freilich hat man den Ausweg, den zitierten 18. Band einzusehen, aber hier kommt nur in Betracht, ob das Generalregister den Benutzern leichte Auskunft über die Beiträge der Mitarbeiter bietet, und in dem jetzt bemerkten Falle trifft dies *nicht* zu. Die Sache ist ja sonst sehr einfach, denn wenn man aus irgend einem Grunde das Rezensentenregister leicht übersichtlich haben will, genügt es, alle Mitarbeiter im Autorenregister zu verzeichnen, und auch in betreff der Rezensionen Verweise auf die betreffenden Seiten des Hauptregisters hinzuzufügen. Da die meisten Rezensenten zugleich Verfasser von Originalartikeln sind, so würde ein solches Verfahren das Autorenregister nicht wesentlich vergrößern (nach meiner Berechnung nur um etwa drei Seiten).

Auch das „Inhaltsverzeichnis“ gibt zu einer ähnlichen Bemerkung Anlaß. Wenn ich z. B. schnell wissen will, ob die 50 Bände einige Artikel über die Lambertsche Reihe oder über die Riemannsche Zetafunktion enthalten, so kann ich keine Auskunft hierüber aus dem „Inhaltsverzeichnis“ bekommen, denn dies enthält nur die *Stichwörter* des Hauptregisters, und ich muß also dieses Register direkt benutzen. Gewiß ist dieser Übelstand nicht besonders groß, aber da Herr Wölffing in seinem *Mathematischen Bücherschatz* ein „Sachregister“ gebracht hat, das nicht nur die Stichwörter, sondern noch dazu alle in den Titeln der verzeichneten Schriften vorkommenden Begriffe enthält, so verstehe ich eigentlich nicht, warum er hier anders verfahren ist, denn die etwas größere Mühe, die die Bearbeitung eines Sachregisters dieser Art erfordert, hat wohl in diesem Falle keinen entscheidenden Einfluß gehabt.

Anläßlich des Autorenregisters habe ich schon hervorgehoben, daß es aus einem gewissen Grunde angebracht wäre, darin auch die Rezensenten aufzunehmen, nämlich damit man leicht auffinden könnte, welchen Gegenstand ein gewisser Rezensent behandelt hat. Für eine solche Anordnung gibt es aber noch einen anderen Grund. Eine ausführliche Rezension kann ebenso großen oder noch größeren Wert als ein kleiner Originalartikel haben, und wenn man biographische Notizen über die Verfasser solcher Artikel bietet, ist es schwer einzusehen, warum man nicht mit den Rezensenten auf dieselbe Weise verfahren soll. Wie ich oben bemerkt habe, sind die meisten Rezensenten schon als Verfasser von Originalartikeln im Autorenregister zu finden, so daß die von mir empfohlene Ergänzung des Autorenregisters zu einem vollständigen Mitarbeiterregister nicht besonders zeitraubend sein würde. Auf der anderen Seite

scheint es mir, als ob biographische Notizen über die Verfasser besprochener Schriften weniger notwendig wären. Wenn man voraussetzen könnte, daß diese Schriften zusammen fast die ganze wirklich wertvolle mathematische und physikalische Literatur der 2. Hälfte des 19. Jahrhunderts repräsentierten, so wären die Notizen vielleicht angebracht, aber diese Voraussetzung ist kaum stichhaltig (so z. B. ist keine Schrift von J. J. Sylvester in den 50 Bänden besprochen); nur in betreff der mathematisch-historischen Literatur trifft die Voraussetzung bis zu einem gewissen Grade zu. Jedenfalls dürfte es unnötig sein, biographische Notizen z. B. über Archimedes, Diofantos und Euklides zu bieten. Ebensowenig nötig scheint mir die biographische Notiz über Daniel Bernoulli, der im Autorenregister nur aus dem Grunde vorkommt, weil die Pringsheimsche Übersetzung seiner Grundlage der modernen Wertlehre im 42. Bande besprochen wurde. Meines Erachtens wäre eine biographische Notiz über den Übersetzer (dessen Name jetzt im Autorenregister fehlt) viel angebrachter, und ebenso könnte statt Abel der Herausgeber seiner *Oeuvres complètes* L. Sylow einen Platz im Autorenregister nebst biogrsphischer Notiz verdient haben. Aber, wie gesagt, bin ich der Ansicht, daß die biographischen Notizen des Autorenregisters sich auf die Mitarbeiter der Zeitschrift beziehen sollen, und wenn Herr Wölffing mich zu Rate gezogen hätte, so würde ich ihm empfohlen haben, einen Versuch zu machen, durch Versendung von Fragebogen authentische Originalmitteilungen zu bekommen. Jetzt fehlen für viele Mitarbeiter biographische Notizen, und das ist ja sehr natürlich, da Herr Wölffing wesentlich nur gedruckte biographische Nachschlagebücher benutzt hat.

Ich habe bisher von dem Plane des Generalregisters gesprochen und gehe jetzt zu den Details über. Gegen die sachliche Einteilung des Hauptregisters habe ich nichts Wesentliches zu bemerken, und in betreff der Klassifikation der Artikel beschränke ich mich hauptsächlich auf die Abteilung, die mich besonders interessiert, nämlich die mathematisch-historische. Für diese Abteilung hat Herr Wölffing folgende Stichwörter gewählt: Allgemeines über Geschichte der Mathematik. — Altertum. — Orient. — Ägypter. — Chinesen. — Inder. — Griechen. — Römer. — Byzantiner. — Araber. — Juden. — Mittelalter. — 16. Jahrhundert. — 17. Jahrhundert. — 18. Jahrhundert. — 19. Jahrhundert. Mit dieser Einteilung kann ich sehr wohl einverstanden sein; für die Fälle, in denen ein Artikel oder eine besprochene Schrift unter mehr als einem Stichworte zu verzeichnen ist, hat Herr Wölffing in seiner Einleitung die Grundsätze aufgestellt, daß Originalartikel unter jedem dieser Stichwörter mit ihren vollen Titeln aufgeführt werden, und daß für Rezensionen Verweise auf das Hauptstichwort eingefügt werden sollen. Aber leider hat Herr Wölffing in der Abteilung für Geschichte der Mathematik sehr oft unterlassen, diese Grundsätze anzuwenden. So z. B. wird zwar die Abhandlung von Steinschneider: *Euklid bei den Arabern* sowohl unter „Griechen" wie unter „Arabern" genannt, aber seine Abhandlung *Diophantus bei den Arabern* findet sich *nur* unter „Arabern" verzeichnet; ebenso wird Weissenborns Monographie über Tschirnhaus (geb. 1651, gest. 1708) *nur* unter „17. Jahrhundert" aufgeführt, während Harnacks Schrift über Leibniz (geb. 1646, gest. 1716) *nur* unter „18. Jahrhundert" verzeichnet wird. Inwieweit die Klassifikation der mathematisch-historischen Abteilung überhaupt als befriedigend angesehen werden kann, dürfte durch die folgende Auslese aus den von mir notierten Bemerkungen ersichtlich sein.

S. 2. Die Ausgaben der Schriften von ARCHIMEDES, DIOFANTOS und EUKLIDES, die *nur* unter „Gesammelten Werken" angeführt werden, sind für die Geschichte der griechischen Mathematik so wichtig, daß unter „Griechen" Verweise auf die CANTORschen Rezensionen dieser Aufgaben nicht fehlen dürfen. Merkwürdigerweise ist dagegen die HEIBERGsche Ausgabe von APOLLONIOS' Werken *nur* unter „Griechen" aufgeführt und als eine Arbeit von HEIBERG betrachtet. Diese Inkonsequenz hat übrigens eine eigentümliche Folge mit sich geführt; im Autorenregister sind nämlich ARCHIMEDES, DIOFANTOS und EUKLIDES erwähnt, aber APOLLONIOS *fehlt*.

S. 4. Unter den im 13. Bande (1868) besprochenen Schriften wird auch „Zeitschrift für Bibliographie und Geschichte der Mathematik" genannt, aber eine Zeitschrift mit diesem Titel war bisher unbekannt. In der Tat handelt es sich um das BONCOMPAGNIsche Bullettino und die Angabe gehört also zur Seite 3 (BONCOMPAGNI), wo vier andere Rezensionen derselben Zeitschrift erwähnt werden. — Der CURTZEsche Artikel *Über die sogenannte Regel Ta Yen in Europa* ist *nur* unter „Chinesen" angeführt, aber der Artikel enthält wesentlich einen Auszug aus dem *Liber abbaci* (1228) des LEONARDO PISANO, und gehört also ganz gewiß in erster Linie (oder sogar ausschließlich) der Abteilung „Mittelalter".

S. 5. Der *nur* unter „Griechen" erwähnte Artikel von SUTER: *Der loculus ARCHIMEDius oder das Syntemachion des ARCHIMEDES* ist in erster Linie in die Abteilung „Araber" zu setzen, da der Artikel einen Abdruck eines arabischen Textes nebst Übersetzung enthält.

S. 6. Der vollständige Titel der letzten *nur* unter „Griechen" verzeichneten Schrift von LORIA lautet: *Della varia fortuna di EUCLIDE in relazione con i problemi dell' insegnamento geometrico elementare* und gehört in erster Linie der Abteilung „Pädagogik".

S. 7. *Nur* unter „Arabern" findet sich die STEINSCHNEIDERsche Monographie über ABRAHAM IBN ESRA, der bekanntlich ein jüdischer Mathematiker war, was Herr WÖLFFING auch wußte, als er (S. 8) die SILBERBERGsche Schrift *Sefer Ha-Mispar. Das Buch der Zahl des R. ABRAHAM IBN ESRA* unter „Juden" setzte, aber wahrscheinlich schon vergessen hatte, als er (ebenfalls S. 8) die Abhandlung von STEINSCHNEIDER *ABRAHAM JUDAEUS SAVASORDA und IBN ESRA* unter „Mittelalter" aufführte.

S. 8. VICTORIUS war ein Römer, der etwa 450 n. Chr. lebte, und FRIEDLEINS Schrift *Der Calculus des VICTORIUS* gehört also nicht der Abteilung „Mittelalter". — *Die deutsche Coss* (1877) von TREUTLEIN ist in erster Linie unter „16. Jahrhundert", jedenfalls nicht *nur* unter Mittelalter zu setzen. Im Jahre 1877 kannte man so gut wie nichts von der deutschen Algebra vor dem 16. Jahrhundert.

S. 9. Zwei Schriften über DÜRER (geb. 1471, gest. 1528) sind *nur* unter „Mittelalter" zu finden, während eine Schrift über LEONARDO DA VINCI (geb. 1452, gest. 1519) *nur* unter „16. Jahrhundert" (S. 10) angeführt wird. — NICOLAUS RHABDAS war ein byzantinischer Mathematiker, und die Schrift von P. TANNERY, *Notice sur les deux lettres arithmétiques de NICOLAS RHABDAS* soll also nicht *nur* unter „Mittelalter" gesetzt werden.

Die obigen Bemerkungen haben eigentlich keine größere praktische Bedeutung, denn ein Historiker, der Aufschlüsse über die Literatur eines gewissen Gegenstandes sucht, kann ziemlich leicht die ganze Abteilung „Geschichte der

Mathematik" (S. 2—15) des Generalregisters durchlaufen, sofern er nur im voraus weiß, daß die Einteilung des Generalregisters unzuverlässig ist. Aber viel schlimmer ist es, daß diese Abteilung nicht einmal annäherungsweise alle historischen Abhandlungen oder Rezensionen verzeichnet. In der Tat scheint es, als ob Herr Wölffing in diese Abteilung hauptsächlich solche Titel gesetzt hat, für welche er nicht sofort andere passende Stichwörter auffinden konnte. Ein solches Verfahren wäre vielleicht weniger zu bemängeln, wenn es richtig wäre, daß ein Historiker immer eine gewisse Theorie oder einen Teil derselben als Gegenstand seiner Untersuchungen wählt. Aber dies ist gewiß nicht der Fall, sondern es kommt sehr oft vor, daß man Aufschlüsse über die Mathematik bei einem gewissen Volke sucht. Nehmen wir nun an, daß ich zu wissen wünsche, welche Artikel die 50 Bände der Zeitschrift für Mathematik und Physik über die chinesische Mathematik enthalten, und für diesen Zweck das Wölffingsche Generalregister zur Hand nehme, so suche ich natürlich das Stichwort „Chinesen" (S. 4) auf, und finde dort zwei Artikel genannt, nämlich den oben zitierten Curtzeschen Artikel, der für meinen Zweck unanwendbar ist, und eine kleine Notiz von Matthiessen, *Zur Algebra der Chinesen*. Daß es aber wenigstens noch eine zweite Notiz von Matthiessen über die chinesische Mathematik gibt, nämlich *Die Methode Tá jàn in Suán-king von Sun-tsè und ihre Verallgemeinerung durch Yih-hing im I. Abschnitte des Tá jàn li schū*, das kann ich aus dem Generalregister *nicht* kennen lernen, sofern ich nicht bereit bin, das Hauptregister Seite für Seite durchzusehen, in welchem Falle ich den Titel der Notiz unter „Zahlenkongruenzen" entdecke. Vermutlich hat Herr Wölffing gar nicht daran gedacht, daß die Benutzer des Generalregisters Anlaß haben können, Auskunft über die chinesische Mathematik zu suchen, denn sonst wäre es ihm sehr leicht gewesen, ihnen unnötige Mühe zu sparen, z. B. durch einen einfachen Verweis auf „Zahlenkongruenzen" unter „Chinesen". Überhaupt scheint es mir, als ob Herr Wölffing nicht in Betracht gezogen hätte, daß die Zeitschrift für Mathematik und Physik früher eine durchaus andere Bedeutung hatte als jetzt. Nunmehr kommen historische Artikel nur ausnahmsweise darin vor, und die Zeitschrift wird darum wenig von Historikern gelesen. Aber früher war die Zeitschrift — oder genauer ausgedrückt die „Historisch-literarische Abteilung" nebst deren „Supplementen" — lange Zeit das wichtigste und einige Jahre sogar das einzige Organ der mathematisch-historischen Forschung, und es ist darum wenig angebracht, in einem Generalregister, das sich auf diese Zeit bezieht, die Geschichte der Mathematik als Nebensache zu behandeln.

Ich habe mich ziemlich ausführlich mit der Abteilung „Geschichte der Mathematik" beschäftigt; in betreff des Übrigen des Hauptregisters habe ich nicht viel zu sagen. Um beurteilen zu können, ob die Klassifikation der Artikel richtig ist, muß man eigentlich diese Artikel selbst einsehen, und ich habe weder Lust noch Zeit dazu gehabt. Ich kann also nur sagen, daß ich keine Unrichtigkeiten hinsichtlich der Klassifikation gefunden habe; dagegen wäre es meiner Ansicht nach erwünscht, daß Herr Wölffing gewisse Titel unter mehr als einem Stichworte erwähnt hätte. So z. B. verzeichnet er *nur* unter „Zahlsysteme" aber *nicht* unter „Teilbarkeit der Zahlen" einen Artikel mit dem Titel: *Teilbarkeitsregeln für ein Zahlensystem mit beliebiger ganzer positiver Basis*, und ebenso *nur* unter „Kombinationslehre" aber *nicht* unter „Mathematischen Belustigungen" einen Artikel mit dem Titel: *Das Problem der 15*

*Pensionatsdamen* (siehe über dies Problem W. Ahrens, *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*, Leipzig 1901, S 277—281). — Ebensowenig wie die Richtigkeit der Klassifikation habe ich die Vollständigkeit des Generalregisters näher untersucht; Herr Wölffing gibt selbst S. 227 eine Liste von Rezensionen, die im Hauptregister fehlen, und ich kann nur bemerken, daß diese Liste offenbar nicht absolut vollständig ist, denn sie übergeht die Gieselsche Rezension von Leibnizens *Mathematischen Schriften* (Bd. 10*, 2—14), die also S. 3 nachzutragen ist.

Die biographischen Notizen des Autorenregisters hat Herr Wölffing, wie ich schon oben bemerkte, fast ausschließlich aus gedruckten Arbeiten entnommen; er selbst nennt in der Einleitung als hauptsächliche Quelle Poggendorffs *Biographisch-literarisches Handwörterbuch*. Für einige mathematisch-historische Verfasser hätte er genauere Angaben mitteilen können, wenn ihm das Generalregister der Bibliotheca Mathematica 1887—1896 zugänglich gewesen wäre, und er würde dadurch vermieden haben, S. 231 einen Kopenhagener Arabisten und Zeitungsredakteur in einen deutschen Mädchenschul-Oberlehrer zu verwandeln. Auch die *Bio-bibliographie der 1881—1900 verstorbenen Mathematiker* (Biblioth. Mathem. $2_3$, 1901, S. 326—350), sowie die Abteilung „Todesfälle" der „Wissenschaftlichen Chronik" dieser Zeitschrift würde ihm leicht einige jetzt dem Autorenregister fehlende Todesjahre geboten haben. Ich nenne hier beispielsweise einige von ihm nicht als gestorben angeführte Mathematiker: J. Todhunter († 1884), E. Bardey († 1897), F. von Lühmann († 1899), B. Abdank-Abakanowicz († 1900), alle in der *Bio-bibliographie* erwähnt, ferner F. August († 1900), M. Pokorný († 1901), G. R. Dahlander († 1903), H. Gerlach († 1903), H. Hartl († 1903), H. W. Watson († 1903). Im Jahre 1905, zum Teil wohl nach der Beendung des Druckes des Generalregisters, sind gestorben R. Billwiller, J. Diekmann, W. Schlegel, Wilhelm Schmidt, O. Stolz, W. F. Wislicenus.

Eigentlich sinnstörende oder irreleitende Flüchtigkeitsfehler habe ich nicht im Generalregister gefunden. Daß Herr Wölffing z. B. überall „Légendre" für Legendre schreibt, ist ja ohne Belang, und ebenso, daß Tsuruichi Hayashi überall „P. Hayashi" genannt wird. Daß S. 240 die Lebenszeit des Diofantos um 160 n. Chr. angesetzt wird, ist freilich eine veraltete Angabe (bekanntlich weiß man jetzt, daß Diofantos höchst wahrscheinlich ein älterer Zeitgenosse des Anatolius war, so daß seine Blütezeit um 250 n. Chr. anzusetzen ist), aber es ist kaum zu fürchten, daß das Generalregister dazu beitragen wird, diese veraltete Angabe weiter zu verbreiten.

Im vorhergehenden habe ich auf einige Umstände hingewiesen, wodurch der Wert des Generalregisters meiner Ansicht nach für gewisse Gruppen von Benutzern vermindert wird, aber daraus darf man nicht folgern, daß ich das Generalregister selbst als minderwertig betrachte. Im Gegenteil bin ich überzeugt, daß es für die meisten Benutzer, sofern sie nicht ausschließlich Auskunft über mathematisch-historische Literatur suchen, von großem Nutzen sein wird, und daß man also Herrn Wölffing für seine Arbeit dankbar sein muß, und dies um so mehr, weil es nicht immer leicht ist, Fachgenossen zu finden, die geneigt sind, eine solche Arbeit zu übernehmen.

Bevor ich diese Besprechung schließe, erlaube ich mir zwei Wünsche auszudrücken, die an künftige Bearbeiter von Generalregistern adressiert sind. Der erste Wunsch bezieht sich auf das Hinzufügen eines Verzeichnisses der

Erscheinungsdaten der einzelnen Hefte. Ein solches Verzeichnis, daß der Verleger der Zeitschrift ganz gewiß sehr leicht herstellen könnte, und das nur ein paar Druckseiten erfordert, kann bei der Entscheidung von Prioritätsfragen nützlich werden; auch für bibliographische Zwecke ist es zuweilen nicht ohne Belang (vgl. z. B. die ENGELsche LIE-Bibliographie in der Biblioth. Mathem. $1_3$, 1900, S. 173).

Mein zweiter Wunsch betrifft die Bearbeitung von einem Namen- und Sachregister, wie das im *Generalregister der Bibliotheca Mathematica 1887—1896* (S. 36—85) vorkommende. Ich verhehle mir natürlich nicht, daß ich wenig Hoffnung haben kann, diesen Wunsch erfüllt zu bekommen, aber ich kann nicht umhin, die Gelegenheit zu benutzen, um hier auf den großen Nutzen eines solchen Registers hinzuweisen. In der Tat bewirkt das Fehlen desselben, daß Hunderte von wertvollen Angaben als gänzlich verloren betrachtet werden müssen, weil der Forscher, der sie benutzen kann, weder Zeit noch Lust hat, viele Stunden zu vergeuden, um zu konstatieren, daß sie wirklich vorhanden sind. Ich will nur ein einziges Beispiel aus meiner eigenen Erfahrung anführen. Vor einigen Tagen wünschte ich zu wissen, welche Notizen die Bibliotheca Mathematica über den spanischen Mathematiker OMERIQUE enthält, und mit Beihilfe des Generalregisters der Jahrgänge 1887—1896, sowie der Namenregister der Jahrgänge 1897—1904 konnte ich *sofort* alle diese Notizen auffinden. Wäre es mir dagegen nötig gewesen, die Notizen aus der Zeitschrift für Mathematik und Physik zu entnehmen, so hätte ich darauf verzichten müssen, denn ich hatte gar keine Zeit, die einzelnen Bände der Zeitschrift Seite für Seite durchzusehen.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

# Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

## Autoren-Register.



### a) Zeitschriften. Allgemeines.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8°. [1
$6_3$ (1905) : 3.

Bollettino di bibliografia e storia delle science matematiche pubblicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8°. [2
1905 : 4.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik herausgegeben von E. Lampe. Berlin. 8°. [3
34 (1903) : 3.

Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses, herausgegeben von A. Krazer (1905). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. $8_3$, 1905, 678—679. — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 8, 1905, 114—118. (G. L.) — Mathesis $5_3$, 1905, 265—266. [4

Adreßbuch der lebenden Physiker, Mathematiker und Astronomen, zusammengestellt von Fr. Strobel (1905). [Rezension:] Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 326—328. [G. Eneström.) [5

---

*Arrighi, G. L., La storia della matematica in relazione col sviluppo del pensiero. Torino, Paravia 1905. [6
16°, 13 + 133 S. — [1.50 lire.]

**Cantor M.**, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. — $1^2$ (1894). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 305—309. (G. Eneström, J. Kürschák, A. Sturm.) — $2^2$ (1900). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 309—317. (G. Eneström, A. Favaro.) — $3^2$ (1901). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth Mathem. $6_3$, 1905, 318—321. (G. Eneström.) [7

**Ball, W. W. R.**, Breve compendio di storia delle matematiche. Versione dall' inglese di D. Gambioli e G. Puliti. 1—2 (1903—1904). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 8, 1905, 70—72. (R. Bonola.) [8

**Ball, W. W. R.**, Histoire des mathématiques. Edition française revue et augmentée. Traduite sur la troisième édition anglaise par L. Freund. Tome premier. Paris, Hermann 1906. [9
8°, VII + 422 S. — [12 fr.] — [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. $29_2$, 1905, 318. (J. T.)

**Tropfke, J.**, Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. 1—II (1902—1903). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin $12_2$, 1905, 138—140. (J. W. A. Young.) — Arch. der Mathem. $10_3$, 1906, 77—79. (E. Lampe.) [10

**Picard, E.**, Sur le développement de l'analyse et ses rapports avec diverses sciences (1905). [Rezension:] Mathesis $5_3$, 1905, 209—210. (P. M.) — Monatsh. für Mathem. 17, 1906; Lit.-Ber. 11—12. (H. Hahn.) [11

**Darboux, G.,** Etude sur le développement des méthodes géométriques (1904). [Rezension:] Mathesis $5_3$, 1905, 209—210. (P. M.) [12

**Teixeira, F. G.,** Tratado de las curvas especiales notables. Memoria premiada por la real academia de ciencias exactas, físicas y naturales en el concurso ordinario a premios del año 1897. [13
*Madrid*, Acad. de ciencias, Memorias 22, 1905. IX + 632 + (1) S.

**Mach, E.,** Die Mechanik in ihrer Entwickelung, historisch-kritisch dargestellt. Fünfte Auflage (1904). [Rezension:] Mathesis $5_3$, 1905, 264—265. (P. M.) [14

**Mach, E.,** La mécanique. Exposé historique et critique de son développement. Traduit par E. Bertrand (1904). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 8, 1905, 69—70. (G. L.) — Journ. de sc. mathem. 15, 1905, 186—187. — Mathesis $5_3$, 1905, 264—265. (P. M.) [15

**Duhem, P.,** Les origines de la statique. 1 (1905). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. $8_3$, 1905, 683—684. [16

**Duhem, P.,** Les origines de la statique. [17
*Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. $9_3$, 1906, 115—148.

**Moreux, Th.,** Histoire d'une conquête astronomique. La mesure de la distance de la terre au soleil. [18
*Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. $8_3$, 1905, 476—507.

**Ahrens, W.,** Scherz und Ernst in der Mathematik (1904). [Rezension:] Mathesis $5_3$, 1905, 266—267. (P. M.) [19

* **Ball, W. W. R.,** Mathematical recreations and essays. 4th edition. London, Macmillan 1905. [20
8°, XVI + 402 S. — [7 sh.] — [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 8, 1905, 127. (G. L.)

**Smith, D. E.,** A portfolio of portraits of eminent mathematicians (1905). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. $8_3$, 1905, 683. — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem 8, 1905, 95. [21

### b) Geschichte des Altertums.

**Vacca, G.,** Sulla matematica degli antichi chinesi. [22
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 8, 1905, 97—102.

**Kewitsch, G.,** Zweifel an der astronomischen und geometrischen Grundlage des 60-Systems (1904). [Rezension:] Zeitschr. für Mathem. 52, 1905, 337—338. (C. W. Wirtz.) [23

**Tannery, P.,** Notes sur trois manuscrits grecs mathématiques de Turin. [24
Revue des études grecques 18, 1905, 207—210.

**Tannery, P.,** Un traité grec d'arithmétique antérieur à Euclide. [25
Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 225—229.

* **Brinkmann,** Über kritische Mathematik bei Platon. [26
Abhandlungen der Friesschen Schule. Neue Folge, Heft 2, 1905.

**Meier, Rudolph,** De Heronis aetate. Lipsiae 1905. [27
8°, 42 + (2) S. — Dissertation.

### c) Geschichte des Mittelalters.

**Björnbo, A. A.,** Gerhard von Cremonas Übersetzung von Alkwarizmis Algebra und von Euklids Elementen. [28
Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 239—248.

**Suter, H.,** Zu dem Buche „De superficierum divisionibus" des Muhammed Bagdadinus. [29
Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 321—322.

**Eneström, G.,** Über einen Näherungswert für cos $x$. [30
Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 323—324. — Anfrage.

**Björnbo, A. A.,** Die mathematischen S. Marcohandschriften in Florenz. 2. [31
Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 230—238.

**Mortet, V.,** Note historique sur l'emploi de procédés matériels et d'instruments usités dans la géométrie pratique au moyen âge ($X^e$—$XIII^e$ siècles). [32
Deuxième congrès internat. de philosophie (Genève Septembre 1904), Comptes rendus 1905. 18 S.

**Döhlemann, K.,** Die Perspektive der Brüder van Eyck. [33
Zeitschr. für Mathem. 52, 1905, 419—425.

**Eneström, G.,** Über zwei ältere Benennungen der fünften Potenz einer Größe. [34
Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 324—325, 410. — Anfrage.

### d) Geschichte der neueren Zeit.

**Hunrath, K.,** Zu Albrecht Dürers Näherungskonstruktionen regelmäßiger Vielecke. [35
Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 249—251.

**Brocard, H.,** Description et usage d'un nouvelle anneau astronomique, d'après un manuscrit inédit. Bar-le-Duc 1905.
4°, 10 S. [36

**Guimarães, R.,** Un manuscrit intéressant. [Briefue compoñ et fabrique dun anoau astronomic.] [37
*Lisboa*, Acad. das sc., Memorias $7_3$, 1905. 10 S.

Le opere di Galileo Galilei. Edizione nazionale sotto gli auspicii di sua maestà il re d'Italia. Volume XVI. Firenze. Barbera 1905. [38
4°, 564 + (1) S. — Herausgegeben von A. Favaro.

**Favaro, A.,** Serie decima sesta di scampoli Galileiani. [39
*Padova*, Accad. d. sc., Atti e memorie 22 1906, 5—36.

**Favaro, A.,** Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. XIV. Giacomo Badouère. XV. Martino Hastal. [40
*Venezia,* Istituto Veneto, Atti 65 : 2, 1905—1906, 193—208.

**Favaro, A.,** L'episodio di Gustavo Adolfo di Svezia nei racconti della vita di Galileo. [41
*Venezia,* Istituto Veneto, Atti 65 : 2, 1905—1906, 17—39.

***Achsel, R.,** Über den Zahlbegriff bei Leibniz. Wilmersdorf 1905. [42
4°, 20 S. — [1.50 Mk.] — Programm.

**Reinhardt, C.,** Beiträge zur Lebensgeschichte von Ehrenfried Walter von Tschirnhaus. Meißen 1903. [43
4°, 35 S. — Jahresbericht der Fürsten- und Landesschule St. Afra.

**Amodeo, F.,** Vita matematica napolitana. Studio storico, biografico, bibliografico. Parte prima. Napoli 1905. [44
8°, VIII + 216 S. — Abdruck von vier Abhandlungen, die 1902—1905 in den „Atti" der „Accademia Pontaniana" erschienen. — [Rezension:] Periodico di matem 21, 1905, 144. (K.)

**Hayashi, T.,** Taits problem with counters in the Japanese mathematics. [45
Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 323.

**Pringsheim, A.,** Über ein Eulersches Konvergenzkriterium. [46
Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 252—256.

**Teixeira, F. G.,** Sobre uma questão entre Monteiro da Rocha e Anastasio da Cunha. [47
*Porto,* Academia polytechnica, Annaes 1, 1905, 7—15.

**Macfarlane, A.,** Bibliography of quaternions and allied systems of mathematics (1904). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 8, 1905, 77—78. (G. L.) [48

***Rübenstein, N.,** Über Darstellung von Funktionen durch periodische Reihen. Mährisch-Ostrau 1903. [49
8°, 40 S. — Programm. — Historische Abhandlung. — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 26, 1905, 3156.

**Amodeo, F.,** Gli istituti accademici di Napoli intorno al 1800. [50
*Napoli,* Accad. Pontaniana, Atti 35, 1905. 59 S.

**Barus, C.,** The progress of physics in the nineteenth century. I—II. [51
Science $22_2$, 1905, 355—369, 385—397. — „Paper read at the international congress in St. Louis".

**Loria, G.,** „Unicuique suum". [52
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 8, 1905, 65—67. — Über ein 1801 in Paris erschienenes Buch: „Elémens de géométrie", das angeblich von Jean Jacques Rousseau, aber in Wirklichkeit von Rossignol verfaßt ist.

**Amsler-Laffon, J.,** Zur Lebensgeschichte von Franz Neumann (1798 — 1895). [53
*Zürich,* Naturf. Ges., Vierteljahrsschr. 49, 1904, 143—158.

**Tannery, P.,** Auguste Comte et l'histoire des sciences (1905). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 8, 1905, 93—94. [54

**Königsberger, L.,** Carl Gustav Jakob Jacobi. Festschrift (1904). [Rezension:] *New York,* Americ. mathem. soc., Bulletin $12_2$, 1906, 261—262. (J. Pierpont.) — Mathesis $5_3$, 1905, 263—264. (P. M.) — Monatsh. für Mathem. 17, 1906; Lit.-Ber. 8—10. (G. K.) [55

**Stäckel, P.,** Mindings Beweis für die Stabilität des Gleichgewichts bei einem Maximum der Kräftefunktion. [56
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 14, 1905, 504—506.

**Friedländer, S.,** Julius Robert Mayer (1905). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 26, 1905, 2731. (P. Jensen.) [57

Correspondance d'Hermite et de Stieltjes publiée par les soins de B. Baillaud et H. Bourget. Tome II (1889 — 1894). Paris, Gauthier-Villars 1905. [58
8°, VI + (1) + 464 S. + Porträt. — [16 fr.] — [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. $29_2$, 1905, 331—336. (G. D.) — Mathesis $6_3$, 1906, 19—20. (P. M.)

***Alexejeff, W.,** N. W. Bugajeff und die idealistischen Probleme der Moskauer mathematischen Schule. [59
Vierteljahrsschrift für wissenschaftliche Philosophie $4_2$, 1905.

**Fiedler, W.,** Meine Mitarbeit an der Reform der darstellenden Geometrie in neuerer Zeit. [60
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 14, 1905, 493—503.

***Wieleitner, H.,** Bibliographie der höheren algebraischen Kurven für den Zeitabschnitt von 1890—1904. Leipzig, Göschen 1904. [61
8°, 58 S. — [1.50 Mk.] — Programm (Speyer). — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 26, 1905, 2671.

**Poincaré, H.,** L'état actuel et l'avenir de la physique mathématique (1904). [Englische Übersetzung von J. W. Young:] *New York,* Americ. mathem. soc. $12_2$, 1906, 240—260. — [Rezension:] Mathesis $5_3$, 1905, 209—210. (P. M.) [62

***Picard, E.,** La science moderne et son état actuel. Paris, Flammarion 1905. [63
12°, 299 S. — [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. $29_2$, 1905, 317. (J. T.)

Generalregister zu Band 1—50 der Zeitschrift für Mathematik und Physik. Bearbeitet von E. Wölffing. Leipzig, Teubner 1905. [64
8°, VIII + 308 S. — [15 Mk.]

### e) Nekrologe.

De Witt Bristol **Brace** (1859—1905). [65
Science $22_2$, 1905, 513—514 (E. B. Davis); 754 —755 (E. Merritt).

Guido **Hauck** (1845—1905). [66
Bollett. di bibliogr. d. so. matem. 8, 1905, 93.

Hermann **Kortum** (1836—1904). [67
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 15, 1906, 60—63 [mit Porträt]. (Aus der Bonner Chronik 1904.)

Rudolf **Lipschitz** (1832—1903). [68
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 15, 1906, 56—59 [mit Porträt]. (Aus der Bonner Chronik 1903.)

George **Salmon** (1819—1904). [69
Boilett. di bibliogr. d. sc. matem. 8, 1905, 127.

Victor **Schlegel** (1843—1905). [70
L'enseignement mathém. 8, 1906, 55. (H. F.)

Otto **Stolz** (1842—1905). [71
L'enseignement mathém. 8, 1906, 55. (E. Kaller) — Periodico di matem. 21, 1906, 192. (G. Lazzeri).

Paul **Tannery** (1843—1904). [72
Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, 257—304 + Porträt (H. G. Zeuthen; mit Einleitung und Schriftverzeichnis von G. Eneström). — Deutsche Literaturz. 27, 1906, 111. — Oeuvres de Descartes 8, 1906, V—XIV (Ch. Adam; über Paul Tannery als Mitherausgeber von Descartes' Schriften).

Walter Friedrich **Wislicenus** (1859—1905). [73
Science $22_2$, 1905, 542.

### f) Aktuelle Fragen.

**Dyck, W. von,** Über die Errichtung eines Museums von Meisterwerken der Naturwissenschaft und Technik in München. Festrede zur Übernahme des ersten Wahlrektorates bei der Jahresfeier der Technischen Hochschule zu München, gehalten am 12. Dezember 1903. Leipzig, Teubner 1905 [74
4°, (3) + 40 S. — [2 Mk.] — [Rezension:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 14, 1905, 534—535. (v. Dyck.) — Deutsche Literaturz. 26, 1905, 3155—3156. (E. Gerland.)

**Pringsheim, A.,** Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik (1904). [Rezension:] Mathesis $5_3$, 1905, 239—241. (P. M.) [75

**Lindemann, F.,** Lehren und Lernen in der Mathematik (1904). [Rezension:] Mathesis $5_3$, 1905, 239—241. (P. M.) [76

**Bonolis, A.,** Sull' insegnamento della storia delle matematiche in Russia. [77
Periodico di matem. 21, 1905, 103—118. — Wesentlich eine Übersetzung (aus dem Russischen) des Programmes, dessen französische Übersetzung Herr V. Bobynin in der Biblioth. Mathem. 1891, 79—88 veröffentlicht hat.

**Klein, F.,** Probleme des mathematisch-physikalischen Hochschulunterrichts. [78
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 14, 1905, 477—492.

**Marotte, F.,** L'évolution actuelle de l'enseignement mathématique en Angleterre et en Allemagne. [79
Bullet. d. sc. mathém. $29_2$, 1905, 281—306.

Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens. II. [80
L'enseignement mathém. 7, 1905, 473—478.

[Amerikanische Mathematiker-Versammlung in New York 1905.] [81
*New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin $12_2$, 1906, 223—234. (F. N. Cole.) — Science $23_2$, 1906, 101—102. (F. N. Cole.)

[Deutsche Mathematiker-Versammlung in Meran 1905.] [82
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 14, 1905, 516—525. (A. Krazer.) — *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin $12_2$, 1906, 237—240 (E. A. Miller, E. Swift.) — L'enseignement mathém. 7, 1905, 485—488. — Naturwiss. Rundschau 20, 1905, 569—571. (Kruse.)

[Französische Mathematiker-Versammlung in Cherbourg 1905.] [83
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 14, 1905, 527. — *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin $12_2$, 1905, 93.

# Wissenschaftliche Chronik.

## Ernennungen.

— Privatdozent E. Aschkinass in Berlin zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Dr. R. Baire in Dijon zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Dozent O. Blumenthal in Aachen zum Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule daselbst.

— Professor J. E. Boxebright zum Professor der Mathematik an der Universität in Ottawa, Kansas.

— Dr. A. Boulanger in Lille zum Professor der Mechanik an der Universität daselbst.

— Dr. H. Bourget in Toulouse zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Privatdozent H. Bruns in München zum Honorarprofessor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Professor K. Dieterici in Hannover zum Professor der Physik an der Universität in Rostock.

— Professor Eleanor Doak zum Professor der Mathematik an „Mount Holyoke college".

— F. W. Dyson in Greenwich zum Professor der Astronomie an der Universität in Edinburg.

— Professor der Physik T. W. Edmondson in New York zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Privatdozent M. Ernst in Lemberg zum Professor der Astronomie an der Universität daselbst.

— Professor M. Fouché in Paris zum „Répétiteur de géométrie" an der „Ecole polytechnique" daselbst.

— Privatdozent H. Konen in Bonn zum Professor der Physik an der Universität in Münster.

— Dr. R. H. Lee zum Professor der Mathematik am „Rhode Island state college".

— Professor R. A. Lehfeldt in London zum Professor der Physik am „Transvaal Technical institute" in Johannesburg.

— Privatdozent F. Martens in Berlin zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Dr. M. Mason in New Haven zum Professor der Mathematik am „Sheffield scientific school" daselbst.

— Dr. F. S. Pinkerton zum Professor der angewandten Mathematik am „University college of South Wales" in Cardiff.

— W. H. Scherk zum Professor der Mathematik am „Buchtel college" in Akron, Ohio.

— J. S. Stevens zum Professor der Physik an der Universität von Maine in Orono.

— Dr. O. Veblen in Chicago zum Professor der Mathematik an der Universität in Princeton.

— Dr. H. A. Wilson in Cambridge zum Professor der Physik am „Kings college" in London.

— Dozent J. Zenneck in Danzig zum Professor der Physik an der Technischen Hochschule daselbst.

— Privatdozent E. Zermelo in Göttingen zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

## Todesfälle.

— Karl Bopp, Professor der Mathematik am Goethegymnasium in Frankfurt a. M., gestorben den 9. November 1905, 49 Jahre alt.

— Pietro Cassani, Professor der höheren Mathematik am „Istituto tecnico" in Venedig, geboren in Venedig den 4. Juni 1832, gestorben daselbst den 6. Juni 1905.

— Ralph Copeland, Professor der Astronomie an der Universität in Edinburg, geboren in Woodplumpton den 3. September 1837, gestorben den 27. Oktober 1905.

— Karl Albert Viktor Holmgren, früher Professor der Physik an der Universität in Lund, geboren zu Vestra Ny (Östergötland, Schweden) den 18. Mai 1824, gestorben in Lund den 12. Dezember 1905.

— Samuel Jenkins Johnson, Astronomischer Verfasser, geboren zu Atherton bei Manchester den 14. März 1845, gestorben 1905.

— Charles Jasper Joly, Professor der Astronomie an der Universität in Dublin, geboren zu Tullamore den 27. Juni 1864, gestorben den 4. Januar 1906.

— Karl von Kořistka, früher Professor der Geodäsie an der Technischen Hochschule in Prag, geboren in Brüsau (Mähren) den 7. Februar 1825, gestorben in Prag, den 19. Januar 1906.

— Miguel Merino y Melchor, früher Direktor der kgl. Sternwarte in Madrid, geboren in Villafranca de Montes de Oca (prov. de Burgos) den 24. April 1831, gestorben in Madrid den 7. März 1905.

— Julius Möller, Lektor der Mathematik am Gymnasium in Lund, geboren in Malmö den 17. Februar 1856, gestorben in Lund den 2. Februar 1906.

— John Lewis Morris, früher Professor der praktischen Mechanik an der „Cornell university" in Ithaca, gestorben den 19. November 1905, 63 Jahre alt.

— Adolph Putzler, Konrektor a. D. am Gymnasium in Görlitz, geboren in Baruth (Brandenburg) den 30. Dezember 1838, gestorben den 15. November 1905.

— Victor Schlegel, Professor der Mathematik an der kgl. höheren Maschinenschule in Hagen i. W., geboren in Frankfurt a. d. O. den 4. März 1843, gestorben in Hagen i. W. den 23. November 1905.

— Otto Stolz, Professor der Mathematik an der Universität in Innsbruck, geboren in Hall (Tirol) den 2. Juli 1842, gestorben in Innsbruck den 23. November 1905.

— Martin Wiberg, Erfinder einer Rechenmaschine, die Logarithmen berechnet und druckt, geboren in Vihy (Skåne, Schweden) den 4. September 1826, gestorben in Stockholm den 29. Dezember 1905.

### Vorlesungen über Geschichte der mathematischen Wissenschaften.

— An der Technischen Hochschule in Brünn hat Professor F. Oeknrauch für das Wintersemester 1905—1906 eine einstündige Vorlesung über Geschichte der Geometrie angekündigt.

— An der Technischen Hochschule in Darmstadt hat Professor Fr. Graefe für das Wintersemester 1905—1906 eine Vorlesung über Geschichte der Mathematik angekündigt.

— An der Universität in Wien hat Professor N. Herz eine zweistündige Vorlesung über Astronomie und Geodäsie in historischer Entwickelung angekündigt.

— Am Polytechnikum in Zürich hat Professor F. Rudio, der im Sommersemester 1905 „die mathematische Terminologie, historisch und sprachlich erläutert" behandelte, für das Sommersemester 1906 eine einstündige Vorlesung über die Geschichte der Geometrie vor Euklides angekündigt.

— M. A. Favaro a commencé le 23 janvier 1906 son cours officiel d'histoire des mathématiques à l'université de Padova (voir Biblioth. Mathem. $6_3$, 1905, p. 336) par un discours sur le sujet: „L'elemento storico nello studio e nell' insegnamento delle scienze esatte". — Un autre cours officiel d'histoire des mathématiques a été institué à l'université de Napoli par M. F. Amodeo, qui a prononcé le 16 décembre 1905 son discours inaugural: „I trattati delle sezioni coniche da Apollonio a Simson" (voir ci-dessus p. 387).

### Preisfragen gelehrter Gesellschaften.

— *Académie des sciences de Paris.* Concours de l'an 1908. Réaliser un progrès important dans l'étude de la déformation de la surface générale du second degré. — Perfectionner, en un point important, l'application des principes de la dynamique des fluides à la théorie de l'hélice.

### Mathematikerversammlungen im Jahre 1905.

— *Deutsche Mathematiker-Vereinigung.* Die Jahresversammlung 1905 der Deutschen Mathematiker-Vereinigung fand zu Meran 24.—29. September statt, in Gemeinschaft

mit der Ahteilung I der 77. Dentscben Naturforscber-Versammlung. Vorträgeüber rein mathematische Gegenstände wurden von den Herreu E. Czuber, F. Hočevar, W. Wien, F. Hasenöhrl, W. Wirtinger, P. Koebe, T. Levi-Civita, A. Schönflies, K. Hensel, K. Zindler, P. Epstein, G. Kohn, L. Schlesinger, J. Grünwald, E. Müller, P. Stäckel gehalten. Herr P. Stäckel schlug vor, daß die Deutsche Mathematiker-Vereinigung Schritte zur Einrichtung eines Mathematiker-Archivs tun würde, und der Vorstand der Vereinigung wurde beauftragt, Maßregeln zu ergreifen, um diesen Plan zu verwirklichen. Ferner erklärte sich die Versammluug der Ansicht zu sein, daß ein Euler-Jubiläum am 15. April 1907 (200 Jahre nach Eulers Gehurt) gefeiert werden sollte, uud überwies diese Angelogenheit dem Vorstande zur weitereu Verfolgung. Die Herren A. Gutzmer und E. Wölffing herichteten über die Tätigkeit der hibliographischen Kommission, und der Wunsch wurde ausgesprochen, daß die Kommission die Veröffentlichung eines Verzeichnisses der jetzt in Seesen aufbewahrten nachgelassenen Bibliothek von G. Wertheim, die viele seltene mathematische Werke enthält, anregeu möchte.

— *Les mathématiques à l'association française 1905.* Le congrès de l'association française pour l'avancement des sciences s'est tenu en 1905 à Cherbourg du 3 au 8 août. Dans la section des sciences mathématiques, qui a été présidée par M. M d'Ocagne, les travanx furent ouverts par un discours de M. P. Appell sur les difficultés que présentent quelque questions de la mécaniquo rationnelle. Des communications sur les mathématiques pures ont été faites par MM. Clark, M. d'Ocagne, Hébert, Gardès, G. Tarry, E. Lebon, G. Arnoux, A. Cabreira.

— *American mathematical society.* The American mathematical society held its meeting 1905 at Columhia university, New York, December 28—29. The attendance at the sessions iucluded 66 membres and 22 papors were read.

### Vermischtes.

— Die von Herrn F. G. Teixeira seit 1877 herausgegebene Zeitschrift Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas ist nach der Beendung des 15. Bandes eingegangen. Gleichzeitig ist das erste Heft einer von Herrn Teixeira gegründeten ueuen Zeitschrift Annaes scientificos da academia polytechnica do Porto erschienen; diese Zeitschrift wird Ahhandlungeu aus dem Gebiete der Mathematik und der Naturwissenschaften veröffentlichen

— Le prix Binoux a été décerné en 1905 à l'ensemble des travaux historiques de Paul Tannery. En 1907, le prix sera decerné aussi à un auteur de travaux sur l'histoire des sciences.

— Au der Technischen Hochschule in München ist folgende Preisaufgabe für das Jahr 1906 ausgeschriebeu: „Es soll die Entwickelung, welche die Theorie der singulären Lösungen totaler Differentialgleichungen ersterOrdnung vom Zeitpunkte ihres Auftretens bis auf die Gegenwart genommeu hat, quellenmäßig dargestellt werden. Dabei ist inshesondere bezüglich der früheren Untersuchungen (his 1850) die (keineswegs vollständige) Arbeit von Houtain: *Des solutions singulières des équations différentielles* (Anuales des universités de Belgique, Années 1851 et 1852, Bruxelles 1854, S. 973—1323) kritisch zu beleuchten".

# Namenregister.

Druck von Theodor Hofmann in Gera.